

KÉSZÜLJÜNK AZ ÉRETTSÉGIRE
MATEMATIKÁBÓL
EMELT SZINTEN



Műszaki Kiadó

Wolters Kluwer csoport

FELADATGYŰJTEMÉNY



BÁRD ÁGNES–FRIGYESI MIKLÓS–LUKÁCS JUDIT–
MAJOR ÉVA–SZÉKELY PÉTER–VANCSÓ ÖDÖN

KÉSZÜLJÜNK AZ ÉRETTSÉGRE MATEMATIKÁBÓL EMELT SZINTEN

FELADATGYŰJTEMÉNY

MŰSZAKI KIADÓ, BUDAPEST

Lektorálta:

Halmos Mária, matematikus
Koncz Levente, középiskolai tanár
Szula Zsuzsanna, középiskolai tanár
Varagics Mirjana, középiskolai tanár
Wintsche Gergely, főiskolai adjunktus

Grafikus:

Bajor Tamás

Fotós:

Borszéki László

© Bárd Ágnes, Frigyesi Miklós, Lukács Judit, Major Éva, Székely Péter, Vancsó Ödön, 2005, 2006
© Műszaki Könyvkiadó Kft., 2006

ISBN 963 16 2788 8

Azonosító szám: MK-2788-8

BEVEZETŐ

2005-ben új érettségi kerül bevezetésre. A bevezetést több évi kutató, fejlesztő munka előzte meg, amelynek részeként több próba-érettségi feladatsor összeállítása, kipróbálása és értékelése zajlott le. A tapasztalatok birtokában állítottuk össze ezt a feladatgyűjteményt, amely kimondottan az emelt szintű érettségire való felkészítésre és felkészülésre szolgál. Célunk elsősorban az volt, hogy bemutassuk az új típusú feladatok jellegét, valamint az új és a hagyományos témákban a várható feladatok nehézségi szintjét. Munkánkkal azt is szeretnénk közvetíteni, hogy az emelt szintű matematika érettségi nem egy teljesíthetetlen vállalkozás, fel lehet rá készülni, és eredménnyel teljesíthető.

A korábbi érettségikhez képest a változások két területen jelennek meg. A feladatok egy részének a jellege más – komoly szerepet kapnak a szövegértést és a modellezést igénylő szöveges feladatok –, továbbá olyan új témák kerülnek be, amelyek korábban nem szerepeltek a fakultációs tantervben sem (statisztika) vagy csak nem jelentek meg az érettségi-felvételi feladatok között (analízis elemei, gráfok, valószínűség-számítás).

Az írásbeli emelt szintű matematika érettségi két részből áll. Az első négy feladat általában a vizsgakövetelmények öt témakörének egyikéből kerül kiválasztásra. Az ilyen típusú feladatok találhatók a könyv első öt fejezetében. Az írásbeli érettségi feladatsor második részében öt feladat szerepel. Ezek összetettek, többnyire több témakört tartalmaznak, valamint magasabb műveleti szintet igénylő kompetenciát kívánnak meg. Az ilyen típusú feladatokat a 6. fejezet tartalmazza.

A 7. fejezetbe olyan feladatokat válogattunk, amelyek tartalmukban többnyire túlmutatnak a vizsgakövetelményeken és/vagy nehezebbek az érettségien elvárható szintnél. Ezeket elsősorban az érdeklődőbb, versenyekre készülő tanulók forgathatják haszonnal.

A fejezetekben előforduló nehezebb részfeladatok a * jelölést kapták; **a)** az ilyen módon bekeretezett alpont viszont olyan ismereteket is igényelhet, amelyek már túlmutatnak a követelményeken, tehát inkább az érdeklődőbb diákoktól várható a megoldásuk.

A feladatgyűjteményhez megoldáskötet is tartozik, ami nem csak végeredményeket tartalmaz, hanem többnyire a feladatok részletes megoldásai, sőt az újszerű feladatok esetében helyenként didaktikai megjegyzések is találhatók. Természetesen egy tankönyv szerepét nem veheti át egy feladatgyűjtemény, így a tanítás feladata nem célja a kötetnek még akkor sem, ha olykor tematikus, „nevelő célzatú” feladatok is előfordulnak.

A szöveges feladatok esetében különösen fontos a jó fogalmazási készség, az alkalmazások esetén pedig az egyéb tárgyi ismeretek.

Ezzel a könyvvvel biztatjuk mindazokat, akik sikerrel szeretnék elvégezni a főiskolát vagy az egyetemet, hogy készüljenek az emelt szintű érettségi vizsgára, s reményeink szerint a vizsgán sikeresek is lesznek, ha ezeket a feladatokat megoldják.

Örömmel vennénk, ha későbbi kiadások színvonalának emelése érdekében segítő, javító észrevételeiket eljuttatnák a kiadóba.

Minden olvasónknak eredményes tanulást és sikereket kívánunk.

A Szerzők

1. HALMAZOK, LOGIKA, KOMBINATORIKA, GRÁFOK

1. Határozzon meg egy olyan X halmazt, amelyre egyszerre igaz, hogy

$$A \cap X = B \cap X = A \cap B \text{ és } A \cup B \cup X = A \cup B!$$

2. Adott egy H alaphalmaz, amelynek az A , B és C különböző részhalmazai. Szemléltesse Venn-diagrammal az alábbiakban megadott azonosságokat!

a) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$

c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B}) = A \cap B$

3. Adott egy H alaphalmaz, amelynek az A és B különböző részhalmazai. Mi a következő művelet sor eredménye? Szemléltesse Venn-diagrammal!

$$(A \cap B) \cap [(\overline{A} \setminus \overline{B}) \cup (\overline{B} \setminus \overline{A})]$$

4. Legyen az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza. A következő halmazokat definiáljuk ezen az alaphalmazon:

$$A = \{\text{páros számok}\};$$

$$B = \{3\text{-mal osztható számok}\};$$

$$C = \{5\text{-tel osztható számok}\}.$$

Írja fel az A , B és C halmazok segítségével a következő halmazokat:

a) 5-re végződő pozitív egészek;

b) 30-cal osztható pozitív egészek;

c) 3-mal osztható páratlan pozitív egészek.

Írja le szövegesen, hogy mit jelentenek a következő halmazok!

d) $A \cap (B \setminus C)$

e) $\overline{A \cup B \cup C}$

5. Legyen az alaphalmaz egy középiskola tanulóközössége. Adottak a következő halmazok:

$$A = \{\text{kitűnő tanulók}\}$$

$$B = \{\text{bukott tanulók}\}$$

$$C = \{16 \text{ évesnél idősebb tanulók}\}$$

$$D = \{\text{fiúk}\}$$

- a) Kik tartoznak az alábbi halmazokba?

$$(A \cap D) \cup (B \cap C)$$

$$(C \setminus D) \cap A$$

$$A \cup \overline{D}$$

$$\overline{B} \cap C \cap D$$

- b) Írja le többféleképpen a következőt az A , B , C , D halmazok segítségével! Azok a lányok, akik nem kitűnő tanulók és 16 évesnél nem idősebbek.

6. Az A , B , C halmazokról a következőket tudjuk:

$$A \cup B \cup C = \{a; b; c; d; e; f; g; h\},$$

$$A \setminus C = \{a; d\},$$

$$B \setminus C = \{b; d; g\},$$

$$B \cap C = \{c\},$$

$$C \setminus A = \{c; h\},$$

$$A \cap (B \cup C) = \{d; e; f\}.$$

Határozza meg az A , a B és a C halmaz elemeit!

7. Az osztályban harminc tanuló írt matematikadolgozatot, amelyben három feladatot kellett megoldani. Az 1. feladatot 20, a másodikat 16, a harmadikat 10 tanuló oldotta meg hibátlanul. Az első és a másodikat 11, az első és a harmadikat 7, a másodikat és a harmadikat 5 tanuló oldotta meg jól. Mindhárom feladatot mindössze 4 tanulónak sikerült jól megoldania. Hányan nem tudták egyiket sem megoldani?

8. A 12.-es matematikafakultáción 18-an tanulnak. Mindenki egy vagy két tárgyat választott emelt szintű érettségire a matematika, a fizika és a történelem közül. 15-en választották a matematikát, 8-an a fizikát, 7-en a történelmet.

a) Hányan választottak pontosan két tárgyat?

b) A történelem és a fizika emelt szintű érettségét senki sem választotta egyszerre. A csak történelmet választók kétszer annyian vannak, mint akik csak a fizikát választották. Ebben az esetben hányan vannak, akik a matematika mellé a fizikát, illetve a történelmet választották?

9. Az iskolai sportegyesületnek három szakosztálya van (labdarúgó, tájfutó és asztalitenisz), amelyben a 180 tanuló közül 81 sportol. Hány tagja van az egyes szakosztályoknak, ha tudjuk, hogy

1. minden tag legalább két szakosztályba jár;
2. kétszer annyi labdarúgó van, mint amennyi tájfutó;
3. aki tájfutó, az egyúttal asztaliteniszez is;
4. a labdarúgó- és a tájfutószakosztályok együttes taglétszáma megegyezik az asztalitenisz-szakosztály taglétszámával?

10. Az iskolában háromféle sportág közül választhatnak a tanulók: kosárlabda, labdarúgás és asztalitenisz. Ismertek az alábbi igaz állítások:

1. Az asztaliteniszezők közül pontosan azok kosárlabdáznak, akik fociznak is.
2. Nincs olyan focista, aki se nem kosarazik, se nem asztaliteniszez.
3. Akik nem kosaraznak, de asztaliteniszeznek, azok fociznak is.

A fentiek ismeretében döntse el, hogy a következő állítások közül melyek igazak és melyek hamisak!

- a) Minden asztaliteniszező kosárlabdázik és focizik.
 b) Minden labdarúgó asztaliteniszezik.
 c) Van olyan kosárlabdázó, aki asztaliteniszezik.
 d) Van olyan tanuló, aki csak focizik.
11. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat!
 $\{P(x; y) \mid |x| \geq 3; |y| \geq 3; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\}$
12. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat!
 $\{P(x; y) \mid y \leq x^2; |x| \leq 2; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}^+\}$
13. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat!
 $\{P(x; y) \mid 2x^2 - 9 \leq y < x^2; x \in \mathbb{R}; y \in \mathbb{R}\}$
14. Ábrázolja azokat a pontokat a koordináta-rendszerben, amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek!
 $|x| + |y| + |x - y| \leq 2$
15. Bizonyítsa be, hogy két különböző hosszúságú szakasz pontjainak a halmaza azonos számosságú!
16. Bizonyítsa be, hogy az egységsugarú körvonal és az egységoldalú négyzet határvonal-pontjainak a számossága egyenlő!
17. Bizonyítsa be, hogy az x tengely $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ zárt intervallumának és az y tengely $[0; 1]$ zárt intervallumának a számossága egyenlő!
18. Miből van több?
 a) A páros vagy a páratlan természetes számokból.
 b) A π számjegyeiből vagy a páros természetes számokból.
19. Bizonyítsa be, hogy 13 db pozitív egész szám közül ki lehet választani kettőt úgy, hogy a különbségük osztható legyen 12-vel!
20. Bergengóciában a 12 éves Pisti kevesellte a zsebpénzét, és folyamatosan kérte a szüleit, hogy egészítsék azt ki. Az édesapja megelégedte a könyörgést, és a következő ajánlatot tette a fiának: minden reggel megkésztet a pillanatnyilag meglévő pénzét, de abból mindennap neki kell megvennie 40 petáért az uzsonnáját. Pista azonnal ráállt, mert azt gondolta, hogy így egyre több pénze lesz. De már a harmadik napon az uzsonna megvétele után elfogyott a pénze.
 a) Mennyi volt Pisti induló „tőkéje”, ha közben az uzsonnáján kívül másra nem költött?
 b) Legalább mennyi pénzzel kellett volna rendelkeznie ahhoz, hogy az ajánlat kedvező legyen számára?

21. A 100. matematikaórára gondolkodtató játékokat találtak ki a tanulók. Sándor a következő játékot eszelte ki: Három zacskó mogyorót és három zacskó mogyoróhéjat helyezett el három dobozban úgy, hogy mindegyik dobozba két zacskót tett. Minden dobozt felcímkézett a következő feliratokkal:

1. doboz: 2 zacskó mogyoró
2. doboz: 2 zacskó mogyoróhéj
3. doboz: 1 zacskó mogyoró és 1 zacskó mogyoróhéj

Minden felirat hamis, amit el is mondott társainak.

A játékszabály a következő:

Bármelyik dobozból kivehető egy zacskó anélkül, hogy közben a játékos láthatná, hogy mi van még a dobozban, és ennek alapján meg kell mondania, hogy melyik dobozban milyen tartalmú zacskók vannak. Aki eltalálja, megnyerte a három teli zacskó mogyorót.

Milyen módszerrel lehet biztosan eltalálni a dobozok tartalmát?

22. Egy vetélkedőn az ajándék a szobában lévő három ajtó közül az egyik mögött van. Az ajtókon különböző feliratok láthatók.

a) Az első napon a játékos a következőket olvashatta:

1. ajtó: Az ajándék ebben a szobában van.
2. ajtó: Az ajándék nem ebben a szobában van.
3. ajtó: Az ajándék nem az első szobában van.

A játékvezető a játékosal azt is közölte, hogy a feliratok közül legfeljebb egy igaz. Melyik ajtó mögött volt az ajándék?

b) A második napra változtattak a feliratokon, és most a következő feliratokat olvashatta a játékos:

1. ajtó: Az ajándék nem a 2. szobában van.
2. ajtó: Az ajándék nem ebben a szobában van.
3. ajtó: Az ajándék ebben a szobában van.

A játékvezető most azt állította, hogy a feliratok között egyaránt van igaz és hamis. A második napon melyik ajtó mögött volt az ajándék?

23. A következő állítás alapján döntse el, hogy az alább felsorolt öt állítás közül melyik igaz biztosan!

Ha nem rontottam el a dolgozatot, akkor felvesznek az egyetemre.

A: Ha elrontottam a dolgozatot, akkor nem vesznek fel az egyetemre.

B: Ha felvesznek az egyetemre, akkor nem rontottam el a dolgozatot.

C: Ha felvesznek az egyetemre, akkor elrontottam a dolgozatot.

D: Ha nem vesznek fel az egyetemre, akkor elrontottam a dolgozatot.

E: Ha nem vesznek fel az egyetemre, akkor nem rontottam el a dolgozatot.

24. A tanár négy igaz állítást ír a táblára:

1. Aki szeret moziba járni, az nem unatkozik.
2. Aki nem szeret színházba járni, az unatkozik.
3. Aki nem szeret olvasni, az nem szeret színházba járni.
4. Aki szeret színházba járni, az szeret moziba is járni.

Ezek alapján el kell dönteni, hogy milyen ember az, aki szeret moziba járni!

Rita szerint: Unatkozik.

Mónika szerint: Nem szeret olvasni.

Tünde szerint: Szeret olvasni, és nem szeret színházba járni.

Péter szerint: Szeret olvasni.

Bence szerint: Nem szeret színházba járni.

Kinek van igaza és miért?

25. Az internetes kávézóban a számítógépek sorban egymás mellett vannak, mindegyik előtt egy-egy szék áll. A kávézó nyitásakor nem ülnek egyetlen széken sem. A kávézóban az a szabály, hogy ha bejön valaki, és leül egy székre, akkor az egyik szomszédja – ha van neki – feláll, és kimegy. Legfeljebb hányan internetezhetnek egyszerre a kávézóban, ha a tulajdonos

- a) három gépet,
- b) négy gépet,
- c) 15 gépet működtet?
- d) Lehet-e mondani valamit n gép esetén? ($n \in \mathbb{Z}^+$)

26. Egy 615 tanulókból álló iskolában teniszversenyt hirdetnek, amelyen minden tanuló részt vesz. A tanulókból sorsolás útján párokat képeznek (akinek nem jut pár, az automatikusan továbbjut, de jutalmat nem kap). A párok megmérkőznek egymással. A nyertesek jutalmat kapnak, majd őket új párokba sorsolják, és így folytatják mindaddig, amíg végül csak egyetlen győztes marad. Hány jutalmat osztanak ki a verseny során?

27. Az iskolai kosárlabda-bajnokságban a 9. évfolyam öt osztálya indult (A , B , C , D , E). A győzelemért két pont, a döntetlenért egy pont járt. Egyfordulós körmérkőzést játszottak (mindenki mindenkivel egyszer játszott). A végeredmény úgy alakult, hogy mindenkinek különböző pontszáma lett. A C osztály csapata lett a második, és ugyanannyi pontot szerzett, mint az A , a B és a D osztály együtt.

- a) Adja meg a C osztály mérkőzéseinek eredményét!
- b) A fenti feltételek mellett elképzelhető-e olyan végeredmény, hogy az utolsó helyen végzett csapat is elért egy pontot?

28. A földrajzi szertárban áramszünet van. A teljesen sötét szobában a polcon 20 db kő található egyforma dobozokban: 8 db bazalt, 7 db mészkő és 5 db gránit.
- Hány dobozt kell levenni a sötétben ahhoz, hogy közöttük biztosan legyen mindegyik fajtából legalább egy?
 - Legfeljebb hány doboz vehető le úgy, hogy biztosan maradjon mindegyik fajtából legalább egy a polcon?
 - Legfeljebb hány doboz vehető le úgy, hogy az egyik fajtából legalább három, egy másik fajtából legalább kettő biztosan maradjon a polcon?
29. Négy darab egységkockából egy összefüggő testet rakunk ki. Az összefüggő azt jelenti, hogy a szomszédos kockáknak van közös lapjuk.
- Hány különböző ilyen test van?
 - Ezek közül mely típusokból rakható ki egy 4×4 -es kocka?
30. Az egyetemen a fénymásoló gép az előre megadott négyjegyű kódszám beütése után működtethető. Minden dolgozónak más-más kódszáma van. Az egyetemnek legalább hány dolgozója van, ha már biztosan ki van osztva két olyan kódszám, amelyik ugyanarra a két számjegyre végződik?
31. Egy méter sugarú, kör alakú virágtartó belsejébe hét darab tulipánhagymát szeretnénk ültetni úgy, hogy bármely kettő közötti távolság legalább egy méter legyen. Megoldható-e ez? (A tulipánhagymákat pontszerűnek tekintjük.)
32. Egy háromszög alakú zászló minden oldala 11 méter. Öt csillagot kell a belsejébe hímezni úgy, hogy bármely kettő közötti távolság legalább hat méter legyen. Megoldható-e ez? (A csillagokat pontszerűnek tekinthetjük a zászló méreteihez képest.)
33. A dzsúdóedzésen egyszerre 17 sportoló vesz részt. Egy $4 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ -es, négyzet alakú terület áll a rendelkezésükre. A gyakorlatok biztonságos elvégzéséhez a két sportoló egymás közti távolságának legalább 1,5 méternek kell lennie. Megoldható-e ez?
34. Négy, papírból készült sakktáblát az oldalakkal párhuzamosan úgy tolunk össze, hogy a szomszédos táblák egy-egy sort takarjanak egymásból. Bejárhatjuk-e a keletkező nagy sakktáblát egyetlen lóval (lóugrásokkal) úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintsünk, és az utolsó mező lóugrásnyira legyen attól, amelyről indultunk?
35. Kati újrarendezi a könyvespolcát. Az egyik polcra egymás mellé ötven könyvet helyez el. Hányféleképpen rakhatja fel ezeket állítva, ha az ötven darabból a húsz darab verseskönyvét egymás mellé akarja tenni?
36. 2002-ben a labdarúgó-világbajnokságra 32 csapat jutott el. Ezeket 8 db négyes csoportba sorsolták. Egy csoporton belül mindenki játszott mindenkivel. Minden csoportból az első kettő jutott tovább. Ez a 16 csapat egyenes kieséses rendszerben folytatta a küzdelmeket, tehát a vesztes azonnal kiesett.

- a) Hány mérkőzést játszott a győztes?
- b) A csoportküzdelmek során (a legjobb 16 közé jutásig) összesen hány mérkőzést játszottak a csapatok?
- c) A csoportmérkőzések után továbbjutott 16 csapatot hányféleképpen lehetett volna összesorsolni?
37. Az osztálykiránduláson egy öttagú csoportot bíznak meg a reggeli beszerzésével.
- a) Az öt tanulóból hányféleképpen állítható össze az a csoport, amelyik a boltba megy? (A tagok száma egytől ötig bármennyi lehet.)
- b) Az ötből csak hárman mehetnek a boltba. Így hányféle csoport alakítható ki?
- c) Áginál van a pénz, ezért neki feltétlenül a háromtagú csoportban kell lennie. Így hányféle csapat jöhet létre?
38. Valaki az ötös lottón (90 számból 5-öt kell eltalálni) játszik. Az egyik héten kiválasztott a kilencven számból hetet, és azt az összes lehetséges módon megjátszotta.
- a) Hány szelvényre volt szüksége, ha egy szelvényen négy játékot játszhat meg? Szerencsés volt, mert a megjátszott hét számból hármat kihúztak.
- b) Az összes lehetséges húzás hány százalékában fordulhatott ez elő?
- c) Hány kettes és hány hármas találata volt?
39. A bergengóc királyságban csak a következő hat számot ismerik: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ezekből állítják össze a hatjegyű telefonszámokat, amelyek nullával nem kezdődhetnek. Minden telefonszámhoz csak egy telefon tartozik.
- a) Hány telefonszám lehetséges?
- b) Az alattvalóké az összes olyan telefonszám, amelyben legalább egy ismétlődés van. Hány lakosnak lehet telefonja?
- c) A királyé az összes olyan telefonszám, amelyben nincs ismétlődés, és osztható 4-gyel. Hány telefonja van?
40. Bergengóciában csak azokat a számokat tartják szerencsésnek, amelyek ötjegyűek, nem kezdődnek nullával, és az 1-es meg a 2-es számjegyet is tartalmazzák. Hány darab van ezekből?
41. Egy dobozban öt darab különböző színű, de azonos méretű karácsonyfaizzó van. Húzzuk ki egyesével az izzókat mindaddig, amíg a fehér színűt meg nem találjuk. Amit kivettünk, azt már nem tesszük vissza. Hányféle kihúzási sorrend lehetséges?
42. A 7. osztály számháborúzik. Mindenki egy olyan négyjegyű számot választ, amelyben minden számjegy csak egyszer szerepel, és nincs benne a nulla.
- a) Hány ilyen szám van összesen?
- b) Amikor kiderül, hogy milyen sok lehetőség van a számválasztásra, akkor Laci elhatározza, hogy az övé a nagyság szerint sorba rakott számok közül az 1000. helyen álló szám lesz. Melyik szám lett az övé?

43. A szekrényben két fiók van. Ezekbe színes pólókat rakunk. Az egyikbe négy, a másikba hat darab jut. A tíz póló között öt piros, három kék és két sárga van. Hányféleképpen rakható a tíz póló a két fiókba? (A fiókokon belüli sorrend nem lényeges.)
44. Anna, Bella, Cili és Dóra között hat egyforma csokoládét osztunk szét. Hányféleképpen lehet a csokit kiosztani, hogy mindenki legalább egyet kapjon?
45. A totón 13 focimérkőzés eredményét kell eltalálni úgy, hogy az 1-es, az x vagy a 2-es közül az egyiket kell beírni a két csapat neve mellé attól függően, hogy az első csapat nyer, döntetlent ér el vagy veszít. Az egyik héten az egyik fogadó úgy gondolja, hogy a 13 mérkőzésből 9 eredményét biztosan tudja. Legalább hány tipposzlopot kell kitöltenie ahhoz, hogy a maradék négy mérkőzésből biztosan eltaláljon hármat?
46. Bergengóciában a villamosjegyen 16 lyukasztási hely van négyzetalakban elrendezve. Csak akkor érvényes a jegy, ha azon nyolc lyuk van úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba két-két lyuk került. Hányféle, az ellenőrök által is elfogadható jegy lehetséges?
47. Egy vizsgálat során különböző családokból származó négy ikerpárt csoportokba osztanak be. A fő szempont az, hogy az egy családból származó ikrek ne kerüljenek egy csoportba.
- Ha négy darab, kéttagú csoportot létesítünk, akkor hányféle csoportbeosztás lehet?
 - Ha három csoportot akarunk kialakítani, ahol mindegyikben legalább ketten vannak, akkor ez hányféleképpen lehetséges?
48. Amikor a személyi számot bevezették az 1900. január 1. és 1999. december 31. között születettek számára, akkor a szám első hét számjegye a következőkből állt össze:
- az első számjegy 1, ha férfi; 2, ha nő az illető;
 - a következő két számjegy a születési év utolsó két számjegye;
 - a következő két számjegy a születési hónap sorszáma, például május esetén 05;
 - a következő két számjegy a születési napot jelöli, például 03-án született valaki.
- Hányféle személyi szám lehetséges az így létrejött hétjegyű számból?
- Mivel ez nem volt alkalmas arra, hogy az országban mindenkinek különböző legyen a személyi száma, ezért egy további négy számjegyből álló számsorral kiegészítették, ezáltal 11 jegyű szám jött létre.
- Így hány személyi szám lehetséges, ha feltesszük, hogy az utolsó 4 számjegyet tetszőlegesen lehet kiválasztani?
 - Van-e olyan személy, akinek a 11 jegyű személyi számának első négy számjegye a négyjegyű születési évszámát adja?

49. Hat különböző színű festék van.

- a) Hányféleképpen festhető ki ezekkel egy kocka, ha minden lapját különböző színűre szeretnénk festeni? (Két kocka színezését akkor tekintjük különbözőnek, ha forgatással nem lehet egyiket a másikkal azonos helyzetbe hozni.)
- b) Tudjuk, hogy a szabályos dobókockán a szemközti lapon lévő pöttyök összege hét. Hányféle különböző dobókocka létezik? (Két dobókockát különbözőnek tekintünk, ha forgatással nem lehet egyiket a másikkal azonos helyzetbe hozni.)
- c) Hányféle különböző dobókocka létezhet, ha annak mind a hat oldalát a fenti hat különböző színnel befestjük?

50. Hányféleképpen lehet a cirkuszban két oroszlánt, három zebrát és négy elefántot úgy állítani sorba, hogy oroszlán és zebra ne kerüljön egymás mellé? (Az azonos típusú állatokat nem különböztetjük meg.)

51. Hányféle kör alakú karkötő készíthető öt egyforma zöld, hat egyforma piros és hét egyforma sárga gyöngyből, ha mindegyiket felhasználják? (A mozgatással egymásba átvihető eseteket azonosaknak tekintjük.)

52. Az ékszerésznek henger alakú, kocka alakú és gömb formájú drágakövei vannak, amelyekből fülbevalót készít. (Az azonos formájúak teljesen egyformák.) Egy-egy fülbevalóhoz három darab drágakőre van szüksége. Hányféleképpen tudja e három darabot kiválasztani, ha a kiválasztás sorrendje nem számít?

53. Egy körhintán 12 szék helyezkedik el egymás mögött. Hányféleképpen ülhet fel erre

- a) hat pár (hat férfi és hat nő), ha a párok egymás mögött akarnak ülni;
 - b) hat férfi és hat nő, ha két férfi vagy két nő nem ülhet egymás mögött?
- A forgatással egymásba átvihető eseteket azonosaknak tekintjük.

54. A pingpongversenyen öt ázsiai és tíz európai versenyző indult. Mindenki mindenkivel játszott. Az ázsiaiak $\frac{4}{3}$ -szor annyi mérkőzést nyertek, mint az európaiak. Hány európai győzelem volt?

55. A veranda ablakát színesre festik. Az ablak függőleges és vízszintes lécekkel 16 kisebb, egybevágó, négyzet alakú részre van osztva. Ha négy különböző színt használnak, akkor hányféleképpen színezhető ki az ablak, ha minden sorban és minden oszlopban mindegyik szín előfordul?

56. Bizonyítsa be, hogy pozitív páros n esetén:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{n-1}!$$

57. Fejezze ki a $p = x + \frac{1}{x}$ paraméter segítségével az alábbi kifejezéseket ($x \neq 0$)!

a) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

b) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

c) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

d) $x^6 + \frac{1}{x^6}$

58. Egy régióban a tömegközlekedést vonattal és busszal oldják meg. Ha két település között nincs vonatközlekedés, akkor busszal lehet egyikből a másikba eljutni és fordítva, ha nincs buszjárat, akkor pedig vonattal. Bizonyítsa be, hogy vagy csak vonattal, vagy csak busszal az összes település bejárható!

59. Az ország 19 nagyobb városát távközlési kábelekkal akarják összekötni. Bármely két város között maximum egy kábel épülhet. Mennyi az a minimális kábelszám, amelynél már bármelyik két város között kapcsolat létesíthető a kábelen (nem feltétlenül közvetlen módon)?

60. 2003 db számítógépet akarnak egy rendszerbe kötni úgy, hogy mindegyik pontosan öt másikkal legyen összekötve.

Megoldható-e ez a feladat? Ha igen, akkor hány kapcsolat jön így létre? Ha nem, akkor mi lenne a megvalósítás feltétele?

61. Az ország 19 nagyobb városát távközlési kábelekkal akarják összekötni. Bármely két város között legfeljebb egy kábel épülhet. 154 kábelt már kiépítettek. Biztos-e az, hogy már használható a kábel bármely két város között (akár egy harmadik városon keresztül)?

62. A matematika szakkörön a tanár megkéri a gyerekeket, hogy minden gyerek két másik tanulóval cseréljen telefonszámot, hogy hiányzás esetén legyen kitől érdeklődniük. Az alábbiakat tudjuk:

1. a szakkörön hat tanuló van (A, B, C, D, E, F);
2. nincs olyan tanuló, aki E és F telefonszámát is tudná;
3. nincs olyan tanuló, aki E és C telefonszámát is tudná;
4. van egy valaki, aki D és B telefonszámát is tudja;
5. D tudja vagy B , vagy E , vagy mindkettőjük számát.

Megállapítható-e ezek alapján biztosan az, hogy ki kinek a telefonszámát tudja?

63. Egy többfordulós bajnokságban minden fordulóban mindenki játszik egy másik csapattal. Összesen 12 csapat van. A 11 forduló alatt mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszik. Az ötödik forduló befejezéséig, a rossz idő miatt, összesen egy mérkőzés maradt el. Bizonyítsa be, hogy az ötödik forduló után még biztosan van három olyan csapat, amelyik közül egyik sem játszott a másikkal!

64. A Dunántúlon öt nagy várost (Sopron, Szombathely, Zalaegerszeg, Veszprém és Győr) négy buszjáratral akarnak összekötni úgy, hogy bármelyik városból bármelyik városba el lehessen jutni. Hányféle megoldás lehetséges?

65. A vakond a föld alatt az egyes élelmiszerraktárai között öt utat épített magának úgy, hogy bármelyik élelmiszerraktárból bármelyikbe eljuthat járatokon keresztül. Nagyon takarékosan építkezett, ezért akármelyik raktárból is indul, bármelyik másikba csak egyféleképpen juthat el.

a) Hány élelmiszer-lerakóhelye lehet?

b) Rajzolja le a lehetséges járatokat arra az esetre, ha a raktárakat nem különböztetjük meg egymástól! Hány különböző járatrendszer (nem izomorf gráf) keletkezik?

66. Egy vakond a föld alatt három komfortos lakást épít magának, ám az éléskamrákat a lakásoktól messzebb helyezi el. Minden lakáshoz tartozik egy éléskamra, s mindegyikből bármelyik éléskamrába közvetlen úton is eljuthat.

a) Igazolja, hogy legfeljebb egy éléskamra érintésével bármelyik lakásból bármelyik lakásba el lehet jutni!

b) Bejárhatja-e a vakond a járatait úgy, hogy mindegyiken pontosan egyszer halad át?

c) Vakondunk térképet készít magának. Lehet-e olyat rajzolni, hogy a járatok a térképen ne messék egymást! Ha igen, rajzolja le!

67. Oldja meg a következő problémát, és szemléltesse az eredményt egy gráf segítségével!

András, Béla és Csongor feleségei Márta, Enikő és Fanni, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Mindegyik házaspárnak van egy-egy gyermeke, őket Gábornak, Hedvignek és Istvánnak hívják.

Állapítsa meg a következő információk alapján, hogy kik tartoznak egy családba!

1. Csongor és Enikő gyerekei az iskolai fiú focicsapat erősségei.

2. András fiát nem Istvánnak hívják.

3. Béla feleségét nem Fanninak hívják.

68. Ismeretes, hogy a szénatom négy vegyértékű (minden C csúcs negyedfokú), és minden hidrogénatom egy vegyértékű (minden H csúcs elsőfokú).

a) Hány szerkezeti izomerje (változata) van a C_4H_{10} (bután) molekulának?

b) Vizsgálja meg ugyanezt a kérdést a C_6H_{14} molekula esetén!

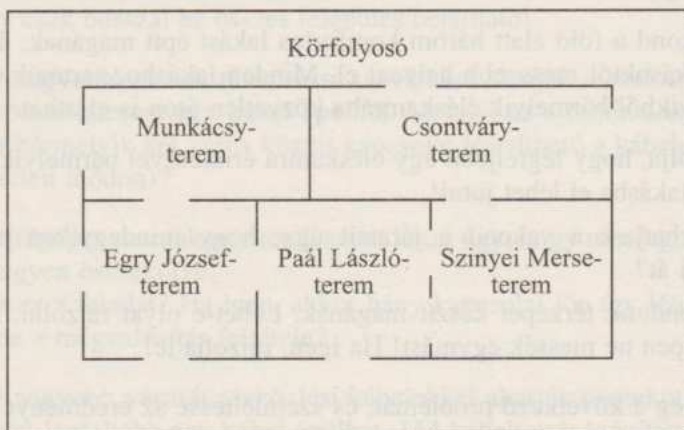
69. Egy héttagú társaságban mindenkit megkérdezve, hogy hány jelenlevőt ismer (önmagát nem számolva), az alábbi számokat kapjuk: 3, 5, 6, 2, 5, 3, 4. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

a) Rajzolja le ennek a társaságnak legalább egy lehetséges ismeretségi gráfját!

b) Hány különböző, a feltételeknek eleget tevő gráf rajzolható?

70. A képtár éjszakai biztonsági őrének úgy kell végigjárnia az ábrán látható múzeum zárásakor a termeket, hogy minden ajtót, amelyiken áthaladt, azonnal be is kell zárnia. Csak a legutolsó ajtó esetén tesz kivételt: az utolsó ajtót csak bezárja, azon nem halad át.

- Rajzoljon fel egy olyan gráfot, amelyben a pontokat az egyes termek és a folyosó jelentik, az élek pedig az ajtókat helyettesítik!
- Melyik ajtótól kell elindulnia, hogy minden ajtót bezárjon, ugyanott ne haladjon el kétszer, és végül a folyosón fejezze be körútját?



71. Jelölje egy nagyváros hat városrészét A, B, C, D, E és F betűkkel. A városrészek közötti közvetlen összeköttetések költségeit az alábbi táblázat tartalmazza (millió euróban). Hogyan építsünk ki egy helyi gyorsvasúthálózatot a hat városrész között, ha szeretnénk az összköltséget minimalizálni?

	A	B	C	D	E	F
A	0	27	19,5	31	18,2	24
B	27	0	15,7	36	22	23,4
C	19,5	15,7	0	26,7	30,5	21,6
D	31	36	26,7	0	14,7	15,5
E	18,2	22	30,5	14,7	0	12,5
F	24	23,4	21,6	15,5	12,5	0

72. Hat szomszédos állam fővárosa között közvetlen légi járatokat terveznek. Két légitársaság működtetné az összes vonalat.

- Lehetséges-e olyan beosztás, amelyben a két légitársaság által működtetett járatok szemléltetésére rajzolt két gráf azonos (izomorf)?
- Vajon négy, illetve öt főváros esetén mi a helyzet?

2. ALGEBRA, SZÁMELMÉLET

73. Egy orgonasíp hangjának első felső oktávja (az a hang, ami 8 hanggal feljebb szól) fele olyan hosszú sípon hangzik, mint az adott orgonasíp, a második felső oktávhoz negyedakkora síp tartozik.

Ha az orgonasíp hossza 90 cm hosszú, akkor:

- mekkora a negyedik felső oktávhoz tartozó síp hossza?
 - mekkora az első alsó oktávhoz tartozó síp hossza?
 - egy másik hanghoz tartozó 26 cm-es és 2 m-es síp hangja között hány teljes oktáv van?
74. Írja át a következő (kettes számrendszerben megadott) számot 16-os számrendszerbe!

11 100 111₂

Legyen a 10-es számjegy A , a 11-es számjegy B , a 12-es számjegy C , a 13-as számjegy D , a 14-es számjegy E és a 15-ös számjegy F .

75. Írja át a következő 16-os számrendszerben megadott számot kettes számrendszerbe! A -val jelöltük a 10-es számjegyet, B -vel a 11-es számjegyet, C -vel a 12-es számjegyet, D -vel a 13-as számjegyet, E -vel a 14-es számjegyet, F -fel pedig a 15-ös számjegyet.

2E7A₁₆

76. Döntse el számológép használata nélkül, melyik szám a nagyobb!

a) 5^{200} vagy 2^{500}

b) 101^{20} vagy $10\,101^{10}$

c) $\lg^2 15$ vagy $\lg 22$

77. Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}$$

78. Hány számjegyet tartalmaz a 2^{1000} -en szám?

79. 2003-ban egy tv-riporter a népszerű színésznőtől az életkorát szeretne meg tudni, de ő természetesen nem árulta el. Ekkor a riporter cselhez folyamodott, és megkérte a színésznőt, hogy legalább a következő egyszerű számítást végezze el fejben.

Vegye a cipőméretét, szorozza meg 2-vel, adjon hozzá 40-et, szorozza meg 50-nel, adjon hozzá 3-at, vonja ki a születési évét. Ekkor kap egy négyjegyű számot.

A riporter így megtudta a színésznő életkorát, sőt a lábméretét is, ugyanis az első két számjegy a cipőmérete, az utolsó két számjegy az életkora lesz.

Mutassa meg, hogy miért jó ez az eljárás!

80. Narancslevet akarunk készíteni.

- Hány százalékos narancslevet kapunk, ha összekeverünk 1,5 liter 12,5%-os és 1 liter 100%-os gyümölcstartalmú narancslevet?
- Ha 34,5%-os narancslevet akarunk készíteni, akkor hány liter 100%-os narancslevet kell hozzáöntenünk a 1,5 liter 12,5%-os narancsléhez?

81. Az iskola tanulóinak 9%-a sportol: a fiúknak 15%-a, a lányoknak az 5%-a. Az iskolában összesen 800 gyerek tanul. Hány fiú és hány lány jár az iskolába?

82. Egy ruhaüzlet tulajdonosa gyakran változtatja a ruhák árát, attól függően, hogy az adott időszakban milyen az egyes modellek iránti kereslet.

- A szezon elején az egyik ruhamodell nagyon fogyott, ezért az árát megnövelte 15%-kal, majd a szezon vége felé, a kereslet esésével a megnövelt árát 15%-kal csökkentette. Az eredeti árnak hány százaléka lett a ruha ára a második árváltozás után?
- Egy másik modell esetében kétszer is növelte az árát, először 10%-kal, majd a megnövelt árát még 20%-kal. A kétszeres áremelkedést követően melyik esetben lesz magasabb a modell ára? Akkor-e, ha a megadott sorrendben történik az áremelés, vagy ha a 20%-ot követi a 10%-os áremelés?

83. A cipőbolt vezetője a szezon végén egy cipő nettó árát 10%-kal csökkenti, majd a bruttó árát úgy képezi, hogy a csökkentett nettó árhoz hozzáadja a 25%-os áfát (általános forgalmi adót).

- Mikor jár jobban a vevő? Akkor-e, ha az üzlet vezetője előbb a nettó árát csökkenti, s a csökkentett ár áfáját adja az árhoz, vagy ha először képezi a nettó árból az áfát, és az áfával növelt árát csökkenti 10%-kal? Miért?
- Vajon az állam szempontjából melyik a kedvezőbb (az áfa az állam bevétele)?

84. Az induló vállalkozás az első éves eredményei után tervet készít a következő évekre, hogy a befektetései biztosan megtérüljenek. Azt várja, hogy a következő öt évben évente átlagosan 10%-kal növekszik a bevétele, de az első évre csak 6%, a második évre pedig 8% növekedést tervez. A következő három évre egyenletes növekedést vár. Ezekben az években hány százalékkal kell növelnie a bevételét, ha teljesíteni akarja az árbevételi terveit?

85. A gépgyártással foglalkozó vállalkozás 25%-kal akarja emelni a termelését. Ehhez növelni szeretné a termelékenységet (egységnyi idő alatt egy alkalmazott által készített gépek száma) és a vállalkozásban dolgozó alkalmazottak számát egyaránt úgy, hogy a termelékenység négyszer akkora százalékkal növekedjen, mint az alkalmazottak száma. Hány százalékra kell emelni a dolgozók létszámát? (Tegyük fel, hogy a termelés mennyisége mástól nem függ.)
86. Panni ősszel leszedte a kertből az almát meg a körtét, majd kiválogatta, és ládákba tette télire. Összesen 323 gyümölcs került a ládákba. Néhány hét múlva átvizsgálta, és azt tapasztalta, hogy az alma egy része megrohadt, ezért azokat ki kellett dobni. Így az alma p százalékkal, a gyümölcsök száma $\frac{p}{17}$ százalékkal csökkent. Hány körte van a ládákban?
87. Gábor a 300 méter hosszú peronon állt, és várta a vonatát. A pályaudvaron ezalatt egy gyorsvonat haladt át egyenletes sebességgel. Gábor megmérte, hogy az egész szerelvény 24 másodperc alatt haladt el előtte. Éppen 54 másodperc telt el attól a pillanattól kezdve, amikor a mozdony eleje elérte a peron egyik végét addig, amíg az utolsó kocsis elhagyta a peron másik végét.
- a) Milyen hosszú a vonat?
- b) Mekkora sebességgel haladt át a szerelvény a pályaudvaron?
88. Az egymástól 280 km-es távolságra levő A és B városból egyszerre indul egymással szembe egy-egy kerékpáros. Az A -ból induló a találkozásuk után 3,2 óra múlva ér B -be, a B -ből induló kerékpáros pedig a találkozás után 5 óra múlva ér A -ba.
- a) Határozza meg a kerékpárosok találkozásáig eltelt időt!
- b) Határozza meg a találkozásig megtett utak arányát!
89. János és Attila egyszerre indul ugyanarról a helyről. Azonos úton egy irányban és állandó sebességgel haladnak. János kerékpárral közlekedik $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel, Attila pedig autóval, valamivel gyorsabban. Attila hány másodperc múlva lesz a kiindulóponttól kétszer akkora távolságra, mint János?
90. Egy kerékpáros A -ból B -be, majd pihenő nélkül B -ből A -ba kerékpározott. Az utat oda-vissza két óra alatt tette meg. A -ból az út első fele sík volt, itt $20 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel hajtott. Majd egy emelkedő szakaszhoz érve lecsökkent a sebessége $15 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ -ra. Végül, mielőtt B -be érkezett volna, az utolsó szakasz lejtős volt, ezen $30 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel tudott haladni. Mekkora a távolság A és B között? (Visszafelé is $15 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ sebességgel haladt az emelkedőn, $20 \frac{\text{km}}{\text{óra}}$ -val a síkon és 30 km-t tett meg óránként a lejtőn.)

91. A kerékpárverseny célszalagja előtt 20 km-rel jelzett ponton Tamás négy perccel előbb ér át, mint versenytársa, Ödön. Az utolsó útszakaszon azonban megfordul a sorrend, és a célt Ödön már hat perccel előbb éri el, mint Tamás.
- A cél előtt hány kilométerrel előzi meg Ödön Tamást, ha feltételezzük, hogy a fenti szakaszon állandó sebességgel haladnak?
 - Mennyivel nagyobb Ödön sebessége ezen a szakaszon, ha Tamás sebességmérője $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -t mutatott?
 - Ha Ödön legfeljebb $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val tud haladni ezen a szakaszon, akkor legfeljebb mennyi Tamás sebessége?
92. Kovács úrnak három találata volt a lottón. Úgy döntött, hogy a nyereményt a gyerekeinek adja. Az első gyerek kapott 100 Ft-ot és a maradék pénz $\frac{1}{10}$ részét, a második gyerek kapott 200 Ft-ot és a maradék pénz $\frac{1}{10}$ részét, a harmadik gyerek kapott 300 Ft-ot és a maradék pénz $\frac{1}{10}$ részét és így tovább. Miután ilyen módon szétosztotta a pénzét, kiderült, hogy minden gyereke ugyanannyi pénzt kapott. Hány gyereke volt Kovács úrnak?
93. Sára és Kata egy közvélemény-kutató cégnél kérdőíves felmérést vállalt. Ha mindketten dolgoznak, akkor együtt 12 nap alatt végeznek a munkával. Ha Sára egyedül elvégzi a munka felét, majd Kata a másik felét, akkor a munkát 25 nap alatt fejeznék be. Hány nap alatt végezné el a munkát egyedül Sára, illetve Kata?
94. Három legelőn mindig egyforma gazdagon és gyorsan nő a fű. Az egyik mező területe $3\frac{1}{3}$ hektár. A másiké 10 hektár, a harmadiké 24 hektár. Az első 12 szarvasmarha négy hét alatt legeli le, a másikat 21 szarvasmarha kilenc hét alatt. Hány szarvasmarha tudja lelegelni a harmadik legelő fűvét 18 hét alatt?
95. A tóparti strandon három fagyaltárus, Anna, Bea és Cili árulja a fagyit. Egy gombóc súlya 5 dkg, ára 50 Ft. Egyik nap az átlagos árbevételük 35 000 Ft volt.
- Hány kg fagyit árult Anna, ha Beának 26 250 Ft, Cilinek pedig 36 750 Ft bevétele volt aznap?
A cukrászda tulajdonosa ösztönözni szeretné őket, ezért előre megígéri, hogy azon a napon, amelyiken több, mint 100 kg fagyit adnak el, 3000 Ft prémiumot oszt szét közöttük.
 - Mutassa meg, hogy a fenti napon kaptak prémiumot! Ki mennyit kapott, ha előre megállapodtak abban, hogy a prémiumot az eladás mértéke szerint osztják szét?

96. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x^3 - 6x^2 + 12x + 19 = 0$$

97. Oldja meg az $x^4 - x^2 - 2x = 1$ egyenletet a valós számok halmazán!

98. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán!

$$4x^4 - 12x^2y + 10y^2 + 5 = 0$$

99. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{7 + \sqrt{x+3}} + \sqrt{4 - \sqrt{x+3}} = 1 + \sqrt{10}$$

100. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-2} = 0$

b) $\sqrt{x^2+3x-10} + \sqrt{x-2} = 0$

c) $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} = x$

101. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x+2} + \sqrt{6-x} = \sqrt{20-2x}$

b) $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x} = x-10$

c) $(x-5)\sqrt{2-x} = 0$

102. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} = 7$

*b) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2$

103. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $-\sqrt{-x} = 2|2x+2|$

b) $\sqrt{-x-4} + 2 = 0$

c) $|3x+6| + 2 = -\sqrt{-2-x} + 2$

104. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\left| \frac{|x|-1}{3|x|+2} \right| = 6$

b) $|x-4| + |5x-20| + |2x+3| = 51$

105. Oldja meg grafikusan az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\frac{3}{x+5} - 2 = x^2 + 4x + 3$

b) $||x - 2| - 5| = 1$

c) $||x| - 3| - 2| = 4$

106. Egy hajó és a kapitánya most együtt hetvenévesek. A hajó most kétszer annyi idős, mint a kapitány volt akkor, amikor a hajó annyi idős volt, mint a kapitány most. Hány éves a kapitány?

107. A p paraméter mely értékeinél lesz legalább egy pozitív gyöke az

$$x^2 + 2(p - 3)x + 42 - p = 0 \text{ egyenletnek a valós számok halmazán?}$$

108. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!

a) $5x + p + 8 = p(x + 2)$

b) $|x - p| = |x - 6|$

109. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!

a) $p^2 - 6px - p + 3 = -9x$

b) $p^2x - p - 3 = 3px$

110. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter!

$$\frac{8 + 2x}{p^2 + 5p} = \frac{1}{p} + \frac{x}{5 + p}$$

111. Adott a következő valós számokon értelmezett egyenlet!

$$x^2 + (2 - 4p)x + 4p^2 = 1$$

a) Mely p valós paraméterek esetén lesz az egyenletnek két valós gyöke?

b) Mennyi az egyenlet gyökeinek négyzetösszege?

112. Mekkora az alábbi valós számokon értelmezett egyenlet gyökei különbségének abszolútértéke?

$$x^2 + 2(1 - p^2)x + p^4 = 2p^2 + 8$$

113. Két kőműves együtt 12 nap alatt húzza fel egy ház falát. Egyikük 8 nap után beteg lett, így 12 nap alatt a falnak csak 80%-a készült el. Hány nap alatt készülne el a fal felhúzásával a két kőműves külön-külön?

114. Egy vállalkozó a kirakodóvásárra szalmajátékokat készít. Háromszáz szalmabábut rendeltek tőle, és a vállalkozó kiszámolta, hogy egyenletes napi teljesítménnyel éppen időre készül el. Váratlanul azonban nyolc nappal előbbre hozták a vásár időpontját, így naponta a tervezettnél 10-zel többet kellett elkészítenie. A vállalkozónak eredetileg hány napja lett volna a munka elvégzésére?

115. Két 11. osztály színházba ment ugyanazon a hétvégén. Az egyik osztály 31 250 Ft-ot fizetett a jegyekért. A másik osztályból 3-mal kevesebben mentek színházba, de ők 30 Ft-tal fizettek többet egy jegyért, így összesen 28 160 Ft-ba került a jegyük. Hány jegyet vettek az egyes osztályok és darabonként milyen áron? (A jegyek helytől függetlenül azonos árban voltak.)

116. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$x^2 + 2y + z = 5$$

$$3x + 2z - y = -7$$

$$x^2 + y - z = 12$$

117. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$x + y + z = -2$$

$$xy + z = -3$$

$$3xyz = 6$$

118. Adja meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait!

$$a) \frac{4}{|x+3|} > \left| \frac{-2}{2x+1} \right|$$

$$b) |x+1| + |3-x| > 2+x$$

119. Adja meg a következő egyenlőtlenségek valós megoldásait!

$$a) \sqrt{x^2 - 5x - 24} > 5 - \frac{1}{2}x$$

$$b) \frac{|x+5| - |x|}{15 - x^2 - 2x} \geq 0$$

120. Oldja meg x -re a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket, ahol p valós paraméter!

$$a) 6p + x \geq 7\sqrt{px}$$

$$b) (p+3)\sqrt{5-x} - 2 < 0$$

121. Ábrázolja a sík azon $P(x; y)$ pontjainak halmazát, amely pontokra:

$$\frac{6 - 2|x| + y}{9 - y + x^2} \geq 0$$

122. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2 \cdot 49^{x+1} = 4459 \cdot 7^{x-1} + 343$$

123. Oldja meg a $\frac{3^{(x+1)^2}}{3^{(x-1)^2}} = 9^{x^2}$ egyenletet a valós számok halmazán!

124. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 \log_x 2 + \log_{2x} 2 + 2 \log_{4x} 2 = 0$$

125. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_2 \sqrt{2x^2 + 3x + 2} - \log_2 \sqrt{1 + x - x^2} = 1$$

126. Oldja meg a következő egyenletet!

$$\sqrt{\sin^2 x - 4 \sin x + 4} + \sqrt{\sin^2 x + 4 \sin x + 4} = \sqrt{\sin^2 x - 6 \sin x + 9}$$

127. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$6 \sin x - 8 \cos x = 5$$

128. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$4 \sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5$$

129. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^{4-\log_5 x} - \frac{1}{5^5} = 4 \sin \pi \cdot \cos 2\pi + 5 \cdot \operatorname{tg} \pi - \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2}$$

130. Oldja meg a következő egyenletet!

$$(49^{\log_{\sqrt{7}} 5})^{\frac{1}{2}} \cdot (\operatorname{tg} x + 1) = 25(1 - \operatorname{tg} x)$$

131. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\sqrt{\log_2(x^2 + 7x + 13)} \geq 0$$

132. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\lg \sqrt{x^2 - 5x} - \lg \sqrt{5 - x} \geq 0$$

133. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$2^{3+\log_2 24} > 3 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$$

134. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$(2x^2 - 11x - 13) \log_3 \log_{\frac{1}{3}}(3^x - 9^x) \leq 0$$

135. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\lg(x + y) = 2 \lg y$$

$$\lg y = \lg 2 + \lg(x - 1)$$

136. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\log_5 xy = 2$$

$$\log_{\frac{1}{5}} \frac{x}{y} = 1$$

137. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\log_2 x + \log_4 y = 1,5$$

$$\log_9 x - \log_3 y = 1,5$$

138. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$y^{x^2 - 7x + 12} = 1$$

$$\log_2(x + 1 - y) = 1$$

139. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$2^{y-x} + 4^{y-x} = 20$$

$$9^x - 3^y = 54$$

140. Oldja meg a következő egyenletet a valós számpárok halmazán!

$$\sin(x + y) + \cos(x - 2y) = 2$$

141. Egy számítógép doboza téglatest alakú. Oldaléleinek összege 480 cm. Egyik éle 20 cm. Hogyan kell megválasztani a többi élet, hogy a doboz térfogata a lehető legnagyobb legyen?

142. Egy 9000 m² területű, téglalap alakú telket be szeretne keríteni a gazdája. 360 000 Ft-já van erre a célra. A telek két, szemközti oldalát magas betonaljzattal kell ellátni a szomszédok kívánságára, a másik két oldal az olcsóbb kerítéssel elkészíthető. Elég lesz-e a tulajdonos pénze, ha a betonaljzattal ellátott oldal kerítésének 1500 Ft métere, az olcsóbb pedig méterenként 600 Ft-ba kerül?

143. Egy hosszú parasztház oldalához Náncsi néni tyűkretrecet épít úgy, hogy a ketrec egyik oldalát a ház oldala adja. Az elkerített rész téglalap alakú lesz, és a ház oldala mellé nem kerül kerítés. Legfeljebb mekkora területű lehet a tyűkok számára elkerített rész, ha Náncsi néni 20 m kerítésanyagot vett? Ekkor milyen hosszúak a ketrec oldalai?

144. Az iskola diákönkormányzata pénzt nyert egy pályázaton, amelyből elkeríthetnek az iskola táborában egy téglalap alakú gyakorló (nem feltétlenül szabványméretű) focipályát. A pénzből 120 méternyi kerítéshez tudnak anyagot vásárolni. Úgy döntenek, hogy az utca felőli kapu mögé a többi oldalhoz képest kétszeres magasságú kerítést készítenek, hogy az abba az irányba lőtt labdák után ne kelljen gyakran kiszaladgálni az útra. Ezt úgy érik el, hogy ezen az oldalon egymás fölé két kerítést helyeznek. Hogyan válasszák meg a pálya méreteit ahhoz, hogy a fenti feltételek mellett maximális területű pályát tudjanak építeni?

145. Bizonyítsa be, hogy

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ és } x + y \in \mathbb{R}^+ \text{ esetén } x + y \leq 2!$$

146. Bizonyítsa be, hogy

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ és } a + b = 1 \text{ esetén } a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}!$$

147. Bizonyítsa be, hogy

$$x, y > 0 \text{ és } x + y = 2 \text{ esetén } \left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{y}\right) \geq 9!$$

148. Bizonyítsa be, hogy a, b és c nemnegatív számokra fennáll a következő egyenlőtlenség!

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + c^2} \geq \sqrt{2} \cdot (a + b + c)$$

149. Milyen p valós paraméter esetén nincs megoldása az alábbi egyenlőtlenségnek?

$$x^2 + (p - 2)x + 5 - p > 0$$

150. Határozza meg a következő két egyenlőtlenség közös megoldásait a valós számok halmazán!

$$3x + 5 > 3 - \frac{4x - 19}{7}$$

$$|x + 3| \leq 8$$

151. Határozza meg a következő két egyenlőtlenség közös megoldásait a valós számok halmazán!

$$2 - 9x \geq \frac{5x + 14}{3}$$

$$1 - 2x < \frac{1 + x}{3} + 2x$$

152. A p valós paraméter mely értékénél lehet a $3x^2 + px - 15$ polinomból kiemelni $(x - 1)$ -et?

153. Egy állandó sebességgel haladó tehervonat 14 óra 30 perckor halad át az A falu vasútállomásán. A 45 kocsiból álló szerelvény hossza 500 méter. A kocsik között van egy 10 méter és három 12 méter hosszú zárt kocsi, a többi nyitott. Egy 35 méter magasan ívelő 1,5 km hosszú hídon a vonat áthaladása pontosan 4 percre tart (az idő mérését akkor kezdjük, amikor vonat eleje eléri a hidat, és addig tart, amíg az utolsó kocsi vége is elhagyja a híd másik végét). A híd után emelkedő szakasz következik, amelynek emelkedési szöge 5° . A vonat eleje 15 óra 30 perckor éri el a híd végétől 6,5 km távolságra levő teherpályaudvart.

a) Hány perc telik el attól kezdve, hogy a vonat utolsó kocsija is elhagyja a hidat addig, amíg a mozdony eleje eléri a pályaudvart?

b) Sorolja fel azokat az adatokat, amelyek nem szükségesek az a) kérdésre adott válaszhoz!

c) Becsülje meg a két pályaudvar távolságát! Ehhez mely adatok kellenek?

154. A nagycsaládos nagymama év elején úgy döntött, hogy az év közben elkészítendő születésnapi tortákhoz számokat ábrázoló gyertyákat vásárol. Mivel a rokonai között igen sok különböző korú személy található, ezért úgy válogatott, hogy a megvásárolt gyertyák segítségével az egyéves unokájától kezdve a legidősebb fia életkoráig minden életkor előállítható legyen (a tortán szokásos módon, egy- vagy kétjegyű szám segítségével). (A születésnapi ünnepség után a gyertyákat az ünnepelt megkapja emlékebe.) A nagymama összesen 1500 Ft-ot fizetett. A számgyertyák mindegyike (0-tól 9-ig) 20 Ft-ba kerül. Hány éves a nagymama legidősebb fia?

155. A gép két fogaskereke közötti áttétel $3 : 2$ (az áttétel alatt a fordulatszámuk arányát értjük). A gépet át kell alakítani úgy, hogy az áttétel $2 : 1$ legyen. Ezt úgy érhetjük el, hogy az egyik kerék helyére négygyel több, a másik kerék helyére négygyel kevesebb fogú kereket teszünk. Hány fogú lehetett az eredeti két kerék?

156. Egy $ABCD$ téglalap alakú biliárdasztal A csúcsából ellökünk egy golyót a szögfelező irányába. A golyó addig mozog, amíg az asztal valamelyik csúcsába nem jut (közben az asztal falainak ütközve pattog). Hányszor ütközött a mozgás során, és melyik csúcsba érkezik, ha az asztal oldalainak aránya

a) $AB : BC = 8 : 7$

b) $AB : BC = 9 : 8$

*c) $AB : BC = (n + 1) : n$

157. Egy régi római épületen körben fríz futott. (A fríz olyan épületdíszítő elem, amely a falak homlokzatának felső részén csíkban helyezkedik el.) A díszítőminták ötméterenként ismétlődnek. A fríz 90%-a sajnos elpusztult, s csak kis darabokban maradt épen néhány részlete. Szerencsére a megmaradt darabokból a régészek pontosan kétszer ki tudták rakni a teljes mintát.

a) Hány méter maradt fenn a frízből?

b) Eredetileg milyen hosszú volt a fríz?

c) Milyen hosszú az épület belsejében futó fríz, ha az épület téglalap alakú és a falvastagság egy méter?

158. A gyerekek az An-tan-ténusz kezdetű kiszámolós mondókéval választják ki, hogy ki legyen a hunyó.

I. A 17. rámutatásra kapják meg a hunyót.

a) Ha négyen játszanak, lehet-e előre tudni, hogy ki lesz a hunyó? (Tudható-e már a kiszámolás elkezdése előtt?)

b) Hányan lehetnek a gyerekek, ha a kiszámolással jobbra haladnak, és az lesz a hunyó, aki annak a gyereknek a jobb szomszédja, akivel a kiszámolást elkezdték?

c) Most úgy játszanak, hogy akire jut a mondóka vége, az kiesik, majd újrakezdi a kiszámolást. Aladáron kezdték a kiszámolást, s az első és a második körben is (amikor már eggyel kevesebben voltak) Aladár jobb szomszédja esett ki. Hányan voltak, ha mindig jobbra haladtak?

d) Aladáron kezdték a kiszámolást, s az első és a harmadik körben is (amikor már kettővel kevesebben voltak) Aladár jobb szomszédja esett ki. Hányan voltak, ha mindig jobbra haladtak?

II. A gyerekek hamar rájöttek, hogy ki az, akivel érdemes kezdeni a mondókát, ezért egy idő után váltottak. Úgy döntöttek, hogy a versikét többször elmondva választják ki a hunyót. Ebben az esetben a 65. rámutatásra kapják meg a hunyót. Válaszoljon így is az I. pontban feltett kérdésekre!

159. Valaki 64 db 8×8 -as sakktáblát helyez egymás mellé egy sorban. Végigsétál a sakktáblák előtt, és mindegyikre ráhelyez egy bábut. Majd újra végigsétál, és minden második táblára rak egy bábut. A harmadik alkalommal minden harmadik táblára tesz egy-egy bábut és így tovább, egészen addig, amíg a 64. alkalommal a 64. táblára nem tesz egy bábut.

a) Melyik táblán lesz így a legtöbb bábu?

b) Lesz-e olyan tábla, amelyiken a bábuk száma hét?

160. Bizonyítsa be, hogy a következő (7-es számrendszerbeli) szám osztható hattal!

45 351₇

161. Bizonyítsa be, hogy a hat páratlan hatványainál eggyel nagyobb szám mindig osztható héttel!

162. Melyik az a legkisebb, kettesekből és ötösökből álló szám, amelyben a számjegyek összege és maga a szám is osztható kettővel és hárommal, és legalább egy ötös számjegy is szerepel benne?

163. Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek egyenlőek a számjegyeik összegének 45-szörösével?

164. Igazolja, hogy ha n öttel osztható természetes szám, akkor $n + 1$ és $\frac{n}{5}$ relatív prímek!

165. Mely állítás igaz és mely hamis az alábbi állítások közül?

a) Létezik két prímszám, amelyek összege 2003.

b) Ha 1990 három prímszám összege, akkor e három prímszám egyike a 2.

c) Ha három prímszám összege 1732, akkor azok szorzata 1 464 697.

*d) Létezik olyan prímszám, amely után pontosan 12 összetett szám következik.

166. Az iskolában tartott kirakodóvásár után megmaradt ötven ajándék. Az osztályfőnök ezeket a tárgyakat a vásárban legtöbbet dolgozó hét gyereknek szánja. El tudja-e osztani köztük úgy, hogy mindegyik gyereknek páratlan számú ajándék jusson? (Nem feltétlenül akar mindegyiküknek azonos számú ajándékot adni, de minden ajándékot ki akar osztani.)

167. Lehet-e egyszerre egész a következő két szám?

$$\frac{n+1}{21} \quad \text{és} \quad \frac{n+8}{33}, \quad \text{ha } n \in \mathbb{N}$$

168. Határozza meg $17^{91} + 83^{91}$ utolsó két számjegyét!

169. Egy hatjegyű szám utolsó három számjegyét a szám elejére írva az eredeti számnak a hatszorosát kapjuk. Melyik ez a szám?

170. a) Öt egész szám összege 2002. Végződhet-e 5-re az öt szám szorzataként előállított szám?

b) Két csoportba oszthatók-e az 1, 2, 3, ..., 2002 számok úgy, hogy mindkét csoportban páratlan legyen a számok összege?

171. Az önkormányzat úgy döntött, hogy felparcellázás után egy téglalap alakú, régóta kihasználatlan mezőgazdasági területet lakóövezetté nyilvánít. A parcellázást a mérnökök a tervrajzon vízszintes és függőleges vonalakkal jelölték. Összesen kilenc vonalat húztak az adott tervrajzban. Kaphattak-e ezzel a módszerrel páratlan számú földdarabot? (A vonalakat a tervrajz teljes szélességében és teljes hosszában húzzák.)

172. Egy általános iskola alsó tagozatán két-két párhuzamos osztály (1/a, 1/b, 2/a, ..., 4/a, 4/b) van. Egyik nap ezekben az osztályokban a következő létszámmal jelentek meg a tanulók: 22, 33, 25, 28, 28, 20, 30, 29. Az egyik osztály fogászatra ment. Így az iskolában maradt alsós tanulók között ekkor pontosan kétszer annyi lány volt, mint fiú. A fogászaton lévő osztályban ötöl több volt a fiú, mint a lány. Összesen hány alsós fiú és hány alsós lány jelent meg reggel az iskolában?

173. A matematikatanár két csoportra osztotta az osztály tanulóit, és a következő házi feladatot adta nekik.

Az I. csoport feladata: készítsenek papírból négy kockát úgy, hogy az egyes kockák élhosszúságának mértékszáma az egymás után következő négy természetes szám legyen, és a három kisebb kocka térfogatösszege egyezzen meg a legnagyobb kocka térfogatával.

A II. csoport feladata ugyanez volt, de öt kockát kellett készíteniük, tehát az egyes kockák élhosszúságának mértékszáma az egymás után következő öt természetes szám legyen, és a négy kisebb kocka térfogatösszege egyezzen meg a legnagyobb kocka térfogatával.

Másnapra az I. csoport tanulói közül többen is jól oldották meg a feladatot, de kiderült, hogy a kockák éleinek mértékszáma a jó megoldók között azonos volt. Többen azzal gyanúsították őket, hogy együtt dolgoztak, ám a tanár megvédte őket.

A II. csoport tanulói közül azonban senkinek sem sikerült helyesen megoldani a feladatot.

Értelmezze az eredményeket a következő kérdések alapján!

a) Milyen élhosszúságú kockákat készítettek az I. csoport helyes megoldói?

b) Milyen matematikai érveléssel védte meg őket a tanár?

c) Indokolja matematikai érvekkel, miért nem lehetett helyes megoldás a II. csoportban!

174. Mely pozitív egész x -ekre igaz az alábbi egyenlet?

$$x^3 - 12x^2 + 17x + 30 = 0$$

175. Mutassa meg, hogy az alábbi egyenletek nem oldhatók meg a pozitív egész számok körében!

a) $2x^2 - 12y = 34$

b) $ab(a + b) - 2003 = 0$

c) $a^2 + b^2 + a + b = 2001$

176. Mutassa meg, hogy az alábbi egyenletek nem oldhatók meg a pozitív egész számok körében!

a) $2000^x + 2001^y = 2002^z$

b) $x^3y - xy^5 = 2005$

177. Oldja meg a következő egyenletet a pozitív egész számpárok körében!

$$x^2 + y^2 = 4x - 6y - 15$$

178. Oldja meg a következő egyenleteket az egész számok körében!

a) $xy - 5 = x + y$

b) $xy + x + y = 34$

179. Az egyik iskolában a 11. osztályos tanulók létszáma 97. Az iskola tanulói megyei sportversenyre készülnek, de 6 tanuló beteg, ezért nem versenyezhet. A versenyen, a kiírás feltételei szerint öt- és hétfős csapatok indulhatnak. Hány ötfős és hány hétfős csapatot nevezzen az évfolyam, ha a testnevelő tanár mindenkit indítani akar, aki sportolhat? (Egy tanuló csak egy csapatnak lehet a tagja.)

180. A csokoládégyár a közelben működő óvodának mikuláscsomagokat állít össze. Összesen 93 db csokoládét szánt a csomagokba, de a válogatás során kiderült, hogy 6 db selejtes. Kétféle csomagot készítenek, az egyik fajtába 5, a másikba 9 db csokoládét tesznek. Hány 5 és hány 9 csokoládéből álló csomagot készítenek, ha mindegyik (nem selejtes) csokoládét fel akarják használni a csomagok összeállításakor?

181. Julcsi gyöngyöt fűz piros és sárga gyöngyökből. Nem tudja pontosan, hány gyöngyszeme van, csak azt, hogy a gyöngyök száma 40 és 50 között van. Ha egy piros gyöngy mellé mindig eggyel kevesebb sárgát fűz, mint a piros gyöngyök száma, akkor ezzel a módszerrel éppen elfogynak a gyöngyök, és a minta is teljes lesz (az utolsó piros gyöngy után is lesz még megfelelő számú sárga gyöngy). Hány gyöngye van Julcsinak, és ebből mennyi a sárga gyöngyök száma?

182. Hányféle módon lehet felbontani 384-et két pozitív egész szám összegére úgy, hogy az egyik szám 10-zel, a másik pedig 17-tel legyen osztható?

183. Egy családi gazdaságban libákat, nyulakat és birkákat vágtak le eladásra egy hétvégén. A megrendelő a libák és nyulak fejét és lábait külön csomagolva kérte, mert ezeket más piacra szánta. Hány libát, nyulát és birkát vágtak le ezen a hétvégén, ha tudjuk hogy:

1. a libafejek és -lábak száma, valamint a nyúlfejek és -lábak száma együttesen éppen száz darab;

2. a libák fele tojó;

3. a libák és a nyulak számának összege együttesen háromszor annyi, mint a birkák száma?

184. Egy nagymama a három unokájának úgy akar szétosztani 300 Ft-ot, hogy a legnagyobbikuk, csupa csillogó ötforintost, a két kicsi pedig egyforma számú (értékben nem feltétlenül megegyező) csillogó egy- és kétforintost kapjon. A nagymamának ugyanannyi egyforintosa, mint kétforintosa van. Hogyan oszthatja szét a pénzt, ha azt akarja, hogy a kicsik kapjanak látszólag (darabszámban) több pénzt?

185. Egy sertéstelepen 41 ólba egyenletesen helyezük el az állatokat úgy, hogy minden ólban ugyanannyi disznó legyen. Meszelés alkalmával 14 ólat fel kellett szabadítani, s közben egy állatot le is kellett vágni. Így az úraosztásnál több, de minden ólba ugyanannyi sertés jutott. Hány állat volt eredetileg egy ólban, ha a telepen legfeljebb ezer disznó tartását engedélyezi az ÁNTSZ?

186. A p egész paraméter mely értékeire lesznek egész számok az alábbi egyenlet gyökei?

a) $\frac{3}{5-x} = p - 1$

b) $3(x-p) = \frac{5x-2}{3} + 2$

c) $(1-p)x^2 - 8x + 3px + 15 = 0$

187. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a természetes számhármassok körében!

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$2x + 2y + 2z = xy$$

3. FÜGGVÉNYEK, AZ ANALÍZIS ELEMEI

Megállapodás szerint a fejezetben mindenütt, ahol nincsen feltüntetve a függvények értelmezési tartománya, azt a legbővebb halmazt tekintjük értelmezési tartománynak, amelyen az adott kifejezés értelmezve van.

188. Határozza meg az alábbi kifejezések lehető legbővebb értelmezési tartományát!

a) $\frac{\sqrt{10-x}}{3-\sqrt{x}}$

b) $\sqrt{\lg(x^2 - 7x + 7)}$

c) $\frac{\operatorname{tg} x}{\lg \cos x}$

d) $\frac{\sqrt{25-x^2}}{\lg \cos x}$

189. Határozza meg a megadott kifejezések lehető legbővebb értelmezési tartományát, majd a kapott halmazokon értelmezve a függvényeket, adja meg az értékkészletüket!

a) $\sqrt{9x^2 - 6x + 4}; \quad f(x) = \sqrt{9x^2 - 6x + 4}$

b) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{-x}}; \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{-x}}$

c) $(\sqrt{x-2})^2; \quad f(x) = (\sqrt{x-2})^2$

d) $\frac{9^x - 9}{3^x - 3}; \quad f(x) = \frac{9^x - 9}{3^x - 3}$

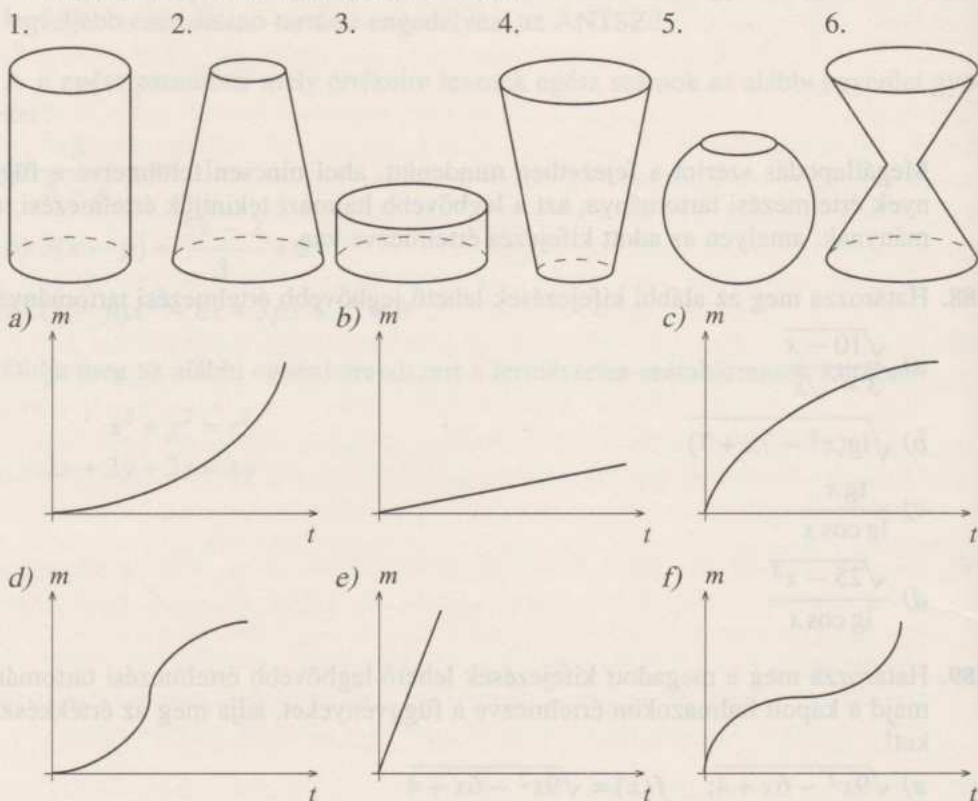
190. Határozza meg az alábbi függvény értékkészletét! Ábrázolja a függvény grafikonját!

$$f: \left(\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \right) \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto \frac{5x - 3,5}{2x + 1}$$

191. Különböző edényeket töltenek meg folyadékkal. A töltés minden esetben ugyanazon a csövön keresztül történik. Az időegység alatt kifolyó víz mennyisége állandó. A grafikonok az egyes edényekben levő folyadékok m magasságát ábrázolják az eltelt t idő függvényében.

A folyadékszint magasságának növekedési üteme az edény keresztmetszetétől függ: minél nagyobb a keresztmetszet, annál lassabban emelkedik a folyadék szintje.

Párosítsa össze az ábrákat a grafikonokkal!



192. Egy baktériumtenyészetben a t időpontban jelen levő baktériumok számát jelöljük $P(t)$ -vel (t a megfigyelés kezdetétől eltelt időt jelenti órában mérve). A baktériumok száma t időpontban a $P(t) = B \cdot e^{\frac{t}{k}}$ összefüggéssel írható le, ahol B , k és e konstans. Az e szám értéke közelítőleg 2,71. A megfigyelés kezdetén 3000 baktérium volt a tenyészetben, 8 órával később pedig már 9000.

Állapítsa meg, hogy a mérés kezdetétől számított 24 óra múlva hány baktérium lesz a tenyészetben?

193. Egy baktériumtenyészetben 2 óra elteltével 400 baktérium, 6 óra elteltével már 25 600 baktérium van. A baktériumok számát az $N = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$ összefüggés írja le, ahol t a megfigyelés kezdetétől eltelt idő órában mérve, N_0 a baktériumok száma a megfigyelés kezdetén, λ és e állandó, $e \approx 2,71$.

a) Hány baktérium volt a tenyészetben a megfigyelés kezdetén?

b) Mennyi idő alatt kétszereződött meg a baktériumok száma a kezdeti állapothoz képest?

194. Egy radioaktív anyag bomlását az alábbi összefüggés adja meg:

$$R(t) = R_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{n}},$$

ahol R_0 a megfigyelés kezdetén meglevő anyagmennyiség, $R(t)$ a t idő elteltével megmaradó anyagmennyiség, t a bomlás kezdetétől eltelt idő, napokban mérve, n pedig az úgynevezett felezési idő, ugyancsak napokban mérve. (Felezési időnek azt az időtartamot nevezzük, ami alatt az adott számú radioaktív atom fele elbomlik.) Egy ismeretlen radioaktív anyagnál megfigyelték, hogy 20 nap alatt az eredeti anyagmennyiség 15%-a bomlott el.

Ennek az anyagnak mennyi a felezési ideje?

195. Egy radioaktív anyag felezési ideje 5600 év. Az anyag bomlását az alábbi összefüggés adja meg: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, ahol $e \approx 2,71$, N_0 a megfigyelés kezdetén meglevő anyagmennyiség, $N(t)$ a t idő elteltével megmaradó anyagmennyiség, t a bomlás kezdetétől eltelt idő években mérve.

a) Határozza meg λ értékét!

b) Hány évvel ezelőtt kezdődött el a bomlási folyamat, ha eddig a kezdeti anyagmennyiség 40%-a bomlott el?

196. Az anyagok különböző hőmérsékleten különböző hosszúságúak. A $T = 0^\circ\text{C}$ -on $l_0 = 1$ m hosszú vasrúd l hosszát adja meg a következő összefüggés a különböző T hőmérsékleteken:

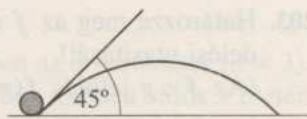
$$l = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T),$$

ahol α az anyagra jellemző lineáris hőtágulási együttható. Ez a vas esetében:

$$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}.$$

Ábrázolja megfelelő beosztású koordináta-rendszerben -50°C és 100°C között a vasrúd hosszát a hőmérséklet függvényében!

197. Egy focimérkőzésen a földről 45° -os szögben elrúgott labda 20 m magasra emelkedett. Az elrúgás helyétől milyen messzire esett le a labda? (Feltételezzük, hogy a labda parabolapályán mozgott.)



198. Egy fenyőfa növekedését 20 éven keresztül figyelték. Mérték az eltelt éveket és a fa magasságát. Az adatokat táblázatban rögzítették, s utána megpróbáltak egy függvényt illeszteni az összetartozó értékpárokat ábrázoló pontokra. Mutassa meg, hogy az alábbi függvények közül csak az a)-val jelzett lehet olyan, ami a fa növekedését megközelítőleg leírja!

a) $x \mapsto 13 - \frac{1}{x}$

b) $x \mapsto 13 + \frac{1}{x}$

c) $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 10x^2 + 5$

199. Egy kis város lakossága számának alakulását t év múlva az alábbi összefüggés szerint becsülik meg:

$$N = 20\,000 + \frac{10\,000}{(t+2)^2}, \text{ ahol } N \text{ a lakosság száma, } t \text{ az évek száma.}$$

Vizsgálja meg a $t \mapsto 20\,000 + \frac{10\,000}{(t+2)^2}$ függvényt, és ábrázolja vázlatosan a lakosság számának alakulását az idő függvényében!

Mit mondhatunk a lakosság számának változásáról a fenti összefüggés alapján, ha hosszú távú előrejelzést szeretnénk tenni?

200. Döntse el, hogy létezik-e az alábbi függvényeknek inverze, s ha létezik, akkor adja meg az inverz függvény értelmezési tartományát és hozzárendelési utasítását!

a) $f: [-2; 3] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x + 2$

b) $g: [2; 5] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$

c) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto |x|$

d) $k: (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x+2}{x+1}$

e) $n: (0; 100] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \lg x$

201. Adja meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvény hozzárendelési utasítását!

(Az $f \circ g$ jelölés $f(g(x))$ -et jelent.)

a) $f: x \mapsto 8x$ és $g: x \mapsto 8+x$

b) $f: x \mapsto 2x^2 + 3$ és $g: x \mapsto 1 - 3x$

202. Írja fel az $f \circ g$ összetett függvény hozzárendelési szabályát!

(Az $f \circ g$ jelölés $f(g(x))$ -et jelent.)

a) $f(x) = |x|$ és $g(x) = x^2$

b) $f(x) = \lg x$ és $g(x) = x - 3$

203. Határozza meg az $f \circ g$ függvény értelmezési tartományát, adja meg a hozzárendelési utasítását!

(Az $f \circ g$ jelölés $f(g(x))$ -et jelent.)

$$f: x \mapsto \sqrt{9-x} \text{ és } g: x \mapsto x^3 + 1$$

204. Adott az alábbi két függvény:

$$f: x \mapsto x^2 \text{ és } g: x \mapsto \sin x.$$

Képezze az $f \circ g$, illetve $g \circ f$ függvényeket! (Az $f \circ g$ jelölés $f(g(x))$ -et jelent.) Adja meg a hozzárendelési utasításokat, az egyes függvények értelmezési tartományát és értékkészletét!

Ábrázolja vázlatosan az $f \circ g$ függvényt!

205. Adja meg egy olyan f és egy olyan g függvény hozzárendelési utasítását, amelyre teljesül, hogy $h = f \circ g$! (Az $f \circ g$ jelölés $f(g(x))$ -et jelent.)

a) $h: x \mapsto (3x+1)^4$

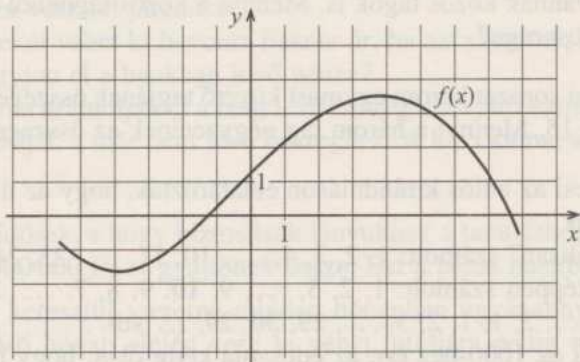
b) $h: x \mapsto \sqrt{x^2-2}$

c) $h: x \mapsto \frac{1}{x^2-2}$

d) $h: x \mapsto (x^3-1)^2$

e) $h: x \mapsto |5x^2-3|$

206. Adott egy függvény grafikonja: $f(x)$.



Vázolja az alábbi függvények grafikonját! Határozza meg az egyes függvények zérushelyeit!

a) $f(x+1)$

b) $f(-x)$

c) $|f(x)|$

d) $f(|x|)$

207. Az a paraméter mely értékei esetén illeszkednek egy egyenesre az alábbi függvény grafikonjának pontjai?

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 6}{x - a}$$

208. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto -x^2 + bx + c$ függvénynek maximuma van az $x = 3$ helyen, és a maximum értéke -5 . Mekkora a b és a c értéke?

209. Az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto (a-3)x^2 + 2(a-3)x + 3$ függvényben az a paraméter ($a \neq 3$). Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy a függvény minden valós x esetén csak pozitív értéket vegyen fel!

210. Vázolja az alábbi függvények grafikonját!

a) $x \mapsto 5[x]$, ahol $[x]$ az x egészrészét jelöli

b) $x \mapsto 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

c) $x \mapsto \frac{x^2 - 3x}{x^3 - 3x^2} + 1$

d) $x \mapsto [2x]$

e) $x \mapsto \frac{1}{2}|2x+3| + 1$

A fenti függvények közül melyik korlátos alulról, melyik korlátos felülről, illetve melyik korlátos?

211. Egy számtani sorozat differenciája 1,5. A sorozat első n tagjának összege 365, az első $2n$ tagjának összege 1330. Mekkora az n értéke, és mi az első tag?
212. Egy pozitív egészekből álló rendezett számnégyesről a következőket tudjuk: az első három szám egy számtani, a második három egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A két szélső szám összege 28, a két középsőé 24. Határozza meg a feltételeknek eleget tevő négy számot!
213. Adott két számtani sorozat, az egyik 17, 21, 25, ..., a másik 16, 21, 26, ... A két sorozatban vannak közös tagok is. Mennyi a közös tagokból álló sorozat első száz tagjának az összege?
214. Egy számtani sorozat három egymást követő tagjának összege 3, a három tag köbének összege 15. Mennyi a három tag négyzetének az összege?
215. Pisti és Karcsi az autós kiránduláson elhatározták, hogy az út menti telefonpóznákat számolják.
 Pisti „normálisan” számolt: 1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, ..., 23, 24, ...
 Karcsi másképpen számolt: 1, 2, 3, ..., 9, **10**, 9, 8, 7, ..., 2, 1, 1, 2, 3, ..., 19, **20**, 19, 18, ..., 2, 1, 1, 2, 3, ..., 29, **30**, 29, ... stb.
 Amikor Pisti az 1000-hez ért, az édesapja kérte őket, hogy hagyják abba. Milyen számnál tartott ekkor Karcsi (feltételezve, hogy egyik fiú sem tévesztett számolás közben)?
216. Az „Örökzöld” faiskolában 7000 fenyőfa van. Évente kivágják a meglevő állomány 12%-át, de ugyanakkor 600 új fenyőt is ültetnek. A főkertész úgy látja, hogy ez egy jó gondolat, és így soha nem fog el a készletük. A kertészet könyvelője viszont aggódik, szerinte ebből előbb-utóbb probléma lesz, és elfogynak a fenyők. Kinek van igaza?
217. Négy szám közül az első három egy mértani sorozatnak, az utolsó három egy számtani sorozatnak az egymást követő tagjai. Az első és a negyedik szám összege 21, a második és a harmadik szám összege pedig 18. Határozza meg a négy számot!
218. Egy icipici hangya elindul a koordináta-rendszer középpontjából, és 1 egységnyi halad pozitív irányba az x tengely mentén. Ekkor balra fordul, és az előző távolság felét teszi meg, majd újra balra fordul, és újból az utolsónak megtett távolság felével halad előre.
- Határozza meg ekkor a hangya koordinátáit!
 - Ha a hangya a fentieknek megfelelően mozog, hol lesz a tizedik útszakasz végén?
 - Ha a hangya a fentieknek megfelelően mozog a „végtelenségig”, akkor hová, azaz milyen koordinátájú pontba fog „érkezni”?
219. Kovács úr autót szeretne vásárolni, ezért takarékoskodik. Minden év elején betesz a bankba egy ugyanakkora összeget. A bank egyéves lekötés esetén 10% kamatot ad.

Legalább mekkora volt az évente betett összeg, ha a 6. év végén (amikor már a 6. kamatot is tőkésítették) már meg tudott venni egy 3 100 000 Ft-os autót? A választ ezer forintokban adja meg!

220. Fekete úr élete során, amíg aktív dolgozó volt, keresetéből az önkéntes nyugdijpénztárba is befizetett, hogy majd nyugdíjasként használja fel a megtakarítását. Nyugdíjba menetelekor 2 000 000 Ft-ja van a bankban. Ezt a pénzt továbbra is a bankban hagyja, s leköti évi 6%-os kamatra. Minden hónapban egy ugyanakkora összeget akar kivenni. Tegyük fel, hogy december 31-én ment nyugdíjba, és először február 1-jén vesz fel járadékot.

Mekkora összegeket vehet ki havonta Fekete úr, ha azt szeretné, hogy a harmincadik év végén fogyjon el a bankban levő pénze?

A bankban havonta számolják el a bent levő összeg után járó kamatot, s ezt minden hónapban hozzáadják a már bent levő összeghez. A havi kamat az éves kamat 12-ed része.

221. Kati szülei már idősek, s hogy biztosítsák lányuknak a tanuláshoz szükséges anyagiakat, eddig 1 000 000 Ft-ot gyűjtöttek össze. Ezt a pénzt bankban helyezték el.

a) Kati öt éven keresztül szeretne minden hónapban ugyanannyi pénzt felvenni. Először az első hónap elején vesz ki pénzt, utoljára pedig majd a 60. hónap elején.

Havi lekötés esetén a bank évi 6%-nyi kamatot ad, ami havi $\frac{6}{12}\%$ -nak vehető.

A bank a kamatot havonta tőkésíti.

Kati mekkora összegeket vehet fel havonta?

b) Kati főiskolára jelentkezett, ami háromévi tanulást jelent. Tudja, hogy a pénz egy részét érdemes tartósan lekötni, legalább egy évre. Azt találja ki, hogy az egymillió forintból 350 000 Ft-ot havi lekötésre (évi 6%-os kamatozású); 350 000 Ft-ot egyéves lekötésre, ami évente 10%-ot kamatozik, majd egy év után havi lekötésre (6% kamat); 300 000 Ft-ot pedig kétéves lekötésre, ami 10%-ot kamatozik évente, majd két év után havi lekötésre (6% kamat) teszi be. Először az első hónap elején vesz ki pénzt.

Mennyit vehet fel így havonta az 1., 2., illetve a 3. évben, ha az egyes években a havonta felvett összegek továbbra is egyenlők.

222. Fazekas úr 42 éves, és elgondolkodik a jövőjéről. Most jól keres, de húsz év múlva nyugdíjba megy, és szeretne valami biztos kiegészítő jövedelmet is a nyugdíj mellé. Ezért elhatározza, hogy minden évben bizonyos összeget félretesz. Legalább egy évre szóló tartós lekötés esetén a bank 9% kamatot ad. Fazekas úr optimista, úgy tervezi, hogy százéves koráig fog élni.

a) Mekkora összeget tegyen be évente, ha később, húsz év múlva, havi 20 000 Ft-ot akar majd kivenni. Számoljon úgy, mint ha mindig év elején egy összegben tenné be a pénzt, és egy összegben is venné fel később.

b) Fazekas úr arra gondol, hogy jobban jár, ha nem egy összegben teszi be a pénzt, hanem minden hónapban, így ugyanis kamatozik a pénze. Fazekas úr olyan

életbiztosítást köt, amelynél a biztosító a korábban betett összeget mindig meg-
növeli a havi betéttel, minden hónap végén kiszámolja a kamatot, és tőkésíti.

A biztosító évi 3% kamatot ad. (A havi kamat az éves kamatnak $\frac{1}{12}$ -ed része.)

Valóban jobban jár így Fazekas úr?

223. Kis úr elhatározza, hogy bankba teszi a pénzét, de még nem döntötte el, hogy
melyik bankot választja. Az A bankban évi 10% kamatot ígérnek úgy, hogy havi
 $\frac{10}{12}\%$ kamatot adnak, és a növekményt minden hónap végén az alaptőkéhez adják.
A B bankban az évi kamatláb 10,5%, a kamatot mindig az év végén adják a tőké-
hez.

a) Mutassa meg, hogy nincs lényeges különbség a két bank ajánlata között, ha öt
évre köti le a pénzét!

b) Mennyi idő alatt duplázódna meg Kis úr pénze a B bankban?

224. Tekintsük a következő kifejezést: $\frac{1}{4-x^2}$!

a) Határozza meg azt a legbővebb halmazt, amelyen a kifejezés értelmezhető!

b) Mi az $x \mapsto \frac{1}{4-x^2}$ függvény értékkészlete?

c) Vázolja a függvény grafikonját!

d) Válassza ki az igaz állításokat a fenti függvényre vonatkozóan!

1. A függvény mindenütt szigorúan monoton növekszik.

2. A függvény korlátos.

3. A függvény páros.

4. A függvénynek az $x = 2$ helyen van határértéke.

5. A függvénynek van zérushelye.

6. A függvénynek $x = 0$ helyen van határértéke.

225. Deriválja az alábbi függvényeket!

a) $x \mapsto 2x^4 - 3x^3 + 5x$

b) $x \mapsto x(x+2)^2(x-2)^2$

c) $x \mapsto (x-3)^3$

d) $x \mapsto 2 \sin x \cos x$

e) $x \mapsto \frac{3x - x^2}{3x^2 - 27}$

f) $x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$

g) $x \mapsto \sqrt{x\sqrt{x}}$

226. Határozza meg az $y = x^2$ parabola $P_0(1; y_0)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét!

227. Van-e az $y = 1,5x^2 - 2x^3$ egyenletű görbének az $y = -3x + 2$ egyenletű egyenesrel párhuzamos érintője?

228. Írja fel az $y = x \cdot \cos x$ egyenletű görbe érintőjét a $P_0(\frac{\pi}{2}; y_0)$ pontban!

229. Mi lehet annak az egyenesnek az egyenlete, amely az $y = x^4 - 2x^2$ egyenletű görbét a görbe 8 ordinátájú pontjában érinti?

230. Írja fel az $y = x^4 - x^3$ görbének az x tengelyre illeszkedő pontjaiban húzott érintők egyenletét!

231. Adott a következő két függvény:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \cos x \quad \text{és} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \sin x$$

Írja fel az $f + g$ függvény érintőjét a $\frac{\pi}{4}$ abszcisszájú pontjában!

232. Van-e az $y = x^3 - x^2 - 3x$ egyenletű görbének az $y = -\frac{1}{2}x + 10$ egyenletű egyenesre merőleges érintője? Ha van ilyen, akkor adja meg az érintő egyenletét!

233. Írja fel az $y = 3x^3 + 2x^2 + 4$ egyenletű görbének az egyik olyan érintőjét, amelynek 5 az irántangense!

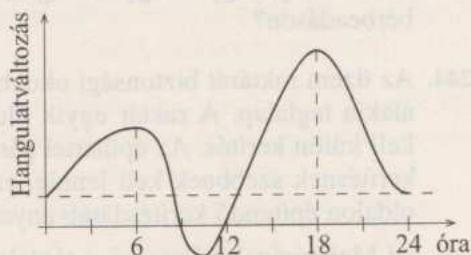
234. Határozza meg az $5x^2 - 2x - y = 4$ egyenletű görbe -1 ordinátájú pontjaiban húzott érintőinek egyenletét!

235. Határozza meg az $y = x + \frac{1}{x}$ egyenletű görbe x tengellyel párhuzamos érintőinek egyenletét!

236. Írja fel az $y = \frac{x}{1-x}$ egyenletű görbének a $4x + y + 4 = 0$ egyenletű egyenesre merőleges érintőjét!

237. Egy kérést szeretnének előterjeszteni, de ehhez meg kellene tudni, hogy mikor van a legpozitívabb hangulatban az, akitől kérnének.

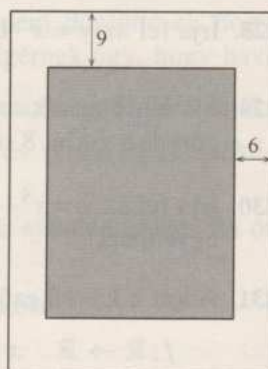
Az illető hangulatváltozását (f') mutatja az alábbi grafikon egy 24 órás periódusban, s ez jellemző minden napjára. Délután 5 órától este 8 óráig a családja körében van, este 10 és reggel 6 óra között alszik. Ilyenkor nem szabad őt zavarni. Mikor érdemes felkeresni az illetőt a kéréssel?



238. Tegyük fel, hogy egy függőlegesen felhajított labda földtől való távolságát a következő összefüggés adja meg: $s = -4,9t^2 + 14,7t$, ahol t a hajítás ideje másodpercben mérve, s pedig az út méterben mérve.

- a) Hány másodperc múlva éri el a labda a maximális magasságot?
b) Mennyi ez a maximális magasság?

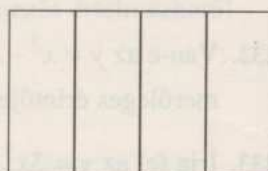
239. A téglalap alakú plakáton 600 cm^2 felületre akarnak nyomtatni. A plakát tetején és alján 9 cm , a két oldalán 6 cm széles margót hagynak. Milyenek legyenek a plakát méretei, ha a legkevesebb anyagot akarják felhasználni?



240. A tartályokat gyártó cég felül nyitott, téglatest alakú tartályokat tervez. A tartály alaplappja négyzet, térfogata pedig 4 m^3 .

Milyenek legyenek a tartály méretei, ha a legkevesebb anyagot akarják felhasználni a gyártáshoz?

241. A baromfiudvar tulajdonosa 1000 m^2 -es téglalap alakú területet akar elkeríteni különböző házi szárnyasok számára. Az így kapott udvart négy egyenlő területre szeretné osztani három kerítéssel az ábrán látható módon. Legalább milyen hosszú kerítés szükséges a terv megvalósításához?



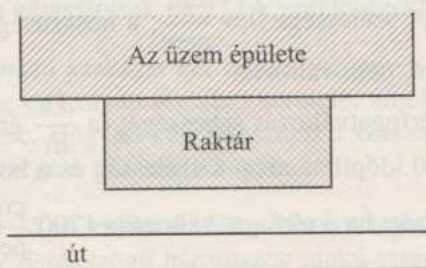
242. Egy erdőben kis állatkert létesítését tervezik. Ehhez a patak mentén szeretnének bekeríteni egy téglalap alakú földterületet. A téglalap egyik oldala a patak lenne, itt nem lesz kerítés. A patakkel párhuzamos oldalon építendő kerítés költsége (mivel itt földmunka is szükséges) 4000 Ft/m , a másik két oldalon 3000 Ft/m . Milyenek legyenek a téglalap méretei, hogyha a kerítésre $1\,200\,000 \text{ Ft}$ -ot szánnak, és a lehető legnagyobb területet akarják elkeríteni a fenti feltételek mellett?

243. Az ingatlanügynökség kiskertes lakásokat épít. Elkészül száz lakás, és valamennyit bérbe adnak. (A százlakásos egységen belül mindegyik bérleti díj azonos.) Azt tapasztalják, hogy ha a bérleti díj havi $160\,000 \text{ Ft}$, akkor minden lakásra jelentkezik bérlő. Ha a bérleti díjat megemelik 5000 Ft -tal, akkor két lakás már üresen marad, és minden 5000 Ft -nyi emelés újabb két üres lakást „eredményez”. Mennyi legyen a bérleti díj, hogy az ügynökség havi bevétele maximális legyen ezen a százlakásos bérbeadáson?

244. Az üzem raktárát biztonsági okokból be kell keríteni. A raktár területe $10\,800 \text{ m}^2$, alakja téglalap. A raktár egyik oldala az üzemépülethez csatlakozik, így itt nem kell külön kerítés. Az épülettel párhuzamosan halad egy autópálya, ezen az oldalon a kerítésnek szebbnek kell lennie, ezért az anyagköltsége 3000 Ft/m . A másik két oldalon építendő kerítésdarab anyagköltsége 2000 Ft/m .

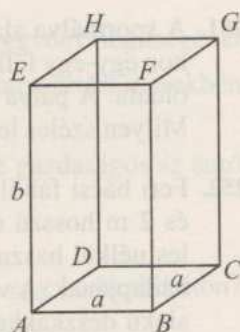
- a) Mekkora legyen a téglalap oldalait, hogy a kerítés a legolcsóbb legyen?

b) Mennyi a minimális költség?



245. Egy kábeltelevíziós társaságnál jelenleg 3500 előfizető van, az évi előfizetési díj 25 000 Ft. A legutóbbi felmérésük szerint minden egyes 1000 Ft-os díjcsökkentés háromszáz új előfizetőt hozhat. Mennyi legyen az új előfizetési díj, hogy a társaság bevétele maximális legyen?

246. Egy cég, amelyik pánccs szekrényeket (széféket) gyárt, egy új típust fejleszt ki. A pánccs szekrények formája téglatest, de speciális alakúak (alaplapjuk négyzet). A pánccs szekrények falba építhetők, a külső térfogatuk a megrendelő kérésére $72,25 \text{ dm}^3$. Az előlap – $ABFE$ lap – drágább anyagból készül, ennek $25\,000 \frac{\text{Ft}}{\text{m}^2}$ az ára, a többi lap ára $20\,000 \frac{\text{Ft}}{\text{m}^2}$.



a) Hogyan válasszák meg a méreteket, hogy az ilyen pánccs szekrény anyagköltsége a legkisebb legyen?

b) Mennyibe kerül egy pánccs szekrény előállítás, ha eltekintünk a hulladéktól?

c) Mennyibe kerül egy pánccs szekrény előállítás, ha 5% hulladékkal számolunk?

247. Henger formájú konzervdobozt akarnak készíteni, aminek a magassága h , a henger sugara r . A térfogatnak 4000 cm^3 -nek kell lennie. A doboz tetejének és aljának anyaga $8 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$, az oldalé $4 \frac{\text{Ft}}{\text{cm}^2}$. Milyenek legyenek a doboz méretei, hogy az anyagköltség minimális legyen?

248. Egy egyenes körhenger formájú konzervdobozhoz $A = 8r^2 + 2r\pi h$ anyag szükséges – a veszteségeket is figyelembe véve. Hogyan válasszuk meg a sugarat (r) és a magasságot (h), ha a konzerv térfogata 1000 cm^3 , és azt szeretnék, hogy az anyagköltség a lehető legkisebb legyen?

249. A mesében szereplő varázsdoboz téglatest alakú, de a szélessége és a hosszúsága változni tud. A szélessége $0,8 \frac{\text{cm}}{\text{perc}}$, a hosszúsága $1,7 \frac{\text{cm}}{\text{perc}}$ sebességgel nő. A magassága 25 cm, nem változik.

Határozza meg a térfogatváltozás sebességét (a $\frac{dV}{dt}$ értékét), amikor a doboz szélessége 8 cm! ($t = 0$ időpillanatban a szélesség és a hosszúság is 0 cm volt.)

Milyen széles a doboz, ha a térfogat változása $1700 \frac{\text{cm}^3}{\text{perc}}$ és a hosszúság 42,5 cm?

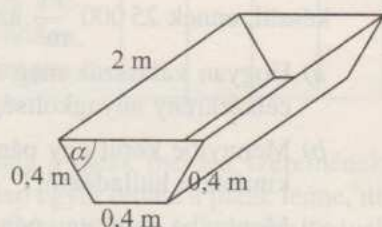
250. Pista bácsi libákat és kacsákat nevel. A baromfiudvarban szeretne elkeríteni számukra egy téglalap alakú területet, és azt középen kettéosztani egy kerítéssel. Pontosan azonos területet szán a libáknak is és a kacsáknak is. A kerítés vásárlására legfeljebb 100 000 Ft-ot költhet. A kerítés métere 500 Ft. Adja meg az elkerített rész méreteit úgy, hogy az a lehetséges legnagyobb területű legyen!

251. A sportpálya alakja olyan téglalap, amelynek a két szemben levő rövidebb oldalához egy-egy félkör csatlakozik. A félkör átmérője akkora, mint a téglalap megfelelő oldala. A pálya kerülete 400 m.

Milyen széles legyen a pálya, hogy a téglalap alakú rész maximális területű legyen?

252. Feri bácsi fából itatóvályút készít. 0,4 m széles és 2 m hosszú deszkái vannak. Ezeket fűrészelés nélkül használná fel a vályú aljának, elő- és hátlapjának. A vályú végeit egyenlő szárú trapéz alakú deszkákkal zárná le.

Mekkora legyenek ennek a trapéznek a hegyesszögei, hogy az itatóvályú térfogata a maximális legyen?

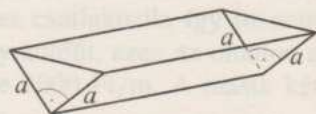


253. Egy kalandregényben Fizikus Péter műholdat szeretne pályára állítani. A hordozórakétához kétféle üzemanyag kell: az A típusú és a B típusú. Amikor az üzemanyagok reakcióba lépnek, annyi energia szabadul fel, mint a két üzemanyag tömegének a szorzata. (A tömegeket azonos mértékegységekben mérjük.) A műhold pályára állításához 8646 egység energiára van szükség.

a) Mennyit használjon Fizikus Péter az A, illetve a B típusú üzemanyagból, ha azt szeretné, hogy a hordozórakéta minél kevesebb üzemanyaggal működjön?

b) Ha az A típusú üzemanyagból csak 43,5 egységnyi van, mennyi kell a B típusból? Mennyivel lesz így nehezebb a hordozórakéta, mint ha a legkevesebb üzemanyaggal működhetne?

254. Az ábra egy felül nyitott, földbe épített víztárolót mutat. A két oldallap téglalap. A tároló két vége egyenlő szárú, derékszögű háromszög, amelyek síkja merőleges az oldalélre. 1500 m^2 bádog áll a rendelkezésünkre. A tartály térfogata



4000 m³. Hány négyzetméter bádogot tudunk megtakarítani, ha a tartály méreteit a lehető legügyesebben választottuk meg? (A veszteségektől eltekintünk.)

255. Osszuk fel a 68 cm hosszú szakaszt két részre. Az egyik rész egy négyzet kerülete, a másik rész pedig egy olyan téglalap kerülete, amelynek hosszabb oldala a rövidebb oldal kétszerese. Hogyan kell felosztani a szakaszt, hogy a négyzet és a téglalap területének összege a minimális legyen?

256. Pista bácsinak van egy 25 m széles és 50 m hosszú téglalap alakú telke a házuk mögött. A felesége egy derékszögű háromszög alakú virágoskertet szeretne létrehozni a telek egyik sarkában. A virágoskert két oldalát a telek kerítése határolja, a harmadik oldal áthalad a galambdúc oszlopán, amelyik a 25 m-es telekhatártól három méterre, az 50 m-es telekhatártól pedig négy méterre esik.

Milyenek legyenek a kert méretei, hogy a kert a telekből a legkevesebb területet vegye el?

257. Egy gépkocsi fogyasztása $f(v) = \frac{1}{12000}v^3 - \frac{3}{200}v^2 + \frac{4}{5}v$ függvény segítségével írható le. [A sebességet (v) km/h-ban mérve az f függvény a fogyasztást literekben adja meg.]

a) Állapítsa meg, hogy mekkora sebesség mellett a legkevésbé gazdaságos az autó használata!

b) Mekkora ekkor a fogyasztása?

c) Milyen sebességgel a leg gazdaságosabb az autó használata egy hosszabb úton?

d) Mekkora ekkor a fogyasztás?

258. Díszes ládikát készítenek különleges fából, kézi munkával. A ládika térfogata 72 dm³. A doboz teteje berakásos (intarziás), az oldalai faragottak, az alja sima. A tető egy négyzetméterének elkészítése 50 000 Ft. Az oldallapok elkészítése $80\,000 \frac{\text{Ft}}{\text{m}^2}$ -be kerül, az aljának ára négyzetméterenként 20 000 Ft. A doboz hosszának kétszer akkora kell lennie, mint a szélességének. Milyenek legyenek a doboz méretei, hogy a legkevesebbe kerüljön?

259. Egyenes körkúpot készítünk, amelynek palástját egy egységsugarú körből vágjuk ki.

a) Mekkora a kúp alapkörének sugara, ha a kúp térfogata maximális?

b) Mekkora legyen a kivágott körcikk középponti szöge, hogy a kúp térfogata maximális legyen?

260. A háromszög egyik oldala az x tengelyen helyezkedik el, a másik oldala az $y = 3x$ egyenletű egyenesen van, a harmadik oldal egyenese pedig áthalad az (1; 1) ponton és meredeksége negatív.

Mekkorára válasszuk az utóbbi oldal meredekségét, ha azt szeretnénk, hogy a háromszög területe a minimális legyen?

261. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x^3 - 2x$$

262. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{2x}{x^2 - 9}$$

263. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^4 - 3x^3$$

264. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$$

265. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 3x - x^3$$

266. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 - 9x^2 + 24x - 19$$

267. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^4 + 4x^3 + 4x^2$$

268. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{1\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$$

269. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely;

a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{-3\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2}{x+3}$$

270. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

271. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}$$

272. Végezze el a függvény vizsgálatát a következő szempontok alapján: zérushely; a függvény menete – monotonitás, szélsőérték(ek); a függvénygrafikon alakja – konvexitás, konkávitás; a függvény értékkészlete.

$$f: (\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{x^5 - 4x^3 + 3x}{x^2 - 1}$$

273. Állapítsa meg a függvény szélsőértékeit az $x \in \left[-\frac{4}{3}; 5\right]$ intervallumon!

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(|x+5| - |x-2| - |x+1|)$$

274. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = 1$ és az $x_2 = 3$ határok között!

275. Számítsa ki az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 + x^2 - 2x$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 1$ határok között!

276. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 8 - 2x^2$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -1$ és az $x_2 = 2$ határok között!

277. Határozza meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^3 + 3x^2$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 2$ határok között!

278. Számítsa ki az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2 - 4$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 1$ határok között!

279. Számítsa ki az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sin x$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ és az $x_2 = \frac{\pi}{2}$ határok között!

280. Számítsa ki az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x(x+1)(x+3)$ függvénygörbe és az x tengely között fekvő síkidom területét az $x_1 = -3$ és az $x_2 = -1$ határok között!

281. Mekkora területet határol az $y = x^3 - x$ egyenletű görbe és az x tengely?

282. Határozza meg az alábbi két függvény grafikonja által bezárt területet! (A függvények értelmezési tartományának mindig azt a legbővebb halmazt tekintjük, amelyen az adott kifejezések értelmezhetők.)

$$f: x \mapsto x$$

$$g: x \mapsto \sqrt{x}$$

283. Határozza meg az alábbi két függvény grafikonja által bezárt területet! (A függvények értelmezési tartományának mindig azt a legbővebb halmazt tekintjük, amelyen az adott kifejezések értelmezhetők.)

$$f: x \mapsto 4x - x^2 + 8$$

$$g: x \mapsto x^2 - 2x$$

284. Határozza meg az alábbi két függvény grafikonja és az y tengely által bezárt területet! (A függvények értelmezési tartományának mindig azt a legbővebb halmazt tekintjük, amelyen az adott kifejezések értelmezhetők.)

$$f: x \mapsto \sqrt{x}$$

$$g: x \mapsto x - 2$$

285. Határozza meg az alábbi két függvény grafikonja által bezárt területet! (A függvények értelmezési tartományának mindig azt a legbővebb halmazt tekintjük, amelyen az adott kifejezések értelmezhetők.)

$$f: x \mapsto 2x^2$$

$$g: x \mapsto x^2 + 9$$

286. Határozza meg az alábbi két függvény grafikonja által bezárt területet! (A függvények értelmezési tartományának mindig azt a legbővebb halmazt tekintjük, amelyen az adott kifejezések értelmezhetők.)

$$f: x \mapsto x^2 - 2x$$

$$g: x \mapsto 12 - x^2$$

287. Mekkora területet határol az $y = (x+1)^2$ egyenletű görbe és a két koordinátatengely?

288. Mekkora területet határol az $y^2 = 4x$ egyenletű görbe az $y = 3$ egyenletű egyenes és az y tengely?

289. Az $y = -x^2 + 3x - 4$ egyenletű görbét tolja el az y tengellyel párhuzamosan 3 egységgel pozitív irányba! Számítsa ki az eredeti és az eltolással kapott görbe közötti területet az $x_1 = -2$ és az $x_2 = 3$ határok között!

290. Határozza meg az $y = 2x^2$ egyenletű parabola, az $y = 2$ és az $y = 8$ egyenletű egyenesek által bezárt területet!

291. Mekkora a két függvény grafikonjának szomszédos metszéspontjai közötti intervallumon a függvények grafikonja által közbezárt terület?

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \cos 2x \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = \sin x$$

292. Egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyekre az $x^2 \leq y \leq \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ feltétel teljesül!

Számolja ki az $y = x^2$ és $y = \sqrt{|x|}$ görbék által bezárt területet!

293. Egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolja azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyekre a $2x^2 - 4 \leq y \leq -x^2 + 5$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ feltétel teljesül!

Számolja ki az $y = 2x^2 - 4$ és az $y = -x^2 + 5$ görbék által bezárt területet!

294. Egy expander egy rugójának megnyújtásához $F(x) = 10x$ newton erő kell, ahol x a távolságot jelenti centiméterekben mérve. A rugót negyven centiméterre nyújtjuk meg. Mennyi munkát végzünk az expander egyszeri kihúzásakor egy, illetve két rugó esetén? Számoljunk integrállal! ($W = \int F dx$)

295. Egy harmonikus rezgőmozgást végző test gyorsulás-idő függvénye:

$$a = 5 \cdot \sin t \left[\frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \right].$$

Mekkora a test pillanatnyi sebessége és kitérése az indulás után két másodperccel,

ha a pillanatnyi sebességet a $v = \int_{t_0}^{t_1} a dt$, a kitérést pedig $s = \int_{t_0}^{t_1} v dt$ határozott integrál adja? ($t_0 = 0$ s és $s_0 = 0$ cm)

296. Mennyi munkát végez az 1000 kg tömegű autó motorja, miközben sebességét $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ról $72 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ra növeli?

A végzett munkát a $W = \int_{v_1}^{v_2} mv dv$ képlettel számíthatjuk ki, ahol m az autó tömege

kilogrammban megadva; v_1 a kezdősebesség, v_2 a végsebesség – mindkettő $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ban megadva.

HC.

297. Mennyi munkát kell végeznie a motornak ahhoz, hogy egy 3 tonna tömegű repülőgépet 11 000 méter magasra felvigyen?

A munkát az x távolság függvényében a következő határozott integrál segítségével lehet kiszámolni:

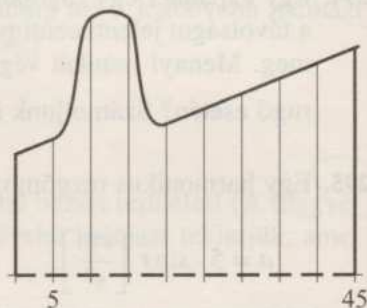
$$W = \int_{h_1}^{h_2} k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{x^2} dx,$$

ahol k a gravitációs állandó: $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; m_1 a Föld tömege: $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, m_2 a repülőgép tömege kg-ban megadva; h_1 és h_2 a kezdő, illetve a végpont méterben mért távolsága a Föld középpontjától mérve. A Föld sugara 6370 km.

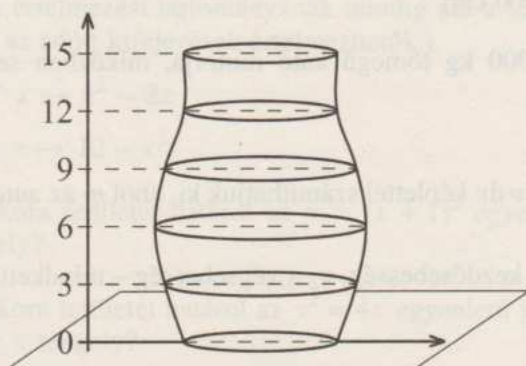
298. Közelítő módszer alkalmazásával (numerikus integrálással) becsülje meg egy tojás térfogatát! A tojás átmérője a szimmetriatengelye mentén centiméterenként haladva az alábbi táblázatban látható.

x [cm]	1	2	3	4	5	6
$F(x)$ [cm]	3	4	4,2	4	3,6	1,6

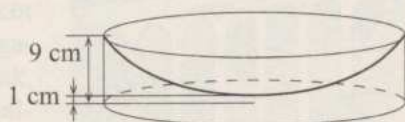
299. Egy szabásminta területét szeretnénk közelítőleg (numerikus integrálással) meghatározni. A minta szélességét öt centiméterenként megmérve 16, 18, 34, 34, 20, 22, 24, 26, 28, 30 centiméteresnek találjuk. Adjon becslést a szabásminta területének nagyságára! Alkalmazzon többféle közelítést!



300. Közelítő módszerrel (numerikus integrálással) adjon becslést egy váza térfogatára, ha tudjuk, hogy a váza átmérője három centiméterenként mérve 8 cm, 12 cm, 14 cm, 12 cm, 8 cm, 8 cm!



301. Egy tükrös távcső főtükre folyékony higanyból van. A 40 cm sugarú távcsőtükör alján lévő higany a forgatás következtében forgási paraboloid alakot vesz fel. A higany közepén $h_1 = 1$ cm magas, a széleken $h_2 = 9$ cm. Mennyi higany kell a távcsőhöz? (Ha egy $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ függvény grafikonját az x tengely körül megforgatjuk, akkor a keletkező forgástest térfogata

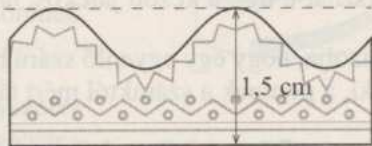
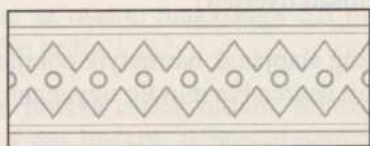


$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$ képlettel határozható

meg.)

302. Két csipke egyforma anyagból készült, egyforma sűrű vetésűek, és az ábra szerint a szélességük is azonos. Az egyiknek mind a két széle egyenes, a másiknak az egyik széle egyenes, a másik széle pedig igen jó közelítéssel az $y = \frac{1}{2} \sin x$ függvény alakjának felel meg, ahol x és y centiméterben van megadva. A második csipke a legszélesebb helyen 1,5 cm széles.

Hány százalékkal nehezebb az első csipkének egy métere, mint a másodiké?

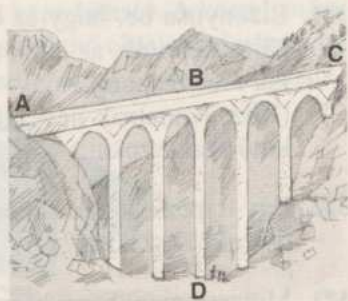


303. A gazda arra gondol, hogy fejőgépet vesz, és akkor nem kell neki kézzel fejnie a teheneket. Mielőtt azonban megvenné a fejőgépet, meg akar bizonyosodni arról, hogy a fejőgép csakugyan hatékonyabb, mint ha ő fejne. A fejőgép folyamatosan jelzi a fejési sebességet $\left(\frac{\text{liter}}{\text{perc}}\right)$. A gazda 10 perc alatt 15 liter tejet fej ki. A gép fejési sebessége $r(t) = \sqrt{t} \frac{\text{liter}}{\text{perc}}$, ahol t a fejés kezdetétől eltelt idő percekben mérve. Feltételezve, hogy a tehenek tejhozama és fejési adatai azonosak, vizsgálja meg, hogy a gép fej-e több tejet 10 perc alatt vagy pedig a gazda!

4. GEOMETRIA, KOORDINÁTA-GEOMETRIA, TRIGONOMETRIA

304. Egy paralelogramma két szemközti oldalára négyzetet, másik két oldalára egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk kifelé. Milyen négyszöget határoznak meg a négyzetek szimmetria középpontjai és a két háromszög alappal szemközti csúcs-pontjai?
305. Igazolja, hogy a paralelogramma csúcsait a rájuk nem illeszkedő átlókra merőlegesen vetítve a vetületi pontok paralelogrammát határoznak meg!
306. Ketten a következő játékot játsszák: egy téglalap alakú asztalkára felváltva tesznek tízforintos érméket. Aki az utolsó érmét teszi (ami még ráfér az asztalra), az nyer. Játsszhat-e úgy a kezdő játékos, hogy biztosan nyerjen?
307. Igazolja, hogy egy egyenlő szárú háromszög alapjának bármelyik pontját választjuk is ki, a pontnak a száráktól mért távolságait összeadva mindig ugyanannyit kapunk!
308. Legyen P az ABC szabályos háromszög tetszőleges belső vagy a határán lévő pontja. A P pont távolsága az oldalaktól rendre x , y , z . Igazolja, hogy az $x + y + z$ összeg értéke független a P pont megválasztásától!
309. Az ABC derékszögű háromszög AB befogójára kifelé megrajzoljuk az $ABPQ$, BC befogójára pedig a $BCXY$ négyzetet. Igazolja, hogy a PY szakasz merőleges a háromszög B -ből induló súlyvonalára, és kétszer olyan hosszú!
310. Egy derékszögű háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Igazolja, hogy a háromszög bármely oldalfelező pontjából a másik két oldalra rajzolt négyzetek szimmetria-középpontjai egyenlő távolságra vannak, s egymással derékszöget bezáró irányban látszanak!
311. A Hold úgy kering a közelítőleg körnek tekinthető pályáján a Föld körül, hogy közben mindvégig ugyanazt a féltékéjét látjuk. Tudjuk, hogy a Hold sugara a Földének körülbelül 27%-a, a teljes keringés ideje körülbelül 28 nap. Holdnapnak nevezzük azt az időtartamot, amennyi alatt a Hold egyszer megfordul a saját tengelye körül. Az alábbiak közül melyik állítás van legközelebb az igazsághoz?
- a) A Holdon 24 óráig tart egy nap, akárcsak a Földön.
 - b) Mivel a Hold sugara csak 27%-a a Földének, a keringési idő is csak 27%-a a 24 órának, tehát megközelítőleg hat és fél óra egy holdnap.
 - c) Egy holdnap hossza fele a keringési időnek, tehát nagyjából két hét hosszúságú.

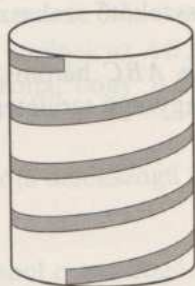
312. Egy turista a két fiával a völgy felett átívelő vasúti híd középső, BD pillérjének tövéhez, a D pont-hoz érkezett. Az útikönyvből tudja, hogy a 420 m hosszú híd 26 m-es szintkülönbségű pontokat köt össze, és a hidat középen megtámasztó legmagasabb pillér 28 m magas. A fiúk azon vitáznak, hogy a híd melyik végpontjához vannak légvonalban közelebb (A -hoz vagy C -hez)?



a) Döntse el a vitát!

b) Mekkora a két távolság különbsége?

313. Az északkelet felé haladó hajóról két, egymástól 100 km-re levő világítótorony közül az egyik északra, a másik keletre látszik. Két óra múlva a két torony közül az egyik nyugati, a másik délkeleti irányban látszik. Mekkora a hajó sebessége?



314. Milyen hosszú a hirdetőoszlopon látható díszítőcsík, ha az oszlop magassága 2,5 m, alapkörének átmérője pedig 1 m?

315. Milyen hosszú cérnát tudunk feltekerni egyszeresen a 4 cm hosszú, 6 mm átmérőjű, 40 menetes csavar menetére?



316. Hogyan aránylik egymáshoz egy adott körbe írt szabályos háromszög, négyszög és hatszög oldala?

317. Igazolja, hogy bármely háromszög a , b oldalából és s_c súlyvonalának kétszereséből háromszög szerkeszthető!

318. Igazolja, hogy a háromszög súlyvonalainak összege

a) nagyobb a fél kerületnél;

b) kisebb a kerületnél!

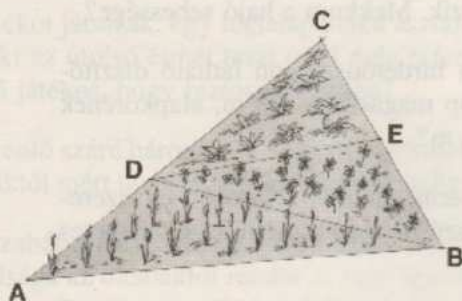
319. Bizonyítsa be, hogy a sík bármely pontjának a síkban levő valamely sokszög csúcsaitól mért távolságösszege nagyobb a sokszög fél kerületénél!

320. A feladatok megoldása előtt olvassa el először mindkét feladatot!

a) Milyen négyszöget határoznak meg egy szimmetrikus trapéz oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok?

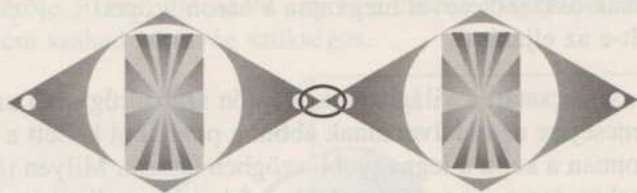
b) Igazolja, hogy a tér A , B , C , D pontjait (amelyek között nincs három egy egyenesre illeszkedő pont) összekötő AB , BC , CD , DA szakaszok felezőpontjait az adott sorrendben összekötve paralelogrammát kapunk!

321. Bizonyítsa be, hogy az olyan négyszögeknél, amelyeknek szemközti oldalai nem párhuzamosak, az átlók felezőpontjait összekötő egyenes illeszkedik a középvonalak metszéspontjára!
(Középvonalnak nevezzük a négyszög szemközti oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszokat.)
322. Egy trapéz két párhuzamos oldala 16 cm és 10 cm. Mekkora az átlók felezőpontját összekötő szakasz?
323. Mutassa meg, hogy bármely háromszög súlyvonalából szerkeszthető háromszög!
324. Bizonyítsa be, hogy a paralelogramma csúcsát a szemközti oldalak felezőpontjaival összekötő szakaszok harmadolják a paralelogramma átlóját!
325. Az ABC háromszög alakú virágágyásban három különböző fajtájú virág azonos nagyságú területen terem. Hogyan kellett kijelölni a D és E pontot?



326. Egy derékszögű háromszög átfogója 70 mm, a derékszög szögfelezője pedig $24\sqrt{2}$ mm. Mekkora a befogók?
327. Egy szimmetrikus trapéz átlói merőlegesen egymásra, középvonala k hosszúságú. Mekkora a trapéz területe?
328. Egy paralelogramma egyik oldala 12 cm-rel hosszabb a másikonál, a paralelogramma hegyesszögei 60° -osak. A paralelogramma belső szögfelező egyenesei egy négyszöget zárnak közre.
a) Igazolja, hogy a keletkező négyszög téglalap!
b) Mekkora a területe?
329. Egy téglalap belső szögfelezői által alkotott négyszög területe egyenlő a téglalap területével.
a) Meghatározható-e a téglalap oldalainak nagysága? Ha igen, mekkora az oldalak?
b) Meghatározható-e a téglalap oldalainak aránya? Ha igen, mekkora ez az arány?

330. Az ábrán egy nyakék egyik láncszemének felnagyított képe látható. A körrel áttört, rombusz alakú aranylemezhez a kör érintési pontjait összekötő oldalakkal négyszög alakú ezüstbetét illeszkedik. Mennyi az arany és az ezüst aránya a láncszemben?



(Az összefűzéshez szolgáló két kis lyuk átmérője 1 mm, a rombusz oldala 12 mm, egyik szöge 60° .)

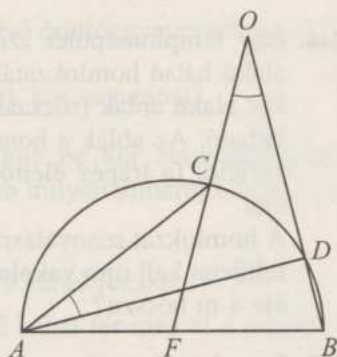
331. Az ABC háromszögben a BC oldalt kívülről érintő hozzáírt körének az AB , illetve az AC oldalegyenesen levő érintési pontjai E és F . Igazolja, hogy $AE + AF$ egyenlő a háromszög kerületével!
332. Mekkora a beírt kör sugara a 17 cm átfogójú és 8 cm befogójú derékszögű háromszögben?
333. Igazolja, hogy az a , b , c oldalú derékszögű háromszögbe (ahol c az átfogó) írható kör átmérője $a + b - c$!

334. Mekkora annak a derékszögű háromszögnek az oldalai, amelynek az átfogóhoz tartozó magassága 12 cm és a beírható körének sugara 5 cm?

335. Az AB félkört az FBO egyenlő szárú háromszög szárai a C , illetve D pontokban metszik. Az F pont az AB átmérő felezőpontja. A CAD $\angle$ egyenlő az FOB $\angle$ -gel. Mekkora ez a szög?

336. Rajzolja meg az AB alapú ABC hegyesszögű háromszögek C csúcspontjának halmazát!

337. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszög köré írt körének a háromszög két csúcsához tartozó érintői párhuzamosak a szemben fekvő oldalakkal, akkor a háromszög egyenlő oldalú!



338. Igazolja, hogy a húrtrapéz átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szárai a körülírt kör középpontjából derékszögben látszanak!

339. Igazolja, hogy a háromszög magasságpontját tükrözve

a) bármely oldalra;

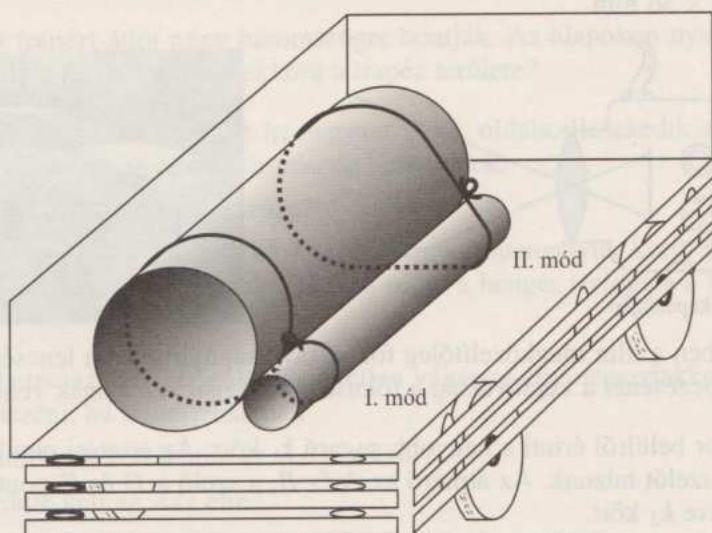
b) bármely oldal felezőpontjára

a képpont a háromszög köré írható körre esik!

340. Okoska a következőképpen szerkesztett szabályos háromszöget:
rajzolt egy kört, majd annak egyik pontjából három hűrt szerkesztett úgy, hogy
a középső a két szélsővel 60° – 60° -os szöget zárt be, végül a hűrok nem közös
végpontjainak összekötésével megkapta a háromszöget.
Helyes volt-e az eljárása?
341. Rimoro, a csodacsatár, a világbajnoki döntőn szabadrúgásból az oldalvonalról lőtt
gólt. Szerencséjére az oldalvonalnak abból a pontjából kellett a szabadrúgást elvé-
geznie, ahonnan a kapu a legnagyobb szögben látszik. Milyen távorról lőtt Rimoro
a rövid sarokba (azaz a hozzá közelebb eső kapufa melletti sarokba)?
A focipálya szélessége 50 m, a kapu szélessége 735 cm volt.
342. Két kör metszéspontjain át egy-egy szelőt húzunk. Milyen speciális négyszöget
határoznak meg a szelőknek a körökkel való második metszéspontjai?
343. 20 cm^2 területű, tengelyesen szimmetrikus érintőtrapézba írt kör sugara 2 cm. Mek-
korák a trapéz oldalai?
344. Egy trapéz párhuzamos oldalai a és c . Mekkora az átlók metszéspontján átmenő,
az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapéz belsejébe eső szakasza,
a) ha $a = 12\text{ cm}$ és $c = 6\text{ cm}$;
b) a -val és c -vel kifejezve?
345. Igazolja, hogy bármely, tengelyesen szimmetrikus érintőtrapéz esetén, a szárazon
levő érintési pontokat összekötő egyenes illeszkedik az átlók metszéspontjára!
346. Egy templomépület szimmetrikus trapéz
alakú hátsó homlokzatában 1 m átmérőjű
kör alakú ablak (rózsaablak vagy rozetta)
látható. Az ablak a homlokzat mindegyik
szélétől (a trapéz éleitől) 1 m távolságra
van.
A homlokzat renoválásra szorul. Mekkora
felületet kell újra vakolni, ha a trapéz alsó
éle 4 m hosszú?
347. Egy húrnégyszög szemközti oldalegye-
nesei 30° -os, illetve 50° -os szöget zárnak
be egymással. Mekkora a húrnégyszög
szögei?

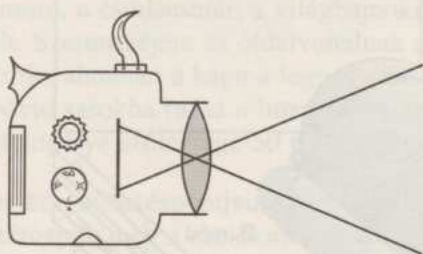


348. Két különböző sugarú cső szállításakor a csöveket két helyen kötik egymáshoz. Az egyik alkalommal nem volt elég hosszú a kötél, ezért a szokásos (I. mód) kötés helyett az egyik helyen a II. módon kötötték össze a csöveket. A csövek átmérője 30 cm, illetve 90 cm, és a csomó megkötéséhez mindkét fajta átkötésnél 30 cm szabad kötélvég szükséges.



- a) Igazolja, hogy a II. módon történt megkötéssel valóban kevesebb kötél kell!
- b) Mennyi kötélre van szükség a II. módon történt átkötéshez?
349. Két kör középpontjának távolsága 17 cm. A közös belső érintőegyenesnek a közös külső érintők közé eső szakasza 15 cm.
Mennyivel nagyobb a nagyobbik kör sugara a kisebbik kör sugaránál?
350. Egy telefontársaság kör keresztmetszetű kábeleket húz be kör keresztmetszetű csőbe. Tudva, hogy a kábelek átmérője 2 cm, legalább milyen átmérőjű csőre van szükség 2, 3, illetve 4 kábel behúzásához?
351. A 12 cm átmérőjű csővezetékben 2 db, 6 cm átmérőjű kábel fekszik.
- a) Legfeljebb mekkora átmérőjű, kör keresztmetszetű kábel fér még el a csőben?
- b) Bizonyítsa be, hogy ha 2 db, 6 cm-es és 2 db, 4 cm-es átmérőjű kábelt tartalmaz a cső, akkor már csak legfeljebb 2 cm átmérőjű kábeleket lehet még behúzni! Hányat?
352. Egy lepke állandó nagyságú és vízszintes irányú sebességgel repül egy lámpa alatt. A lámpa 5 m-re van a talajtól, a lepke pedig 3,5 m magasságban repül. A lepke sebessége $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Mekkora sebességgel mozog a lepke árnyéka a földön?

353. Egy $10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ -es fényképen egy robogó autó elmozdult, elmosódott képe látható. Az elmosódás szélessége 2 mm . Mekkora lehetett a kocsi sebessége, ha tudjuk, hogy körülbelül 25 m távolságból fényképeztünk, gépünk lencséjének fókusz-távolsága 3 cm , és az exponálási idő $\frac{1}{60}$ másodperc volt? A filmkocka mérete $24\text{ mm} \times 36\text{ mm}$.



Fényképezőgép

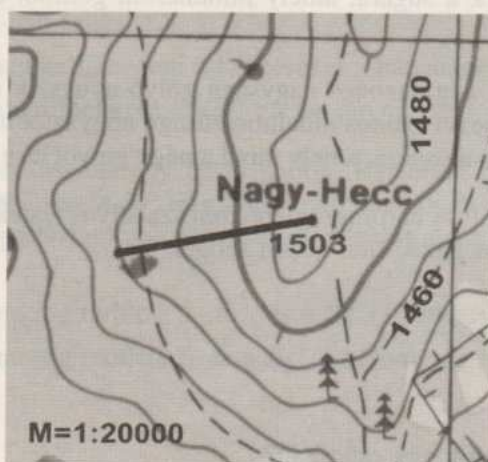
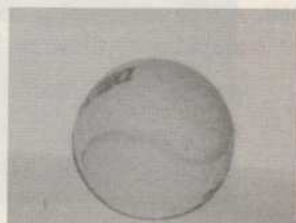


(A gépben a film megközelítőleg fókusz-távolságnyira van a lencsétől; távoli tárgy fényképezésénél a képtávolság a fókusz-távolsággal azonosnak vehető.)

354. A k_2 kör belülről érinti a nagyobb sugarú k_1 kört. Az érintési pontból egy átmérőt és egy szelőt húzunk. Az átmérő az A és B , a szelő a D és C pontokban metszi a k_1 , illetve k_2 kört.
Mekkora a két kör sugarának aránya, ha $AB = 5$, $BC = 4$, $DC = 3$ egység?
355. Egy 10 cm és 13 cm oldalméretű téglalapba egy $3 : 2$ oldalarányú téglalapot szeretnénk beírni. (A beírt téglalap csúcsai a $10\text{ cm} \times 13\text{ cm}$ -es téglalap egy-egy oldalára illeszkednek.) Hogyan járunk el?
356. Egy 900 m^2 -es, háromszög alakú telket, amelynek egyik oldala 50 m , másik oldala 60 m , három, egyenlő területű részre kell felosztani az 50 m -es oldallal párhuzamos kerítések segítségével.
- Mennyi kerítésre van szükség?
 - Milyen távolságban kell kezdeni a kerítéseket a hatvanméteres oldalon mérve?
 - A két megadott oldal mekkora szöget zár be egymással?
357. Legyen B az AC szakasznak egy belső pontja. Rajzoljuk meg az AC egyenesnek ugyanazon a partján az ABP és a BCQ párhuzamos helyzetű háromszögeket (oldalaik páronként párhuzamosak egymással)! Mekkora a BPQ háromszög területe,
- ha az ABP háromszög területe 2 cm^2 , és a BCQ háromszög területe 8 cm^2 ?
 - ha az ABP háromszög területe t_1 és a BCQ háromszög területe t_2 ?

358. Az ABC háromszögnek legyen P egy tetszőleges belső pontja. A P -re illeszkedő, az ABC háromszög oldalaiival párhuzamos egyenesek a háromszöget három háromszögre és három négyszögre bontják. Ha a keletkezett háromszögek területét t_1 -, t_2 -, t_3 -mal jelöljük, mennyi az ABC háromszög területe? (Legyen $t_1 = 2$, $t_2 = 8$, $t_3 = 18$ területegység.)
359. Az $ABCD$ trapézát átlói négy háromszögre bontják. Az alapokon nyugvó háromszögek területe t_1 , illetve t_2 . Mekkora a trapéz területe?
360. Az egyenlő szárú háromszögbe írt négyzet egyik oldala illeszkedik a háromszög alapjára, területe pedig fele a háromszög területének.
- Mekkora a háromszög szárszöge?
 - A háromszöget és a négyzetet közös szimmetriatengelyük körül megforgatva egy kúpba írt hengert kapunk. Hányad része a henger térfogata a kúp térfogatának?
361. Hogyan lehetne az $ABCD$ gúlából egyetlen vágással egy negyedakkora térfogatú gúlát lementseni, ha a metszősíknak
- párhuzamosnak kell lennie az ABC síkkal?
 - illeszkednie kell az AD élre?
 - illeszkednie kell az A csúcsra és a BD él felezőpontjára?
362. Egy téglatest oldalai a, b, c . Mekkora a téglatest köré írható gömb sugara?
363. Egy síklapon két, egymást érintő 9 cm, illetve 4 cm sugarú labda áll. Legfeljebb mekkora labdát lehet a síklap és a két labda közötti résen átgurítani? Készítsen rajzot, és indokolja a megoldását!
364. Három, egyenlő sugarú, közös érintősfélgömb páronként érinti egymást. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely mindhárom gömböt és a közös érintősfélgömböt is érinti?
365. Vízszintes lapon négy azonos nagyságú golyó nyugszik úgy, hogy középpontjaik a golyók átmérőjével azonos oldalhosszúságú négyzetet határoznak meg. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely mind a négy golyót és a vízszintes lapot is érinti?
366. Egybevágó szabályos háromszöglapokból szabályos testeket készítünk. Hány fokokkal a szomszédos lapok által bezárt szögek, ha
- három;
 - négy;
 - öt;
 - hat;
 - hét lap találkozik egy csúcsban?

367. Számítsa ki az $ABCDEFGH$ kocka A csúcsának távolságát
- a $BCGF$ lapsíktól;
 - a $BFHD$ átlósíktól;
 - a HC lapátlótól;
 - a BH testátlótól,
- ha a kocka éle a hosszúságú!
368. Számítsa ki, hogy a kocka testátlója mekkora szöget zár be az oldalélekkel, a lapátlókkal és az oldallapokkal!
369. Egy teniszlabda sugara $3,5$ cm. A középponttól $2,5$ cm távolságra lévő síkokra illeszkednek a jellegzetes csíkot mutató, érintkező félkörök. Milyen hosszú a díszítő vonal?
370. Hogyan aránylik egymáshoz
- a kocka;
 - a tetraéder
- beírt, éleket érintő és körülírt gömbjének sugara?
371. Nekeresd várának egyik szobája 3 m magas, alapterülete pedig egy $3\text{ m} \times 7,5\text{ m}$ -es téglalap. Ablak és ajtó a szobának csak az egyik hosszanti falán van. Az egyik $3\text{ m} \times 3\text{ m}$ -es oldalfalon a fal függőleges szimmetriatengelyében, $2,75$ m-es magasságban van egy elektromos elosztódoboz, a vele szemközti falon pedig, ugyancsak a függőleges szimmetriatengelyen, a padlótól 25 cm-re egy konnektor. Lustaámdeokos Pókocska éppen az elosztódobozon üldögélt, amikor észrevett a konnektor mellett egy sérült, menekülésre képtelen óriáshangyát. A legrövidebb úton a hangyához sietett...
Mekkora utat kellett megtennie?
372. Hegyvidéki térképen szaggatott vonal jelzi a csúcsra vivő függővasút pályáját.

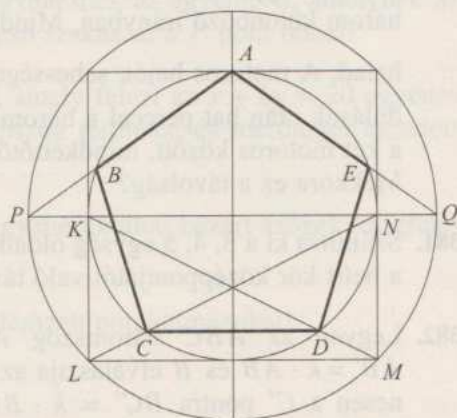


Állapítsa meg, hogy milyen hosszú a drótkötélpálya, mekkora szintkülönbséget győz le, és milyen meredeken emelkedik?

373. Egy $10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ keresztmetszetű gerendát a lakás tetőterében tartó-, illetve díszítőelemként is szeretnének felhasználni. Így a 2 m hosszú fa éleit úgy gyalulják meg, hogy egyenlő oldalú, nyolcszög alapú hasáb keletkezzen. Mekkora a hasáb oldallapjainak hajlásszögei?

374. Középkori építések használták a következő szerkesztést a szabályos ötszög előállítására:

Rajzoltak egy négyzetet, aztán megrajzolták a négyzet oldalaival párhuzamos szimmetriatengelyeket, majd a négyzet bele- és köréírt körét. A négyzet A oldalfelező pontját összekötötték a körülírt kör PQ átmérőjének végpontjaival. A négyzet beírt körét az AP és AQ szakaszok a B és E pontokban, a négyzet alsó felét adó $KLMN$ téglalap átlói pedig a C és D pontokban metszik. Az $ABCDE$ pontok alkotják az ötszöget.



Valóban szabályos ez az ötszög?

375. Egy trapéz hegyesszögei 60° és 45° , párhuzamos oldalai 4 cm és 8 cm . Mekkora a trapéz területe?

376. Egy trapéz alakú telek határoló kerítései 12 m , 28 m , 19 m és 32 m hosszúak, és a két legrövidebb oldal párhuzamos egymással. Hány m^2 a telek területe?

377. Az ABC háromszögben $a^2 + b^2 - c^2 = ab$ és $10b = 11c$. Mekkora a háromszög szögei?

378. Túra során egy hegygerincen megpihenve tájolóval megmérjük, hogy az úti célként kitűzött falu templomtornya (T) és a jobb kéz felé eső hegytetőn álló kilátó (K) közti szakasz 60° -os szögben, a templomtorony és a bal kéz felé eső víztorony (V) közti szakasz pedig 45° -os szögben látszik. A térképen lemérjük, hogy a VTK szög vízszintes vetülete 120° -os, a VT távolság vízszintes vetülete 2800 m , a TK távolságé pedig 3600 m .



Számítsa ki, mekkora távolságban vagyunk légvonalban a templomtoronytól, ha feltételezhetjük, hogy a V , a T és a K helyek a gerinccel azonos tengerszint feletti magasságban vannak!

379. Motorcsónak indul egy hajó mellől, és északnak tart $80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. A hajó a keleti iránytól 30° -kal délre halad $32 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Ha a motorcsónaknak négyórányi utazáshoz elegendő az üzemanyaga, akkor legfeljebb milyen messze mehet északi irányba, hogy biztonságosan visszaérhessen a hajóhoz?
380. A tóban egyszerre indul el a part egy pontjáról két motoros és egy vitorlás hajó három különböző irányban. Mindhárom egyenes vonalban egyenletes sebességgel halad. A motoros hajók sebessége $16 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, illetve $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a vitorlásé $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Elindulásuk után hat perccel a három hajó egy egyenesen helyezkedik el, s a vitorlás a két motoros között, mindkettőtől egyenlő távolságra van. Mekkora ez a távolság?
381. Számítsa ki a 3, 4, 5 egység oldalhosszúságú derékszögű háromszög súlypontjának a beírt kör középpontjától való távolságát!
382. Legyen az ABC háromszög AB oldalegyenesének B' pontja olyan, hogy $AB' = k \cdot AB$ és B elválasztja az A és B' pontokat. Hasonlóan a BC oldalegyenesen a C' pontra $BC' = k \cdot BC$ és C elválasztja a B és C' pontokat, a CA oldalegyenesen az A' pontra $CA' = k \cdot CA$ és A elválasztja a C és A' pontokat. Igazolja, hogy az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszög súlypontja egybeesik!
383. Szabályos háromszög egyik csúcspontja $(\sqrt{12}; 2)$, súlypontja az origó. Írja fel a másik két csúcspont koordinátáit!
384. Egy száz területegység területű deltoid két szemközti csúcsának koordinátái $A(-1; 5)$ és $C(4; -5)$. A négyszög ezen átlóját a másik $2 : 3$ arányban osztja. Számítsa ki a hiányzó csúcspontok koordinátáit!
385. Egy téglalap átlóinak metszéspontja az $M(3; 2)$ pont. Az egyik átló egyik végpontja a $A(7; 5)$ pont. Sajnos a koordináta-rendszer eltűnt a papírról, csak a két pont, M és A maradt meg.
- Szerkessze meg a hiányzó koordináta-rendszer középpontját és tengelyeit!
 - Határozza meg a téglalap csúcsainak koordinátáit, ha még azt is tudjuk, hogy a téglalap oldalai párhuzamosak a koordináta-rendszer szögfelezőivel!
386. Egy négyzet két oldalegyenesének egyenlete $2x - 3y = 15$ és $y = \frac{2}{3}x + 15$. Mekkora a négyzet területe?
387. Egy rombusz átlóinak metszéspontja $M(3; 7)$. A rombusz egyik csúcsa $P(1; 3)$, és $Q(10; 9)$ illeszkedik a rombusz egyik P -ből induló oldalegyenesére. Mekkora a rombusz területe?

388. A $(3; 4)$ pontból induló fénysugár 30° -os szöget zár be az x tengellyel, és a második síknegyedben elérve az x tengelyt, visszaverődik. Írja fel a beeső és a visszavert fénysugár egyenesének egyenletét!

389. Írja fel annak a $P(0; -2)$ pontra illeszkedő egyenesnek az egyenletét, amelynek az $x + 7y = 27$ és az $x + 7y = 2$ egyenesek közé eső szakasza öt egység hosszú!

390. Írja fel annak a $P(6; 5)$ pontra illeszkedő egyenesnek az egyenletét, amelynek az $x - 4y = -7$ és az $y = 2x$ egyenesek közé eső szakaszát a P pont felezi!

391. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi az $x + 2y = 20$ egyenes és a koordinátatengelyek által bezárt háromszög területét, és merőleges az adott egyenesre!

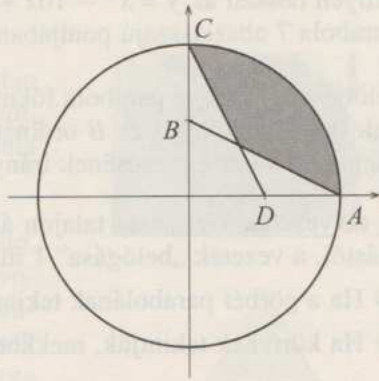
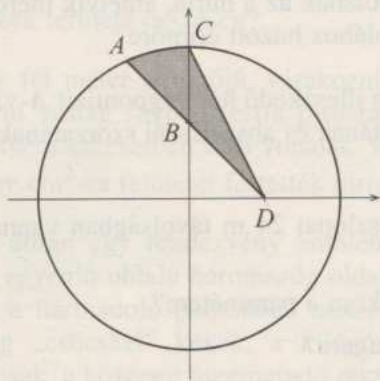
392. Írja fel a $3x + 4y = 26$ és $4x - 3y = -32$ egyenesek által bezárt szögek szögfelezőinek egyenletét!

393. Ábrázolja az alábbi egyenlőtlenségekkel jellemzett ponthalmazokat!

a) $|x| - |y| < 1$

b) $||x| - |y|| < 1$

394. Az ábrán látható kör egyenlete $x^2 + y^2 = 16$, a B és D pont koordinátái $B(0; 2)$, $D(2; 0)$. Számítsa ki a besatírozott részek területét!



395. Adott $A(1; -1)$, $B(-6; -2)$ és $C(3; -5)$. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az adott három ponton!

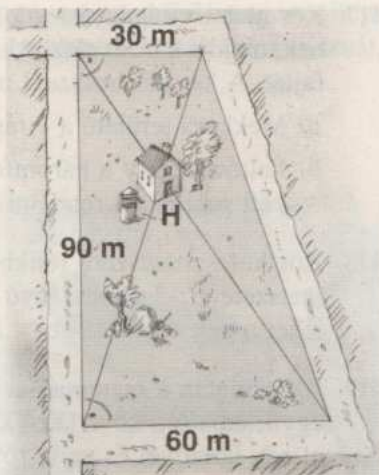
396. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely az x tengelyt a $(4; 0)$ pontban érinti, és érinti az $y = \sqrt{3}x$ egyenletű egyenest is!

397. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az x tengelyt, az $y = -x$ egyenest és az $y = 4 - x$ egyenest is!

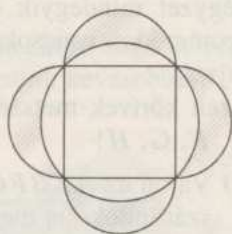
398. Mekkora k értéke, ha a $3x + 4y = k$ egyenletű egyenes érinti az $x^2 + y^2 = 16$ egyenletű kört? Milyen hosszú az érintőnek a koordinátatengelyek közé eső darabja?
399. A $(-2; -3)$ pontra illeszkedő k kör az $(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 9$ egyenletű kört a legkisebb abszcisszájú pontjában érinti. Írja fel a k kör egyenletét!
400. Írja fel a $7x - 24y - 168 = 0$ egyenest és a koordinátatengelyeket érintő kör egyenletét!
401. Az $y = \frac{3}{2}x - 5$ egyenes mely pontjából lehet két
- egymásra merőleges;
 - egymással 60° -os szöget bezáró érintőt húzni az $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 8 = 0$ egyenletű körhöz?
402. Az ABC szabályos háromszög A csúcspontja az $y^2 = 8x$ parabola tengelypontja, B, C pontja pedig illeszkedik a parabolára. Határozza meg a B és C pontok koordinátáit!
403. Adott az $y = 4x^2 + 3x - 5$ egyenletű parabola és az $5x + y + 12 = 0$ egyenletű egyenes. Határozza meg a parabolának azt az érintőjét, amely párhuzamos az adott egyenessel!
404. Milyen hosszú az $y = x^2 - 10x + 28$ parabolának az a húrja, amelyik merőleges a parabola 7 abszcisszájú pontjában a parabolához húzott érintőre?
405. Jelölje az $x^2 = 2py$ parabola fókuszpontjára illeszkedő húr végpontjait A -val és B -vel. Igazolja, hogy A és B ordinátái szorzatának és abszcisszái szorzatának aránya független a húr egyenesének irányától!
406. A távvezeték vízszintes talajon álló tartóoszlopai 24 m távolságban vannak egymástól, a vezeték „belógása” 1 m.
- Ha a görbét parabolának tekintjük, mekkora a paramétere?
 - Ha körívnek tekintjük, mekkora a kör sugara?
407. Milyen alakzat egyenlete az $x^3 + x^2y - y^2 - xy = 0$ egyenlet?
408. Az ABC háromszögben $A(2; 3)$ és $B(-4; 5)$. A C pont illeszkedik
- az $y = 2x - 1$ egyenesre;
 - a B középpontú 4 egység sugarú körre.
- S a háromszög súlypontja. Határozza meg az S pontok halmazát!
409. Milyen alakzatra illeszkednek az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kört és az ordinátatengelyt érintő körök középpontjai?
410. Mi az $y = x^2 + kx$, $k \in \mathbb{R}$ parabolák tengelypontjainak halmaza?

411. Egy derékszögű trapéz alapjai 30 cm és 60 cm. Milyen távolságra van az átlók metszéspontja a derékszögű szártól?

412. A rajzon látható, utakkal határolt derékszögű trapéz alakú terület H pontjában (az átlók metszéspontja) levő házból a lehető legrövidebb bekötőutakat kell megépíteni mind a négy határoló út eléréséhez. Milyen irányú és mekkora hosszúságú bekötőutakra van szükség, ha a derékszögű szár hossza 90 m, a párhuzamos oldalaké 60 m, illetve 30 m?



413. Amikor karácsonyfának szánt fenyőkből új erdőt telepítenek, a facsemeték között legalább 2 m-es távolságot kell hagyni, hogy kellően növekedhessenek. Legfeljebb hány facsemetét lehet ültetni egy 1 km^2 -es területre? (A terület határára is lehet ültetni, a közelben nincs más növényzet.)



414. Egy két egység átmérőjű körbe négyzetet írunk, azután a négyzet oldalai fölé mint átmérőre félköröket szerkesztünk. Mekkora a besatírozott részek területe összesen?

415. Egy fél méter átmérőjű, várakozni tilos táblán 5 cm vastag sávban festik pirosra a körsávot, illetve a keresztben futó vonalat. Vajon a tábla hány cm^2 -es felületét festették pirosra?



416. Az ábrán egy rendezvény emblémája látható. Az egyenlő oldalú háromszög oldalait a körvonal a harmadoló pontokban metszi. A háromszög „csücskei” kékek, a kilógó körszeletek pirosak, a középen megmaradó rész pedig sárga alapszínű, rajta a rendezvény címével.

- Mekkora a kör sugara, ha a háromszög oldalhosszúsága 6 cm?
- Milyen arányban kell beszerezni az emblémák elkészítéséhez a különböző színű festékeket?



417. Kör alakú virágágyást a kör egy pontjából induló két húrral három részre bontanak, majd a három részbe különböző virágokat ültetnek, mindegyik részbe egy-egy fajtát. A két húr hossza 3 m, illetve 5 m, az általuk bezárt szög 30° .

a) Mekkora területű a virágágy?

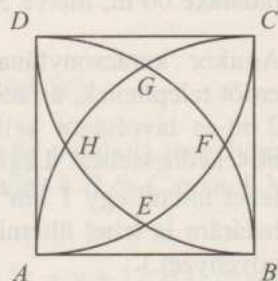
b) Feltéve, hogy a háromféle virágot azonos sűrűséggel ültetik, milyen arányban kell palántákat rendelni?

418. Kör keresztmetszetű rönkből olyan gerendát fűrészelnék ki, amelynek a keresztmetszete 1 : 2 oldalarányú téglalap. A rönk tömegének legfeljebb hány százaléka lehet a gerenda tömege?

419. Egy délután a matematika szakkörre várva az egyik tanuló a következő szerkesztést végezte el egy körzővel és vonalzóval:

Egy kartonlapra 10 cm oldalélű $ABCD$ négyzetet szerkesztett. Ezután, az ábra szerint a négyzet mindegyik csúcsa körül egy-egy, a szomszédos csúcsokra illeszkedő negyedkört rajzolt.

Ezen körívek metszéspontjai legyenek rendre E, F, G, H !



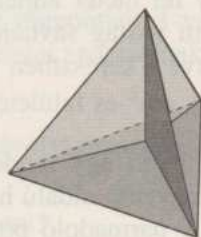
a) Vajon az $AEBFCGDH$ nyolcszög lehet-e egy piramis kiterített hálójá? Válaszát indokolja meg!

b) Amennyiben létezik ilyen piramis, mekkora lesz a magassága?

420. Ismert tény, hogy ha drótkeretet szappanos oldatba mártunk, szép, mintás felszínű alakzat (szappanhártya) keletkezik. Ez a szabályos tetraéder drótháló esetén olyan 12 oldalú „test”, amelynek lapjai egybevágók.

Mekkora a test felszíne?

Hányszorosa ez az eredeti (szabályos tetraéder) felszínének?



421. Kati vigyázott otthon Zolira, a hatéves kistestvérére. Amikor Kati nem figyelt egy pillanatig, Zoli az akváriumot az egyik oldalára billentette, miként az az ábrán is látható. (A víz az egyik oldalon épphogy nem folyik ki, a szemközti oldalon pedig az üvegfal magasságának a feléig ér.) Amikor ezt Kati meglátta, gyorsan megfogta az akváriumot, és visszaállította az asztalra. Milyen mélyen áll a víz az akváriumban, ha az akvárium hosszúsága 40 cm, szélessége 20 cm, magassága 15 cm.



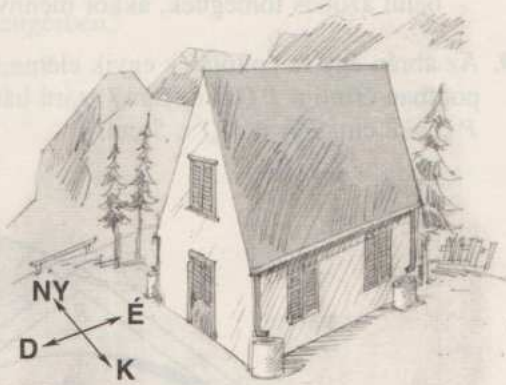
422. A szorosan feltekert, 0,5 mm vastag vászon 30 cm-es átmérőjű hengert alkot. A henger belsejében egy 8 cm-es átmérőjű farúd van, erre tekerték fel a vásznat. Milyen hosszú a vászon? Közelítésekkel éljünk!

423. A 40 cm mély gyerekmedence ferde talajon lett felállítva, így egyik oldalán a pereméig ér a víz, vele szemben azonban 10 cm-rel a perem alatt van a vízfelszín. A medencének hányad része marad így kihasználatlanul?



424. Tekintsük a sárgadinnyét gömbnek. Általában a sugar $\frac{1}{10}$ -e héj, $\frac{1}{3}$ -a a magokat körülvevő, nem fogyasztható rész. Két egyenlő sugarú dinnye helyett mekkora sugarút vegyünk, hogy ugyanannyi dinnyét ehessünk? Melyik esetben fizetünk kevesebbet?

425. Egy 10 m $\times$ 15 m-es, téglalap alapterületű házon 30°-os szárszögű, igen meredek sátortető van. A sátortető tengelye 15 m-es, É-D-i irányú.



- a) Tavaszi, szélcsendes időben 2 mm csapadék esett. Mennyi víz gyűlt össze a ház négy sarkában elhelyezett hordókban külön-külön?

- b) Nyári K-NY-i szélben a függőlegessel 30°-os szöget bezáró eső esik. A meteorológusok ismét 2 mm-t mérnek. Most mennyi víz gyűlt össze a négy hordóban egyenként?

426. Egy úszó kikötő alá 10 db üres, zárt olajshordót hegesztenek, fektetve. A hordók egyenként fél méter átmérőjűek, 120 cm hosszúak. A stég és a hordók együttes tömege három mázsa. A stégre gyerekek telepedtek napozni, s így minden hordó az átmérőjének negyedéig merül be a vízbe.

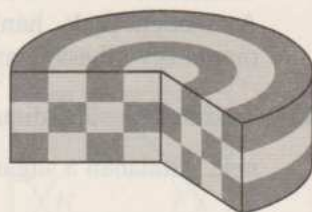
Hány gyerek van a stégen, ha gyerekenként átlagosan 55 kg-os tömeggel számolhatunk?

[A kiszorított víz súlya megegyezik a vízen úszó testek (stég + gyerekek) súlyával.]

427. Péter egy hatlapú testet készített kartonból. Éva, amikor ezt meghallotta, rávágta, hogy az kocka, hiszen annak éppen hat lapja és nyolc csúcsa van. Péter tagadólag rázta a fejét: „Nem, az én testemnek csak öt csúcsa, de mégis kilenc éle van.” Éva hitetlenkedve hallgatta. Péter még azt is hozzátette, hogy egyenlő oldalú háromszögek határolják.

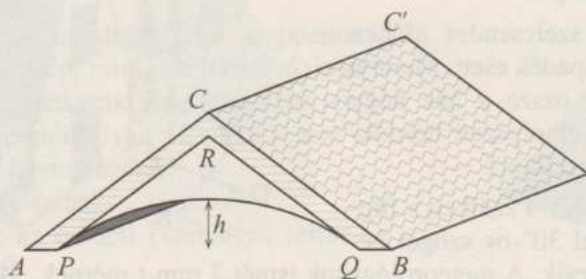
- Vajon milyen testet készíthetett Péter?
- Készítse el a test hálóját, és határozza meg a felszínét, valamint a térfogatát, ha élei egységnyi hosszúságúak!

428. Panni nagymamája az ábrán látható „háromemeletes” tortát készítette el. A tortát felvágva egybevágó 12 téglalapot látunk sakktáblaszerűen. A sötét részek csokoládés, a világos részek vaníliás tésztából vannak. Panni barátnője a tortát látva felkiáltott: „Jaj de jó, én a csokit és a vaníliát egyformán szeretem, s ha jól látom, akkor mindkettőből ugyanannyi van a tortában.” Panni tagadólag rázta meg a fejét.



- Mi a véleménye a barátnő állításáról?
- Ha a teljes torta 1,6 kg tömegű, és a kétfajta tészta azonos térfogatú részei körülbelül azonos tömegűek, akkor mennyi a vaníliás és a csokis részek tömege?

429. Az ábrán egy fa építőjáték egyik eleme, a kaputető látható. A PQ körív a P és Q pontban érinti a PQR egyenlő szárú háromszög oldalait. $PQ = 8$ cm, $PR = RQ = 5$ cm.



- Mekkora sugarú körnek az íve a PQ ív?
- Mekkora a kapu belmagassága?
- Mekkora az építőelem térfogata, ha $CC' = 5$ cm, $AP = QB = 1$ cm, és AC párhuzamos RP -vel?

430. Egy élelmiszer-forgalmazó cég a margarin reklámozására a 250 grammos mellett nagyobb, ugyancsak kocka alakúra préselt margarint is árusít. A nagyobb kocka éle 7,0 mm-rel, térfogata $60,9 \text{ cm}^3$ -rel nagyobb a kis kocka megfelelő adatainál.

a) Mekkora a kétféle margarinkocka éle?

b) Hány grammos a nagyobb kiszerelés?

c) Mennyi a margarin sűrűsége?

431. Hány kg tömegű a vízzel telt 1 mm vastagságú, vaslemezéből készített csonka kúp alakú vödör, amelynek felső átmérője 2,8 dm, alsó átmérője 2,4 dm, magassága pedig 32 cm?

(A vas sűrűsége $7,8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a vízé $10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.)

Milyen közelítésekkel élt a számolás során?

432. Két üvegedény közül az egyik 5 cm sugarú, 12 cm magas mérőhengerben, és egy ugyancsak 12 cm magas 5 cm sugarú szájnyílású, csúcsára állított kúp alakú pezsgőspohárban egyaránt 10 cm magas a folyadékszint. Mindkét edénybe beleejtünk egy 1 cm átmérőjű acélgolyót. (Persze óvatosan, hogy az üveg ne törjön össze.)

a) A mérőhengerben vagy a pohárban emelkedik meg jobban a vízszint?

b) Mennyi lesz a szintemelkedés a hengerben?

c) Mennyi a szintemelkedés a pohárban?

5. STATISZTIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

Leíró statisztika

433. Az ábrán látható grafikon az ezer lakosra jutó magyarországi élveszületések és halálozások 1965 és 1984 közötti számát mutatja.

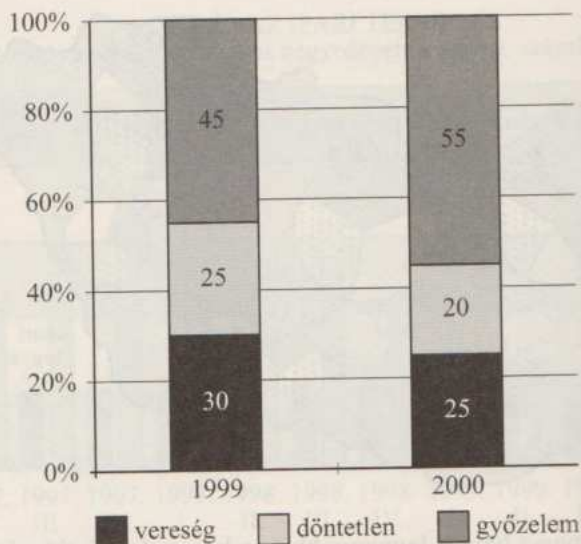


- Milyen következtetések vonhatók le az élveszületések számának alakulásából?
- Milyen következtetések vonhatók le a halálozások számának alakulásából?
- Milyen következtetések vonhatók le a két grafikon együtteséből Magyarország népességének változására vonatkozóan?

434. Az előző feladat ábráján látható grafikon segítségével válaszoljon a következő kérdésekre!

- Mikor kezdődött a népesség fogyása Magyarországon?
- Mikor volt a legmagasabb az élveszületések száma?
- Ha 1975-ben 10,6 millió volt a lakosok száma, akkor körülbelül hány gyermek született abban az évben?
- Milyen okai lehetnek, hogy a halálozások száma ugyan lassan, de mégis növekszik?

435. A város futbalcsapata évenként hatvan mérkőzést játszik. Az utóbbi két évben elért eredményeit a következő osztott oszlopdiagramon ábrázoltuk:



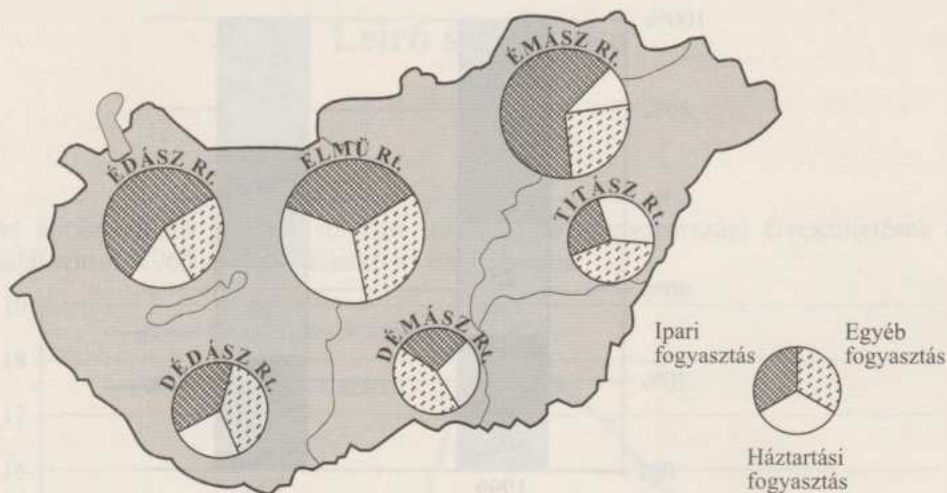
- Hány mérkőzést nyert meg a csapat 1999-ben?
- Hány pontot ért el a csapat 2000-ben, ha a győzelemért három, a döntetlenért egy pontot kapott? (A vereségért nem jár pont.)
- A két évet összehasonlítva milyen következtetések vonhatók le?

436. a) Adja meg grafikus formában az alábbi táblázat alapján az elmúlt öt év inflációs adatait!

Év	A fogyasztói ár változása %-ban az előző évihez képest (az előző évi a 100%)
1998	114,3
1999	110,0
2000	109,8
2001	109,2
2002	105,3

- Mekkora infláció volt az öt év alatt?
- Mennyi az évenkénti átlagos infláció?

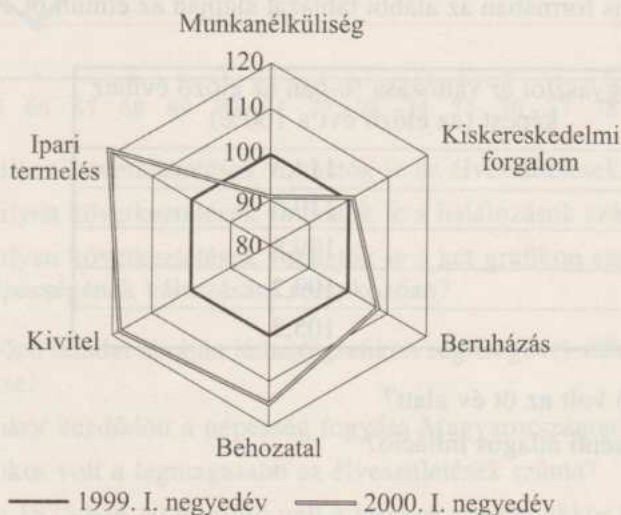
437. a) Az alábbi kördiagramok alapján hasonlítsa össze az egyes szektorok részesedéseit az 1998-as évre megadott áramszolgáltatóknál!



- b) Nevezze meg a három legnagyobb és a három legkisebb részesedéssel bíró szolgáltatót!

438. A Népszabadság 2000. május 31-i számának Piacgazdaság c. rovatában az itt látható diagram jelent meg:

FONTOSABB GAZDASÁGI JELZŐSZÁMOK
(1999. I. negyedév = 100%)

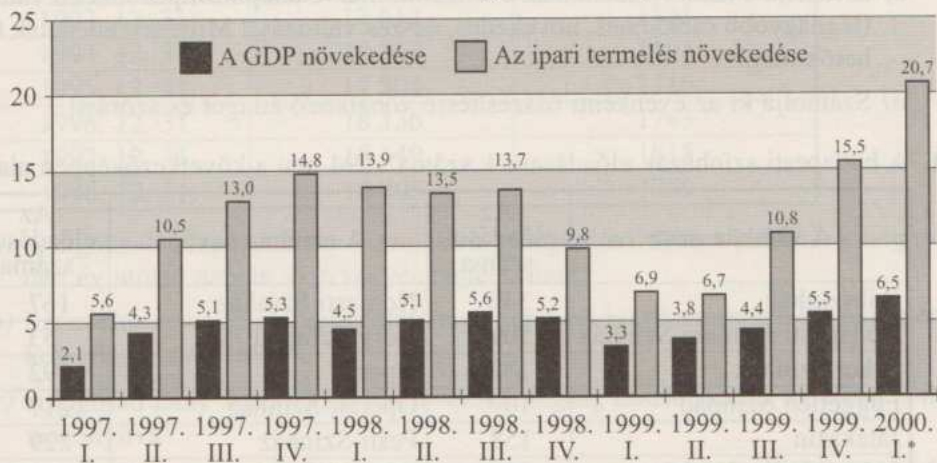


Forrás: KSH

- a) Az ábra alapján egy év alatt körülbelül hány százalékkal nőtt a beruházás?
b) Hozzávetőleg hányad részére csökkent a munkanélküliség?
c) Melyik változás volt a legnagyobb?

439. A GDP (nemzeti bruttó össztermék) és az ipari termelés alakulása (Népszabadság 2000. május 31.) látható a következő grafikonon.

A GDP ÉS AZ IPARI TERMELES
(változás az előző év azonos negyedéhez képest, százalékban)

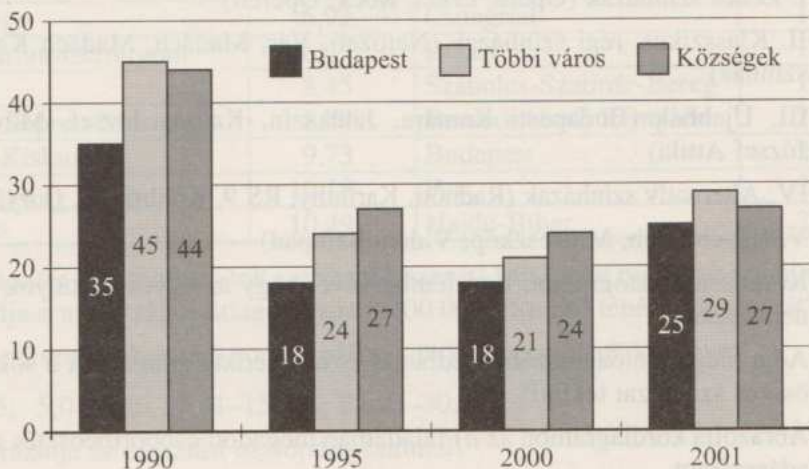


* A GDP növekedése a Reuters elemzői becslése alapján, az ipari termelés a szezonálisan kiigazított index

Forrás: KSH

- Az 1999. II. negyedév termelése az 1997. II. negyedévnek hány százaléka?
- Hány százalékkal nőtt a GDP a teljes három évet figyelembe véve?
- Hasonlítsa össze a GDP változását az ipari termelés változásával! Melyik változott gyorsabban? Vajon miért nincs teljesen összhangban a GDP és az ipari termelés?

440. A tízezer lakosra jutó lakásépítések számát mutatja a 2001. évi magyar statisztikai zsebkönyv adatai alapján készült grafikon:



- Miért hasonlíthatók össze ezek az adatok?

- b) Mely években volt a községekben legerőteljesebb a lakásépítés (Budapesthez, illetve a többi városhoz viszonyítva)?
- c) Készítsen vonaldiagramot mind a három típusról közös koordináta-rendszerben!
- d) Értékelje a lakások számának évenkénti, illetve településtípusonkénti változását (legnagyobb csökkenés, növekedés, összes változás)! Milyen tendenciák figyelhetők meg?
- e) Számolja ki az évenkénti összesítésre vonatkozó átlagot és szórást!

441. A budapesti színházak előadásainak száma 1994-ben a következőképpen alakult:

A színház neve	Az előadások száma	A színház neve	Az előadások száma
Bábszínház	342	Nemzeti Színház	167
Budapesti Kamara Színház	509	Ódry Színpad	53
Erkel Színház	187	Opera	192
Független Színpad	109	Operett Színház	217
Játékszín	158	Pesti Színház	229
József Attila Színház	250	Radnóti Színház	273
Karinthy Színház	84	Rock Színház	103
Katona József Sz.	337	RS 9 Színház	149
Kolibri Színház	353	Új Színház	209
Madách Kamara	379	Várszínház	259
Madách Színház	289	Vidám Színpad	270
Mikroszkóp Színpad	227	Vígyszínház	225
Művész Színház	196		

- a) Ossa a színházakat a következő csoportokba, és készítsen táblázatot az egyes csoportok összes előadásszámából, majd az eredményt ábrázolja oszlopdiagramon!
- I. Zenés színházak (Opera, Erkel, Rock, Operett)
- II. Klasszikus, régi színházak (Nemzeti, Vár, Madách, Madách Kamara, Víg-színház)
- III. Újabbak (Budapesti Kamara, Játékszín, Katona József, Művész, Pesti, József Attila)
- IV. Alternatív színházak (Radnóti, Karinthy, RS 9, Kolibri, Új, Ódry, Független)
- V. Egyéb (Báb, Mikroszkóp, Vidám Színpad)
- b) Készítsen hisztogramot, figyelembe véve, hogy az egyes osztályok elemszáma nem azonos!
- c) Adja meg az előadásszám mediánját és aritmetikai átlagát, ha a sokaságnak az összes színházat tekinti!
- d) Ábrázolja kördiagramon az a) feladatban megadott csoportbeosztás szerinti előadásszámot.
- e) Melyik ábrázolást tartja informatívabbnak: az elsőt vagy a másodikat?

442. A látási problémákkal küzdők egyesületében a vak és gyengénlátó tagság létszámának alakulását mutatja a következő táblázat 1993. és 1998. december 31. között. Az egyesületnek más tagja nincs.

Időpont	Vak tagok, fő	Gyengénlátó tagok, fő
1993. 12. 31.	17 612	1521
1994. 12. 31.	17 563	1592
1995. 12. 31.	17 804	1716
1996. 12. 31.	18 136	1743
1997. 12. 31.	18 649	1815
1998. 12. 31.	18 805	1789

- A tagoknak átlagosan hány százaléka a gyengénlátó? Ehhez határozza meg minden év utolsó napján az érvényes taglétszámot!
- Szemléltesse a vak és gyengénlátó tagok arányát kördiagramon a megadott értékek átlagai alapján!
- Átlagosan hány százalékkal nőtt évente a tagság összlétszáma, az előző évihez viszonyítva?
- Hány százalékkal nőtt a tagság összlétszáma a hat év alatt az 1993. 12. 31.-hez viszonyítva? Hogyan lehet ezt meghatározni a c)-re adott válaszból is?

443. A következő táblázat Magyarország 19 megyéjében és Budapesten a tébécébetegség 100 000 lakosra számított gyakoriságát mutatja.

Megye	Tébécések 100 000 főre számított gyakorisága	Megye	Tébécések 100 000 főre számított gyakorisága
Vas	2,61	Jász-Nagykun-Szolnok	11,58
Zala	4,06	Tolna	12,23
Veszprém	4,80	Nógrád	13,31
Somogy	6,92	Csongrád	14,75
Komárom-Esztergom	6,77	Békés	17,61
Fejér	8,45	Szabolcs-Szatmár-Bereg	19,24
Győr-Sopron-Moson	8,49	Borsod-Abaúj-Zemplén	21,65
Bács-Kiskun	9,73	Budapest	21,65
Baranya	10,18	Pest	22,00
Heves	10,49	Hajdú-Bihar	29,70

- Számítsa ki a fenti adatok számtani közepét! Mit mutat meg ez a számított adat? Megadja-e az országos átlagot, azaz a 100 000 főre eső tébécések számát?
- Készítsen gyakorisági sort az alábbi „ötös csoportokat” képezve:
0–5; 5,01–10; 10,01–15; ...; 25,01–30.
- Ábrázolja az eloszlást oszlopdiagrammal!
- Számítsa ki a mediántól vett átlagos abszolút eltérést!
- Számítsa ki a szórást!

444. A 2001 évi magyar statisztikai zsebkönyv adatai szerint Magyarországon a főbb vállalkozási formák százalékos megoszlása 1995-ben és 2001-ben a következőképpen alakult.

Vállalkozási forma	1995-ben (%)	2001-ben (%)
Kft.	14	18
Bt.	13	21
Egyéni vállalkozók	69	56
Egyéb	4	5

- a) Ábrázolja az adatokat oszlopdiagramon közös koordináta-rendszerben!
- b) Ha tudjuk, hogy 2001-ben 36%-kal több vállalkozás volt, mint 1995-ben, akkor hány százalékkal nőtt vagy csökkent az egyes vállalkozási formák száma a hat év alatt?
445. Egy kórház szülészetén a tavalyi évben 111 baba született. A születési tömegüket osztályokba sorolták, amelyet a következő táblázat ad meg.

Születési tömeg (g)	A babák száma (fő)
1000–1500	2
1501–2000	4
2001–2500	10
2501–3000	25
3001–3500	30
3501–4000	26
4001–4500	10
4501–5000	4

- a) Ábrázolja oszlopdiagrammal az eloszlást!
- b) Határozzon meg legalább két valamilyen értelemben átlagos jellemzőnek mondható születési tömeget!
- c) Tegyen fel olyan kérdést, amelyre a b)-ben megadott valamelyik középérték segítségével lehet válaszolni!
- d) Mekkora a szórás?
- e) Mennyire valószínű az adatok alapján, hogy egy baba legalább 3 kg-mal születik?
- f) Mit gondol, milyen arányú lehet a koraszületés százalékban kifejezve, ha az időben született gyerekek tömege ritkán van 2 kg alatt?
446. Egy 80 lakásos társasházban a lakások alapterülete a következő eloszlású:

Alapterület (m ²)	35	50	62	66	70	73
Darabszám	10	22	14	11	8	15

- a) Számolja ki a különböző alapterületű lakások relatív gyakoriságát!

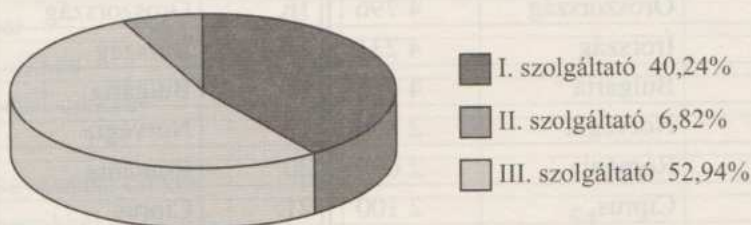
- b) Ábrázolja kördiagramon az eloszlást!
- c) Mennyi az összes lakás alapterületeinek számtani közepe?
- d) Mennyi a móduszuk?
- e) Mennyi a mediánjuk?
- f) Melyik közép milyen kérdés megválaszolásához lenne megfelelő információ?

447. Egy cégnél a dolgozók idegennyelv-ismerete szerint a következő létszámokat adták meg:

Idegennyelv-ismeret	1989-ben (fő)	1999-ben (fő)
Nyelvvizsgája van	8	32
Jól tud használni egy idegen nyelvet, de nincs nyelvvizsgája	12	18
Nincs idegennyelv-ismerete	86	16

- a) Az egyes csoportoknak milyen a százalékos megoszlása?
- b) Ábrázolja oszlopdiagramon közös koordináta-rendszerben a két év százalékos megoszlását!
- c) Milyen tendenciák figyelhetők meg tíz év elteltével?

448. Az ábrán a digitális mobilszolgáltatók piaci részesedését láthatjuk az aktív előfizetésekhez viszonyítva.



- a) Szemléltesse a piaci részesedést oszlopdiagramon!
- b) Igaz-e, hogy Magyarországon a lakosság több mint a felének az I. szolgáltató a mobilszolgáltatója?
- c) Ha ebben az időben 2,2 millió mobil-előfizető volt, akkor százezerre kerekítve hány új előfizetőt kell szereznie a II. szolgáltatónak, hogy utolérje az I. szolgáltatót, feltéve, hogy az ezalatt nem terjeszkedik?
- d) Az adatok alapján mekkora az esélye, hogy egy véletlenszerűen választott magyar lakosnak az I. szolgáltatónál van előfizetése?

449. Az „Európa számokban” című kiadvány szerint 1998-ban a turizmus szempontjából a legnépsebb országok a következők voltak (1. táblázat):

Helyezés	Célország	A turisták száma (ezer fő)	Helyezés	Ország	Az ország lakossága (millió fő)
1.	Franciaország	60 000	1.	Franciaország	58,6
2.	Spanyolország	44 866	2.	Spanyolország	39,2
3.	Olaszország	29 953	3.	Olaszország	57,6
4.	Nagy-Britannia	23 746	4.	Nagy-Britannia	59
5.	Magyarország	20 700	5.	Magyarország	10,3
6.	Lengyelország	19 200	6.	Lengyelország	38,6
7.	Ausztria	17 173	7.	Ausztria	8,1
8.	Csehország	15 500	8.	Csehország	10,3
9.	Németország	14 847	9.	Németország	82,1
10.	Svájc	11 500	10.	Svájc	7,1
11.	Görögország	10 130	11.	Görögország	10,5
12.	Portugália	9 706	12.	Portugália	9,9
13.	Törökország	7 083	13.	Törökország	63,8
14.	Hollandia	6 574	14.	Hollandia	15,6
15.	Belgium	5 224	15.	Belgium	10,2
16.	Oroszország	4 796	16.	Oroszország	147,1
17.	Írország	4 231	17.	Írország	3,7
18.	Bulgária	4 125	18.	Bulgária	8,3
19.	Norvégia	2 880	19.	Norvégia	4,4
20.	Románia	2 608	20.	Románia	22,6
21.	Ciprus	2 100	21.	Ciprus	0,8
22.	Dánia	1 614	22.	Dánia	5,3
23.	Horvátország	1 324	23.	Horvátország	4,5

1. táblázat

2. táblázat

- Sorolja osztályokba az adatokat, és készítsen osztályközös gyakorisági táblázatot!
- Rajzolja meg a gyakorisági hisztogramot!
- Foglalja táblázatba a turisták célország szerinti megoszlását, ha a célország: Franciaország, Spanyolország, Olaszország, Nagy Britannia, Magyarország!
- Az egy lakosra jutó turisták számában hazánk hol helyezkedne el, ha a fenti országok lakossága 1998-ban a 2. táblázat szerinti volt (százazatokra kerekítve).

450. Szerették volna felmérni, hogy az egyes országok fogyasztási szerkezete milyen. Az alábbi adatok szintén az „Európa számokban” című 1998-as kiadványból származnak, és azt mutatják, hogy a háztartások a bevételeiknek hány százalékát fordítják az egyes fogyasztási szektorokra.

A háztartások költségvetésének %-ában, 1995							
Ország	Élelmi-szer	Lakhatás	Egészségügy	Ruházat	Háztartás	Közlekedés	Egyéb
Csehország	44,1	7,9	6,1	9,2	9,2	7,9	15,6
Magyarország	35,7	9,5	4,8	8,7	7,6	8,7	25
Svédország	22,7	24,5	2,9	7,9	7,1	15,4	19,5
Olaszország	20,9	14,5	6,8	9,4	9,1	12,6	26,7
Németország	20,0	21,2	3,3	7,5	9,1	16,6	22,3

- A felsorolt országokban átlagosan hány százalékot költenek lakhatásra?
- Ábrázolja kördiagramon a magyar háztartások költségeinek %-os megoszlását!
- Mennyi az egyes szektorok szórása, átlagos abszolút eltérése? Ennek alapján melyek az átlaggal legkevésbé jól jellemezhető szektorok?

451. A következő táblázat a magyar háztartások kiadásait tartalmazza főcsoportok szerint 1995-ben.

Kiadási főcsoport	%-ban	Kördiagramon mekkora középponti szög tartozna hozzá?
Élelmiszer	18	
Élvezeti cikkek	8	
Ruházkodási cikkek	6	
Fűtés	8	
Tartós fogyasztási cikkek	4	
Egyéb iparcikkek		54°
Szolgáltatás		

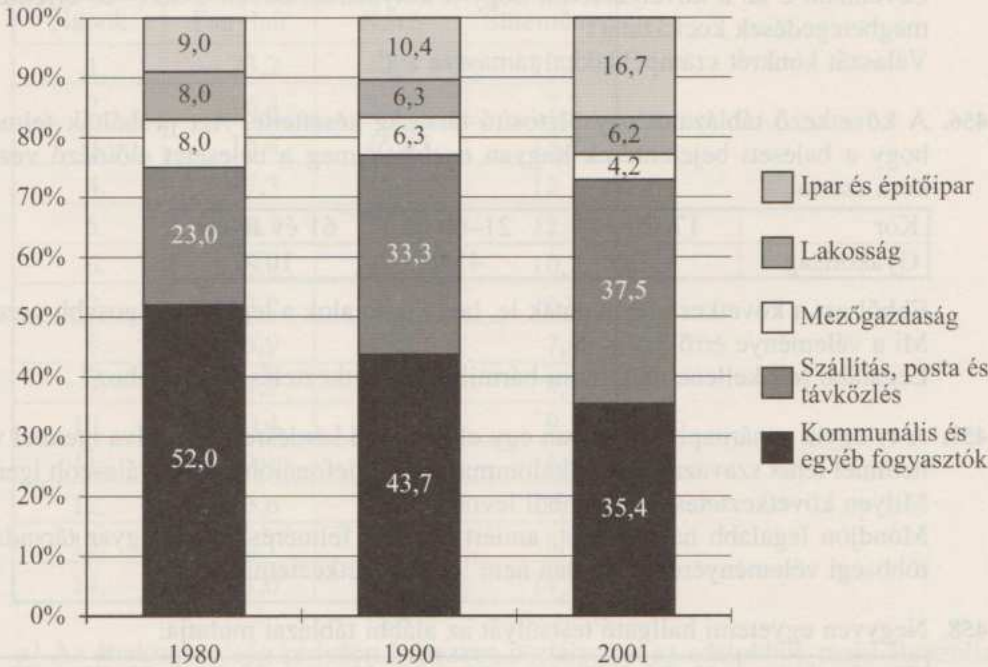
- Töltse ki a táblázat hiányzó adatait!
- Ábrázolja kördiagramon a táblázat adatait!
- Tudjuk, hogy 2002-re az infláció, illetve az árak változásai miatt a fűtésre fordított költség aránya körülbelül megkétszereződött, és a szolgáltatások költsége is 10%-kal több lett. Ha feltesszük, hogy a többi főcsoport egymáshoz viszonyított aránya nem változott, akkor az új információk szerint hogy néz ki a kiadási táblázat %-os oszlopa?

452. Az alábbi táblázatban az egyes európai országok tanárainak nettó (azaz kézhez kapott) éves jövedelmét olvashatjuk USA-dollárban 1998-ban. Tájékoztatásul ebben az évben a dollár/forint árfolyama 260 volt.

Ország	A tanárok éves nettó átlagjövedelme (ezer USD)
Svájc	56,8
Luxemburg	50,8
Németország	42,2
Hollandia	23,8
Dánia	20,5
Nagy-Britannia	19,9
Írország	19,8
Norvégia	19,1
Ausztria	18,8
Svédország	17,4
Finnország	17,1
Spanyolország	16,6
Ciprus	16,2
Franciaország	16,2
Belgium	16,0
Olaszország	13,0
Portugália	11,3
Görögország	10,1
Magyarország	2,1
Csehország	1,8

- Vajon hogyan számították ki az egyes országok éves, egy tanárra eső nettó jövedelmét?
- Ezen országok adatai alapján hogyan lehetne az európai átlagot kiszámítani? Ehhez még milyen adatra lenne szükség?
- Igaz-e, hogy ha ebben a táblázatban egy ország megelőz egy másikat, akkor ott a tanárok több fizetést kapnak, mint a másokban? Válaszát indokolja meg!
- Melyik ország a medián? Ennek mi a jelentése?

453. A 2001. évi magyar statisztikai zsebkönyv egyik oszlopdiagramja látható a következő ábrán.



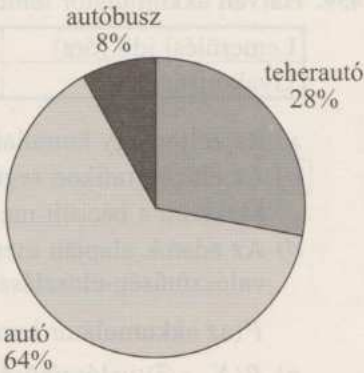
- a) Készítsen kördiagramot 2001-ről!
- b) Milyen tendencia (irányzat) figyelhető meg az energiafelhasználás szerkezetében?

454. Egy adott évben, a statisztikai adatok szerint 20%-kal nőtt a közúti forgalomban részt vevő gépjárművek száma, közli az egyik napilap. A hírlapíró ebből arra következtet, hogy gazdagodnak a családok, hiszen 20%-kal több gépkocsi fut az utakon.

- a) Mutasson konkrét számpéldát, amely szerint a személygépkocsik száma 10%-kal csökkent, mégis a közúti forgalomban részt vevő gépjárművek száma 20%-kal nőtt!

Három nagy osztályba soroltuk a közúti járműveket: személygépkocsik, autóbuszok és tehergépkocsik (beleértve a kamionokat és minden szállító járművet). A kördiagramról olvashatjuk le az előző évbeli forgalomból való részesedésüket.

- b) Mennyivel változott a személygépkocsik száma egy év alatt, ha tudjuk, hogy a tehergépkocsik száma 38%-kal növekedett, míg az autóbuszoké csak 5%-kal?



455. Egy kórházban megkérdezték a szív- és érrendszeri problémákkal bekerült betegeket háziállat-tartási szokásairól. Kiderült, hogy 70%-uknak van kutyája. Levonható-e az a következtetés, hogy a kutyatartás növeli a szív- és érrendszeri megbetegedések kockázatát?

Válaszát konkrét számpéldákkal támassza alá!

456. A következő táblázatot egy biztosító társaság készítette. Azt próbálták felmérni, hogy a baleseti bejelentések hogyan oszlanak meg a balesetet előidéző vezetők kora szerint.

Kor	17–20 év	21–60 év	61 év felett
Gyakoriság	325	4788	1076

Ebből azt a következtetést vonták le, hogy a fiatalok a legbiztonságosabb vezetők. Mi a véleménye erről?

Legalább mit kellene még tudni bármilyen következtetés levonásához?

457. A tv egyik vasárnapi műsorában egy eldöntendő kérdésre válaszolva igennel vagy nemmel lehet szavazni. Egy alkalommal 1642 telefonálóból 82% válaszolt igennel. Milyen következtetést lehet ebből levonni?

Mondjon legalább három okot, amiért ebből a felmérésből a magyar társadalom többségi véleményére egyáltalán nem lehet következtetni!

458. Negyven egyetemi hallgató testsúlyát az alábbi táblázat mutatja:

Tömeg (kg)	53–56	57–60	61–64	65–68	69–72	73–76	77–80
Gyakoriság	2	3	4	11	9	6	5

a) Készítsen hisztogramot az adatokhoz!

b) Becsülje meg a negyven diák átlagos testsúlyát!

c) Mekkora a becslt szórás? Mekkora a relatív szórás (azaz a szórás és az átlag hányadosa)?

d) Rajzolja meg a kumulatív gyakorisági eloszlást!

459. Hatvan akkumulátor lemerülési idejét mutatja az alábbi táblázat:

Lemerülési idő (óra)	5–5,9	6–6,9	7–7,9	8–8,9	9–9,9	10–10,9
Gyakoriság	7	8	10	20	12	3

a) Rajzoljon egy kumulatív gyakorisági eloszlást!

b) Az előző grafikon segítségével becsülje meg a mediánt!

c) Mekkora a becslt medián és az átlagos lemerülési idő különbsége?

d) Az adatok alapján mennyire becsüli a λ -t, ha az akkumulátorok élettartamának valószínűség-eloszlása exponenciális, azaz

$$P(\text{az akkumulátor lemerülési ideje kisebb, mint } t) = 1 - e^{-\lambda t}?$$

e) $P(X < 7)$ valószínűséget hasonlítsa össze a relatív gyakorisággal! Mekkora az eltérés?

Mit mond ennek alapján a modellről?

460. Egy kávézó forgalmát két hétig feljegyezték. A táblázat a kapott értékeket tartalmazza (a bevétel ezer forintban értendő).

Napok	Fagylalt	Kávé	Sütemény
1.	23,2	42,6	10,8
2.	16,4	38,2	7,2
3.	16,8	45,43	13,2
4.	27,3	45,1	12
5.	8,7	31,4	12,9
6.	8,9	29,6	10,2
7.	3,2	31,8	6,9
8.	15,9	33,2	7,8
9.	14,7	25,2	8,7
10.	20,4	35,1	9,3
11.	13,1	39,1	6,2
12.	13,6	29,8	12,7
13.	18,1	32,1	8,9
14.	21,0	40,3	11,4

- a) Az áttekinthetőség kedvéért képezzen osztályokat az adatokból, majd ábrázolja a termékek eladásából származó bevételeknek megfelelően az adott osztályba eső napok gyakoriságát (az egyes termékekre külön-külön)!
- b) Határozza meg az egyes termékek eladásából származó átlagos napi bevételt!

461. Véletlenszerűen választunk 15 darab, a felirat szerint 250 grammos margarin kockát.

Mérésünk eredménye grammra kerekítve a következő:

261, 252, 242, 240, 254, 257, 252, 250, 265, 249, 253, 248, 259, 246, 252

- a) Mennyi az átlagos margarintömeg?
- b) Mekkora a szórás?

462. A következő adatok egy híres slágereket tartalmazó CD-gyűjtemény négy lemezének percben mért lejátszási idejét tartalmazzák. Két szám között 3 s szünet van.

1. CD: 4,33, 8,02, 4,47, 5,11, 5,05, 3,17, 5,06, 3,42, 3,33, 3,41

2. CD: 8,46, 3,25, 4,41, 5,19, 3,36, 4,25, 3,26, 4,48, 6,20, 6,33

3. CD: 5,15, 6,25, 8,19, 5,03, 7,41, 6,28, 7,17, 9,12, 6,53, 4,19

4. CD: 2,57, 6,45, 7,31, 5,41, 5,13, 6,16, 7,51, 6,28, 8,58, 7,05

a) Mennyi egy szám átlagos lejátszási ideje? Melyik középértéket érdemes megadni?

b) Mekkora a terjedelem és a szórás?

c) Mennyi lehet egy CD átlagos lejátszási ideje?

d) Kerekítse percekre az adatokat, és ábrázolja hisztogramon az így kapott értékeket!

e) Ha a számok közül véletlenszerűen választunk egyet, akkor legalább 0,5 eséllyel legfeljebb milyen hosszú számot választunk? Melyik középérték segít leginkább e kérdés megválaszolásához?

f) Valaki véletlenszerűen választ egy öt számból álló műsorblokkot. Mennyi lesz a műsorblokk lejátszási idejének várható értéke?

463. Két osztálynak ugyanazt a matematikafeladatot adták, és feljegyezték a percben mért megoldási időket.

A osztály: 7,4 8,2 6,1 9,3 7,4 8,5 7,2 6,8

6,4, 7,7 9,6 8,8 8,9 7,2 7,3 7,0

5,9 8,9, 7,6 9,3 7,4 7,9 9,1 5,7

B osztály: 8,2 7,3 6,9 5,5 6,1 9,3 8,1 7,2 7,7,

6,7 7,6 8,4 8,8 5,8 6,9 8,2 9,5 9,1

5,4 6,4, 7,7 5,2 7,1 6,6 5,9 6,7 6,0

a) Melyik osztály a gyorsabb?

A válaszhoz számítsa ki az átlagos megoldási időket, a mediánt, a móduszt, a terjedelmet, és a szórást.

b) Melyik osztályban nagyobb a relatív szórás?

c) Milyen eloszlás adódik a két osztályban, ha a megoldási időket a szokásos módon percre kerekítjük. Ekkor mi lesz az átlag, a medián és a módusz?

d) Legfeljebb mennyivel térhet el a kerekítéssel számolt átlagos megoldási idő és a „pontos átlag”?

Mutasson konkrét számpéldát a maximális eltérésre!

464. A következő táblázat a Népszava 2002. augusztus 5-i számában megjelent táblázatnak egy részlete, amely az Európai Unióba belépni szándékozó tagjelölt országok néhány adatáról ad tájékoztatást.

- Mely mutatókban van lemaradva Magyarország az EU-átlagtól?
- Mely mutatóban jobb Magyarország az EU-átlagnál?
- Melyik az a mutatószám, amely nem ad lehetőséget összehasonlításra?
- A várható élettartamot tekintve egész Európában a férfiak, illetve a nők esetében hány százalék van az átlag szórásnyi, illetve kétszórásnyi környezetében?
- A csecsemőhalálozás adatait figyelembe véve mekkora az átlag, mekkora a szóráss, mekkora a medián? Mi lehet az oka a medián és az átlag közötti viszonylag nagy eltérésnek?
- Csoportosítsa a gépkocsik számát egyenlő szélességű osztályokba, és rajzolja fel a gyakorisági diagrammot!

Az EU-hoz csatlakozni kívánó országok néhány adata 2002-ben
(Az első oszlopban az EU-átlagérték)

	Várható élettartam/férfiak	Várható élettartam/nők	Csecsemőhalálozás (ezer születésre)	Gépkocsik száma (ezer főre számítva)	Munkanélküliség (%)	Egyetemest végzettek száma (ezer fő) (25–29 évesek közül)
Európai Unió	74,9	81,2	4,9	461	9,3	38 382
Ciprus	75,3	80,4	5,6	400	4,2	81
Csehország	71,6	78,3	4,1	362	9,3	604
Észtország	63,7	76,1	8,4	339	6,5	195
Lettország	64,9	76,0	10,4	235	8,2	214
Lengyelország	69,7	78,0	8,1	259	18,1	2 118
Litvánia	67,6	77,9	8,5	317	12,9	764
Magyarország	64,9	75,6	9,2	235	5,6	689
Málta	75,1	78,3	6,1	540	5,1	1,7
Szlovákia	69,2	77,2	8,6	236	19,7	273
Szlovénia	71,9	79,1	4,9	426	11,8	162
Bulgária	68,1	75,3	13,3	244	17,7	743
Románia	67,0	74,2	18,6	139	8,6	998
Törökország	66,9	71,5	35,3	68	9,0	2 105

465. Egy műveltségi teszten elérhető maximális pontszám 10. A tesztet 26-an írták meg a következő eredménnyel.

Pontszám	3	4	5	6	7	8	9	10
Gyakoriság	6	3	1	2	0	5	5	4

- a) Számolja ki a számtani közepet, a mediánt és a móduszt!
- b) A tanár gratulált az osztálynak, hogy több mint háromnegyed az átlag fölött volt. Melyik átlagra gondolt a tanár?
- c) Mekkora az osztály szórása, relatív szórása?
- d) Az előző kérdésekre adott válaszai alapján röviden értékelje az osztály teljesítményét!
466. 100 és 200 között a következő prímszámok találhatók: 101; 103; 107; 109; 113; 127; 131; 137; 139; 149; 151; 157; 163; 167; 173; 179; 181; 191; 193; 197; 199.

- a) Hány szám kerül az egyes csoportokba, ha tízes oszlopszélességeket választunk?
- b) Mennyi a csoportokba sorolt értékek átlaga, módusza, mediánja, szórása?

467. A gyerekek gyakran találhatnak ki saját titkosírást, amelyben minden betűt egy különleges karakterrel jelölnek. Ahhoz, hogy vissza tudjuk fejteni az így írt szöveg tartalmát, megvizsgáljuk az egyes karakterek előfordulásának gyakoriságát, majd egy igen hosszú szövegnél is elvégezzük ezt a számítást.

Egy 40 009 karaktert tartalmazó szövegben a következő számban fordultak elő az egyes betűk:

a	3303	h	580	o	1598	u	317
á	1521	i	1869	ó	517	ú	123
b	666	í	224	ö	300	ü	277
c	195	j	357	ő	364	ű	93
d	628	k	1912	p	413	v	911
e	3967	l	2598	q	9	w	0
é	1590	m	1263	r	1411	z	1838
f	393	n	2274	s	2888	x	57
g	1540	t	307	y	941		

- a) Mennyi az e betű relatív gyakorisága a 40 009 karaktert tartalmazó szövegben?
- b) 100 karaktert tartalmazó titkosírásban várhatóan hányszor fordul elő az e betűt takaró karakter?
- c) A megfejtést követően kiderült, hogy az e betű a 100 karakterből 12-szer fordult elő a szövegben. Mekkora a valószínűsége, hogy ekkora vagy még nagyobb eltérést kapjunk a hosszú szöveg alapján már előfordulási valószínűségnek tekintett relatív gyakoriságtól egy 100 karakter hosszú sorozatban?

468. Az iskolai büfében negyven napon keresztül feljegyzik, hogy az adott napon hány fiú, illetve lány vásárolt egy bizonyos fajta csokoládét. Az alábbi adatokat kapták:

Lányok

10, 16, 35, 29, 30, 11, 18
13, 33, 13, 10, 32, 40, 25
27, 25, 18, 38, 43, 26, 44
24, 39, 44, 29, 11, 23, 19
42, 36, 21, 16, 31, 32, 41
48, 34, 28, 11, 27

Fiúk

17, 32, 37, 42, 20, 41, 11
40, 25, 10, 32, 39, 34, 31
49, 47, 17, 14, 26, 36, 29
42, 22, 19, 42, 38, 20, 28
24, 44, 34, 20, 41, 28, 48
46, 26, 28, 42, 22

- a) A két adatsor összehasonlításával válaszoljon az alábbi kérdésekre:

A lányok-e vagy inkább a fiúk vásárolják ezt a csokoládét?

Milyen százalékos arányban fordulnak elő a „lányos” (amikor több lány vett csokit), illetve „fiús” (amikor több fiú vett csokit) napok a 40 nap során?

Igaz-e az a következtetés, hogy ha több „lányos” nap van, mint „fiús” akkor a lányok vesznek inkább a csokoládét, feltéve, hogy körülbelül egyforma a fiúk és a lányok száma az iskolában?

- b) Modellezzük az előző rész lányokra vonatkozó adatait egy binomiális eloszlású változóval! Ennél feltételezzük, hogy minden lány a többi lánytól függetlenül ugyanolyan eséllyel vesz egy nap csokoládét. (Ezek elég irreális feltételek.) Ha tudjuk, hogy 220 a lányok száma, akkor a 40 nap átlagából írjunk fel egy becslést egy lány csokoládévásárlási esélyére!

- c) Készítse el a 40 „lányos” adat gyakorisági eloszlását! Mennyire „hasonlít ez egy binomiális eloszláshoz?

- d) Mekkora a valószínűsége a b) modell alapján, hogy a 40 nap alatt csak ötször fordul elő olyan eset, hogy legfeljebb 12 lány vesz csokit?

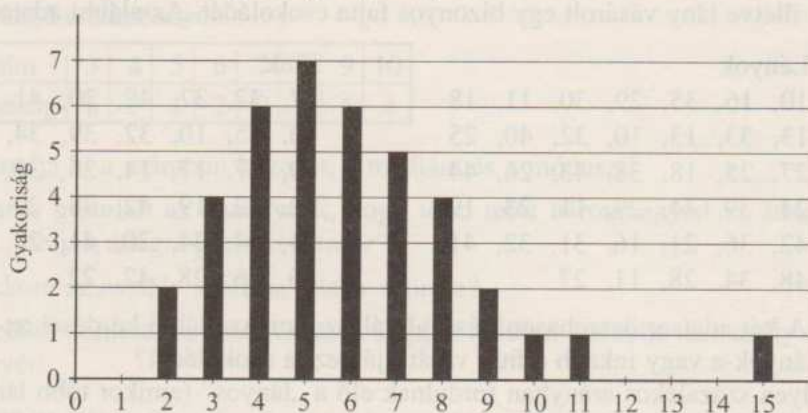
469. Egy szállítmányozással foglalkozó cég költségeinek változásait szeretnénk elemezni. Ehhez az alábbi információk állnak rendelkezésünkre:

Év	2000	2001	2002
Üzemanyag (Ft/l)	235	234	240
Szerviz költség jármű/hó (Ft)	60 000	70 000	100 000
Béreköltség (Ft/óra)	1500	1650	2500

Tudjuk, hogy a három típusra fordított összes kiadás arányai viszonylag stabilan 50 : 1 : 150 arányt mutatnak a táblázat egységeivel számolva, azaz az üzemanyagra fordított összes költség ötvenszerese a teljes szervizköltségnek, és harmada a sofőrökre fordított bérjellegű költségnek.

- a) Hány százalékkal nőtt a cégnek a szállítmányozásra fordított költsége két év alatt?
- b) Ha az infláció 6, illetve 5,5% volt 2000 és 2001-ben, akkor reálértékben hány százalékkal több a költség? (A reálérték a vásárlóerő, tehát az inflációval ez csökken.)

470. Egy adathalmaz gyakorisági diagramját látjuk az ábrán.



- Adja meg az adatok mediánját és móduszát!
- Mutassa meg, hogy az átlag 5,95 és a szórás 2,58! Magyarázza meg ezek segítségével, hogy miért tekinthető a 15 kiugró (extrém) adatnak!
- Adja meg a mediánt és a móduszt, ha elhagyjuk a kiugró adatot!
- Hogyan változik az átlag és a szórás a kiugró adat elhagyásával?

Az eloszlás ferdesége alatt a szimmetriától való eltérést értjük.

Ennek három jellemzése is lehetséges:

i) pozitív ferdeség: ha módusz, medián, átlag a középpértékek növekvő sorrendje
negatív ferdeség: ha átlag, medián, módusz a sorrend.

ii) pozitív ferdeség: ha a medián és az alsó quartilis különbsége kisebb, mint a felső quartilis és a medián különbsége; 0 a ferdeség, azaz szimmetrikus az eloszlás, ha egyenlők, negatív ferdeség: ha a medián és az alsó quartilis különbsége nagyobb, mint a felső quartilis és a medián különbsége.

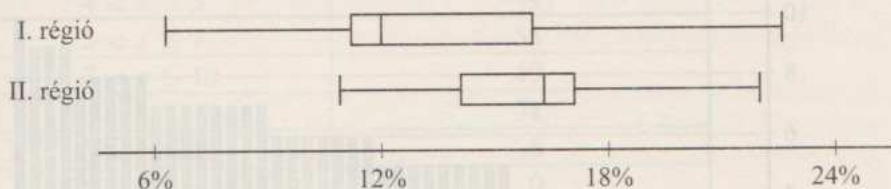
iii) mérőszámmal: $\frac{\text{átlag} - \text{medián}}{\text{szórás}}$, amikor ez pozitív, negatív, illetve 0, akkor pozitív, negatív a ferdeség, illetve ha 0, akkor szimmetrikus.

- Hogyan változik ez a három ferdeségi jellemző a kiugró adat elhagyásával?

471. A ferdeség előjelére bevezetett három jellemző viszonyát szeretnénk megvizsgálni, nevezetesen azt, hogy előfordulhat-e, hogy valamelyikük előjele eltér a másiktól. Az előző feladatban bevezetett i), ii), illetve iii) fogalomról beszélünk.

- Melyik pozitív vagy negatív előjele vonja maga után a másik hasonló előjelét?
- Ahol nem lehet következtetni, ott hozzon mindkét lehetőségre numerikus példát!

472. A következő két „sodrófadiagram” (szokás olykor dobozdiagramnak is mondani az angol box plot alapján) két magyar régió városainak munkanélküliségi rátáját százalékban ábrázolja. Ennél az ábrázolásnál a két „sodrófa” vége az adatok minimumát, illetve maximumát mutatja, a téglalap alsó vége az adathalmaz alsó negyedelője (kvartilise), a „középvonal” az adathalmaz mediánja, míg a téglalap felső vége a felső negyedelő (kvartilis).

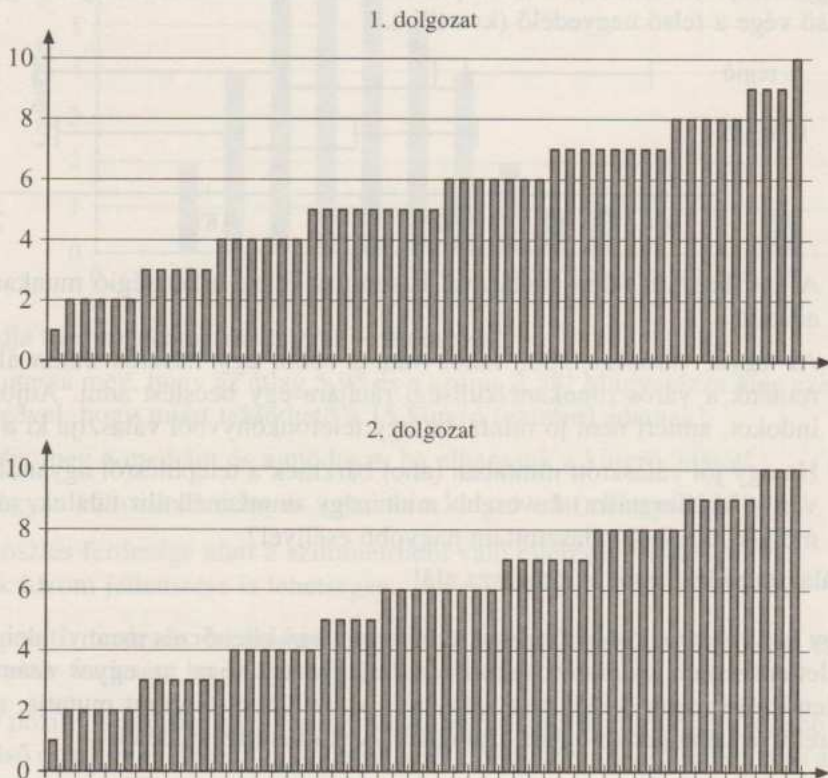


- a) A két diagram felhasználásával hasonlítsa össze a két régió munkanélküliségi adatait!
- b) Az egyik városban 5000 lakos van, s ebből egy húszfős minta alapján szeretnénk a város munkanélküliségi rátájára egy becslést adni. Adjon meg két indokot, amiért nem jó minta, ha egy telefonkönyvből választja ki a húsz főt!
- c) Ha egy jól választott mintában (ahol bárkinek a településről ugyanolyan esélye van a kiválasztásra) kevesebb mint négy munkanélkülit találunk, akkor vajon melyik régióból választottam nagyobb eséllyel?
- Válaszát számítással is támassza alá!
473. Egy könyvvizsgáló cég szeretné tudni, hogy egy ellenőrzés mennyi ideig tart, ezért véletlenszerűen választott esetekben feljegyezte, hogy az egyes számlakönyvek ellenőrzése mennyi időt vett igénybe. Ezt az alábbi táblázat mutatja, ahol percre kerekítve láthatjuk az egyes számlakönyvek ellenőrzési idejét.

37, 33, 24, 36, 31, 31, 24, 51, 31, 47, 40, 40, 55,
 42, 30, 34, 41, 36, 42, 46, 34, 38, 33, 42, 56, 37,
 39, 36, 31, 30, 45, 50, 43, 41, 46, 41, 30, 51, 36,
 21, 32, 34, 62, 43, 46, 34, 34, 56, 32, 62, 30

- a) Készítsen egy „sodrófadiagramot” (amin a minimum, az alsó és felső negyedelő, a medián és a maximum szerepel, lásd a 472. feladatot)!
- b) Számolja ki a móduszt, a mediánt és az átlagot!
- c) Napi nyolcórás munkaidővel és három könyvelő alkalmazottal számolva várhatóan napi hány ellenőrzést fognak tudni elvégezni?
- d) Mekkora lesz a várható szórás a minta alapján?

474. Egy vizsga két részből, két dolgozat megírásából áll. Az alábbi ábrákon a tanulók által a dolgozantonként szerzett pontokat ábrázoltuk. Az ötven vizsgázó mindegyike mindkét dolgozatot megírta, amelyeken tíz-tíz pontot lehetett elérni. A tanulókat mindkét esetben teljesítményük szerint rangsoroltuk.



- Készítse el mindkét dolgozat pontszámgyakoriság eloszlását!
 - Melyik rész sikerült jobban? Válaszát számítással támassza alá!
 - Ha összesen hat pontot kellett elérni az elégségeshez, akkor legfeljebb hány hallgató bukott meg a vizsgán?
 - A jeleshez 17 pont kellett. Legfeljebb hány jeles lehetett?
 - Miért nem lehet pontos válaszokat adni a c) és a d) esetekben?
475. A következő táblázatban egy kis telefonközponton átmenő hívások időtartamát jegyezték fel egy bizonyos napszakban.
- Rajzolja fel a kumulatív gyakorisági diagramot a táblázat alapján!
 - Határozza meg a beszélgetések hosszának a mediánját és az interkvartilis terjedelmet!
 - Milyen kérdésre lenne jó válasz a medián, és milyenre az átlagos beszélgetési idő?

A beszélgetés hossza (perc)	Gyakoriság
$0 < x \leq 1$	10
$1 < x \leq 2$	26
$2 < x \leq 3$	34
$3 < x \leq 4$	40
$4 < x \leq 5$	49
$5 < x \leq 7$	55
$7 < x \leq 10$	49
$10 < x \leq 15$	31
$15 < x \leq 25$	6
$25 < x$	0

d) Ha ebben az időszakban minden megkezdett perc hívásdíja 15 Ft + 25% áfa, akkor ezen hívásokkal mekkora bevételhez jutott a telefontársaság? Melyik középértékből lehet ezt gyorsan kiszámolni?

476. Három iskola diákjai írják meg ugyanazt a feladatsort. Az egyes iskolák diákjainak átlagos teljesítménye rendre 63%, 48%, illetve 72% volt. Az egyes iskolákból 23, 30 illetve 15 tanuló vett részt.

a) Hány százalékos az összes tanuló teljesítménye?

*b) Ha az egyes iskolák szórásai kerekítve 4, 8 és 6 voltak, akkor mit lehet mondani az összes diák teljesítményének a szórásáról?

477. Két osztályban megírják ugyanazt a matematikafelmérőt. Az egyikben a maximális 100-ból 64 pont az átlagos teljesítmény, míg 59 pont a medián; a másikban 52 pont az átlag és 57 a medián. A szórás az első esetben 12, a másikban csak 10. Tudjuk még, hogy az első osztály 25 fős, a második pedig 32 fős.

a) Meg lehet-e mondani a két osztály közös átlagát, illetve mediánját?

*b) Meg lehet mondani az egyesített adathalmaz szórását is? Ha igen, akkor hogyan?

c) Hasonlítsa össze a két osztály teljesítményét a fenti adatok alapján!

478. Ugyanazt a szöveget negyven, érettségire készülő jó tanuló diákkal elolvastatták. Az átlagos olvasási idő 6 perc 2 másodperc volt, a szórás pedig 17 másodperc. Még tíz tanulóval elvégzik a kísérletet, a következő eredménnyel:

5 perc 24 mp; 6 perc 25 mp; 6 perc 11 mp; 6 perc 18 mp; 6 perc 39 mp; 5 perc 36 mp; 6 perc 21 mp; 6 perc 27 mp; 5 perc 48 mp; 6 perc.

a) Határozza meg az ötven tanuló eredményének az átlagát!

*b) Határozza meg az ötven tanuló eredményének szórását!

c) A tíz későbbi tanuló eredményének hány százaléka esik az átlag egy-, illetve kétszörösnyi környezetébe?

479. Egy csokoládégyárban a csokoládé tömegét ellenőrizték. A véletlenszerűen választott 200-as mintában a 100 grammos csokoládék átlaga 99,8 gramm lett, az empirikus szórásra pedig 0,21 adódott.

- a) Elfogadná-e véletlen ingadozásnak az eredményt, vagy azt gondolja, hogy a gyártott csokoládék tömege nem éri el a 100 grammot? Válaszát indokolja!
- b) Legfeljebb hány tábla lehetett a kiválasztott 200 csokoládé között legalább 100 grammos, ha a csokik tömegét grammra kerekítették?

480. Egészítse ki az alábbi táblázatot úgy, hogy az adatok alapján a tejivás és a vese-problémák függetlenségére következtethessen!

	Rendszeresen tejet iszik	Ritkán vagy egyáltalán nem iszik tejet	Összesen
Semmilyen vese- panasza nincs	46		
Volt vagy van veseproblémája		46	
Összesen			200

A lehető legközelebb legyen az eredmény a függetlenség feltételezéséhez, azaz ha nem is pontosan teljesül, de más adattal még kevésbé.

481. Vajon független tulajdonságnak tekinthető-e az alábbi minta alapján a szem- és a hajszín? Válaszát indokolja!

A szem színe A haj színe	Kék	Nem kék	Összesen
Szőke	32	53	85
Barna	13	41	54
Fekete	9	52	57
Összesen	54	146	200

482. Két ország (A és B) népességeloszlása a következő:

Kor	A népessége (millió fő)	B népessége (millió fő)
10 év alatt	15	2
10–19	11	3
20–39	18	5
40–59	7	13
60–79	3	14
80–99	1	7

- a) Ugyanabban a koordináta-rendszerben ábrázolja a két adatsort!
- b) Mennyi a B ország népessége?

c) Mekkora az átlagos életkor és mediánéletkor az egyes országokban?

d) Milyen különbségeket lát a két ország népességeloszlása között?

483. Egy hatfős társaságban ketten haragosok. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy kör alakú asztalhoz véletlenszerűen leültenve a társaságot a haragosok éppen egymás mellé kerülnek?

484. Egy osztályban 14 lány és 6 fiú van. Sorsolással kiválasztanak maguk közül két képviselőt.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy két fiút sorsolnak ki?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy fiút és egy lányt sorsolnak ki?

485. A 12 fiúból és 21 lányból álló osztály képviselőt véletlenszerűen választanak ki három főt egy iskolai rendezvényre.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy egyenművekből álljon a csapat?

b) Ha tudjuk, hogy a csapatban van egy lány, akkor milyen eséllyel lesz a másik két fő is lány?

c) Mekkora az esélye, hogy az osztályban a két legjobb barátnő együtt legyen képviselő a rendezvényen?

486. Egy iskola 11. évfolyamán öt különböző nyelvet tanulnak, amihez egyéni választás szerint még a latin tartozhat. A következő táblázatban láthatjuk, hányan tanulják az egyes nyelveket. Minden tanuló csak egy úgynevezett alapnyelvet (lásd a táblázat oszlopfőit) tanul, amihez a latint választhatja.

Nyelvek	Angol	Francia	Német	Olasz	Spanyol
Latint is tanul	12	13	5	6	5
nem tanul	12	2	6	0	3

Számolja ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott tanuló

a) angolul tanul;

b) aki angolul tanul, a latint is választotta;

c) nem választotta a latint;

d) akiről tudjuk, hogy latint tanul, az angolul is tanul!

487. Mekkora az esélye annak, hogy valaki nyer az ötös lottón, azaz legalább két találatot ér el?

488. Egy osztályban a 12 fiú van többségben. Ebből az osztályból két tanulót választunk ki véletlenszerűen. Hány lány jár az osztályba, ha az esély, hogy a két kiválasztott tanuló különböző nemű, éppen 0,4?

489. Egy húszfős nemzetközi osztályba hat belga, hat holland, négy olasz, két angol és két német tanuló jár. Közülük véletlenszerűen négy tanulót kiválasztunk.
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy mind a négy kiválasztott belga?
 - Mekkora a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott azonos nemzetiségű?
 - Mekkora a valószínűsége, hogy mind a négy kiválasztott különböző nemzeti-ségű?
490. Egy munkadarab három munkafázisban készül. Az első fázisban 1%, a másodikban 2%, a harmadikban 3% valószínűséggel következik be gyártási hiba. A munkadarab selejtnek minősül, ha a három fázisból akár csak egyben is hiba volt. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy munkadarab nem lesz selejtes?
491. Éva három barátját, Andrást, Bélát és Csabát próbálja egymás után telefonon felhívni.
- Hányféle kimenetele lehetséges ennek a hívássorozatnak aszerint, hogy melyik barátjával sikerült beszélnie, és melyikkel nem?
 - Adja meg a lehetséges kimeneteket három egymás utáni karakterből álló kódokkal!
- Adja meg a megfelelő karaktersorozatok felhasználásával az alábbi eseményeket:
- Andrással nem sikerült beszélni.
 - Andrással és Bélával nem sikerült beszélni.
 - Legalább egy baráttal nem sikerült beszélni.
492. A vizsgán az egyik tesztkérdésre négy lehetséges válasz közül kell a két helyes feleletet kiválasztani. Az egyik vizsgáló véletlenszerűen jelöl meg két feleletet. Jelentsék az elemi eseményeket a különbözőképpen kitöltött válaszlapok.
- Sorolja fel az eseménytér elemeit!
 - Adja meg a következő eseményt: „a két helyes felelet az első három lehetséges válasz között van.”
 - Mi a *b*) feladatban megfogalmazott esemény komplementere?
493. Egy játékautomatába 100 Ft-ot kell bedobni. A bedobott pénzt az automata véletlenszerűen 50%-os eséllyel vagy elnyeli, vagy visszaadja. Az utóbbi esetben még 100 Ft nyereményt is ad hozzá.
- Milyen nyeremények lehetnek, ha kezdéskor 100 Ft-unk van, s legfeljebb három menetet játszhatunk, feltéve, hogy tudunk pénzt bedobni?
 - Mekkora eséllyel lesz 400, 200, illetve 0 Ft-unk a játék végén?
494. Egy versenyen az *A* játékosnak felváltva kell *B*-vel és *C*-vel játszania. Egy mérkőzés három egymást követő játszmából áll, és *A* akkor nyeri meg a mérkőzést, ha két egymás utáni játszmában győz. Az *A* játékos megválaszthatja, hogy *B*-vel vagy *C*-vel kezdi-e a játékot.

Mit tanácsolna neki, ha tudja, hogy B erősebb ellenfél, mint C , és természetesen nyerni szeretne?

495. A poharakat előállító gyárban két gépsoron készülnek a poharak. Az egyik gépsor a termékek 60%-át, a másik csak 40%-át adja. A nagyobb mennyiségben termelő gépsoron azonban a hibásak aránya 10%, míg a másik soron csak 4%. Az egyik nap végén az összes elkészült pohárból véletlenszerűen választunk egyet.

a) Mekkora a valószínűsége, hogy ez a pohár hibátlan?

b) Mekkora az esélye annak, hogy ha a választott pohár hibás, akkor a nagyobb termelékenységű (és hibaszázalékú) gépsoron állították azt elő?

496. Öt, külsőre teljesen egyforma gyufásdoboz van a polcon. Két doboz régi, átnedvesedett, a gyufaszálak fele már nem is gyullad meg. A másik három száraz, de ezekben is 5% selejt van.

a) Találomra választva egy dobozt, és abból egy szálát, mekkora a valószínűsége annak, hogy az még meggyújtható?

b) Ha egy találomra választott dobozból véletlenül kivett gyufa meggyullad, akkor mi az esélye, hogy a régi dobozok egyikét választottuk?

497. Egy főiskola I. évfolyamán a nappali tagozatos hallgatók 15%-a jelesre vizsgázott statisztikából. A levelező tagozaton 30%, míg a távoktatási tagozaton részt vevőknél 10% volt a jelesek aránya. Az egyes tagozatok létszámáról tudjuk, hogy kétszer annyi távoktatásban részt vevő van, mint levelező, és a nappalisok és a távoktatásiak egyenlő számban vannak.

a) Véletlenszerűen választva egy hallgatót, mekkora az esélye, hogy a statisztikajegye jeles?

b) Ha a véletlenül választott hallgató statisztikajegye jeles, akkor mi az esélye, hogy ő nappalis?

c) A b) feltétel mellett mi az esélye, hogy levelező, illetve távoktatási tagozatos az illető?

498. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott diák szereti a kólát 0,8, míg annak, hogy a jeges teát szereti 0,6. Mindkét italt 0,5 eséllyel kedveli egy diák.

a) Ha egy diák szereti a kólát, akkor mi az esélye annak, hogy szereti a jeges teát is?

b) Mi az esélye annak, hogy egy diák pontosan az egyik italt szeresse?

*c) Tudjuk egy diákról, hogy szereti valamelyik üdítőt. Vajon nőtt vagy csökkent annak az esélye, hogy a másik üdítőt is szereti ahhoz képest, hogy nem tudjuk róla ezt az információt?

499. Egy televíziós kvízműsorba a jelentkezők közül öt férfi és hat nő került be. Közülük sorsolják ki a négyfős csapatot.
- Mekkora az esélye annak, hogy legalább egy férfi lesz a csapatban?
 - Ha tudjuk, hogy legalább egy férfi van a csapatban, akkor mekkora valószínűséggel lesz pontosan két férfi?
 - Mekkora eséllyel lesz több nő a csapatban?
 - Független-e a következő két esemény?
- A: A csapatban páros a férfiak száma.
- B: A csapatban legalább annyi nő van, mint férfi.
500. János villamossal és busszal jár iskolába. Nem szeret korán kelni, ezért úgy készül, hogy nem feltételezi egyik jármű késését sem. Az esetek 10%-ában késik az iskolából, ami akkor következik be, ha legalább az egyik jármű késett. A villamos 3% eséllyel késik a tapasztalatok szerint.
- Mekkora eséllyel késik a busz, ha feltesszük, hogy a két jármű késése független egymástól?
 - Hogyan változik ez az esély, ha a járművek késései nem függetlenek egymástól, de tudjuk, hogy a villamos késése növeli a busz késésének az esélyét?
501. Tudjuk, hogy a svédek 85%-a szőke. Európában közel 380 millióan élnek, és ebből közel 85 millió a szőke. A fenti adatok alapján megalapozottnak tűnik azt mondani, hogy a svédek szőkék.
- Megfordítva ezt, vajon mit lehet mondani a „ha valaki szőke, akkor svéd” kijelentésről?
 - Általában, a $P(B|A)$ -t valószínűség ismeretében mondható-e valami a $P(A|B)$ valószínűségről? Állítása alátámasztására hozzon konkrét számpéldákat!
502. Egyetemi hallgatók egy csoportjában 10% a balkezes és 8% a rövidlátó, közöttük 2% balkezes és rövidlátó is egyszerre.
- Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenül választott balkezes rövidlátó is?
 - Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenül választott rövidlátó balkezes is?
 - A balkezesség és a rövidlátás független tulajdonságok-e az előző válaszok alapján?
 - Ha 10% balkezes és 8% rövidlátó, akkor a két tulajdonság függetlensége esetén hány százaléknak kellene lennie a balkezes rövidlátóknak?

503. Egy főiskolai évfolyam 30%-a fiú. A fiúk 40%-a sportol rendszeresen, a lányok 20%-a.

- Mekkora a valószínűsége annak, hogy taláломra választva egy hallgatót, az sportoló fiú legyen?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy taláломra választva egy hallgatót, az nem sportoló lány legyen?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy taláломra választott hallgató sportoló legyen?
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy a sportolók között taláломra kiválasztott hallgató fiú?
- Milyen kapcsolat van a nem és a sportolás között? (Vajon függetlenek egymástól? Ha nem, akkor milyen függés van köztük?)

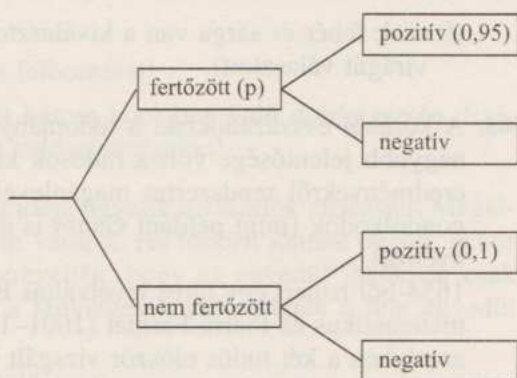
504. A tébécé korai felismerésére alkalmazott röntgenszűrésnél a tapasztalatok szerint hibák is előfordulnak. A kezdeti állapotban a betegek körülbelül 10%-át nem veszi észre a teszt, míg körülbelül 20%-ban egyébként egészséges embernél is pozitív eredmény (azaz valami gyanús folt a tüdön) adódik. Tudjuk, hogy hazánkban a tébécé előfordulása 0,3%.

- Egy pozitív teszteredmény után mi az esélye, hogy tényleg tébécés az illető?
- Ha negatív az eredmény, akkor mi az esélye, hogy tébécés?
- Mindezek fényében vajon mire való ez a teszt?

505. Orvosi tesztet dolgoztak ki egy fertőzés kimutatására. A mérések szerint ha valaki fertőzött, akkor 0,95 eséllyel pozitív a teszt, míg ha nem fertőzött, akkor is 0,1 eséllyel pozitív.

Egy bizonyos populációban (ahonnan véletlenszerűen választunk) p a valószínűsége annak, hogy valaki fertőzött.

Ezeket az információkat ábrázolja a mellékelt diagram.



- Vajon hogyan értelmezhetők a fenti, vélhetően a teszt bemérése során fölállított esélyek?
- Egy véletlenszerűen választott személyt tesztelünk. Mekkora az esélye annak, hogy az illető fertőzött és a teszt pozitív lesz?
- Fejezze ki p függvényében annak az esélyét, hogy a pozitív tesztet kapott személy tényleg fertőzött! Ábrázolja a szituációt Venn-diagramon!
- Melyik p -re lesz a c)-beli esély éppen 0,5?

506. Egy csoportban 16 lány és 8 fiú van. A lányok fele jeles tanuló, a fiúknak csak a negyede.
- Ha véletlenszerűen választunk valakit ebből az osztályból, akkor milyen eséllyel választunk éppen jelest?
 - Egy férfi véletlenszerűen választ egy személyt, de háromszor akkora eséllyel lányt, mint fiút. Mekkora a valószínűsége, hogy jelest választott?
 - Egy nő szintén véletlenszerűen választ, de ő 0,8 eséllyel fiút. Ebben mekkora a valószínűsége, hogy jeles tanuló a kiválasztott személy?
 - Vajon miért kapunk eltérő eredményeket?
507. Vágott rózsa eladására specializálódott virágkereskedőnél egy este a raktáron a következő féle virágok vannak:

Virágtípus \ Virágszín	Sárga	Piros	Fehér
Szimpla	5	10	3
Dupla	4	6	2

Egy vevő véletlenszerűen négy szálát választ. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy

- csak egy piros van köztük;
 - minden kiválasztott szál dupla virágú;
 - a választott rózsák között minden szín előfordul;
 - csak fehér és sárga van a kiválasztottak között (feltéve azt, hogy csak szimpla virágút választott).
508. A korábbi évszázadokban a tudományos folyóiratok (vagy internet) híján sokkal nagyobb jelentősége volt a tudósok közötti levelezésnek, mint manapság. Az új eredményekről rendszerint magánlevelek, magánküldemények útján értesültek a gondolkodók (mint például Gauss is értesült Bolyai vagy Lobacsevszkij eredményeiről).
- 1654-ből ismert egy híres levélváltás Blaise Pascal (1623–1662) francia filozófus, matematikus és Pierre Fermat (1601–1665) francia jogász és matematikus között, amelyben a két tudós először vizsgált matematikai szigorúsággal a szerencsejátékok területéről származó problémákat. Az egyik vizsgált kérdést, az úgynevezett osztozkodási problémát Chevalier de Mére francia katonatiszt, író vetette fel Pascalnak:
- „A és B a következő játékot játsszák: egy (ideális) érmével dobnak, s ha fej az eredmény, A kap egy pontot, ha írás, akkor B. Akinek először lesz 3 pontja, az győz, s megnyeri a játékba betett összes pénzt. Tegyük fel azonban, hogy valamiért az első dobás után félbe kell szakítani a játékot, amikor is A-nak 1, B-nek 0 pontja van. Hogyan osszák el igazságosan a betett pénzt?”
- Ennek eldöntéséhez válaszoljon az alábbi kérdésekre, figyelembe véve az 1 : 0-s állást:
- Legkésőbb hány dobás után ér véget a játék?

- b) Feltéve, hogy öt dobásból áll a játék, függetlenül attól, hogy A vagy B esetleg már korábban nyert, milyen kimenetelei lehetnek ennek a véletlen kísérletnek? Adj meg az ezekhez tartozó valószínűség-eloszlást is!
- c) Ha csak addig játszanak, amíg A vagy B nyer, akkor milyen kimenetek lehetségesek? Írja le az eseményteret alkotó elemi eseményeket és a valószínűségeiket is!
- d) Ezek alapján válaszoljon de Méré kérdésére, feltéve, hogy akkor igazságos az osztzkodás, ha a győzelmi esélyeik arányában osztják el a pénzt!

509. A Pascal és Fermat közötti levélváltásokban szerepel egy probléma, amelyet Pascalnak ugyancsak de Méré vetett fel:

„Vajon azonos-e a következő két játékos nyeresi esélye?

Az egyik négyszer egymás után dob egy kockával, és akkor nyer, ha legalább egyszer hatost dob. A másik két kockával 24-szer dob egymás után. Akkor nyer, ha legalább egyszer dupla hatost dob.”

De Méré szerint azonosak az esélyek, hiszen a második játékos egy dobásának hatszor annyi kimenetele lehet ugyan, mint az első játékosénak, de hatszor annyit is dob, így a két hatás kiegyenlíti egymást. Ön mit gondol, melyik játékosnak nagyobb a győzelmi esélye?

510. Toscana hercege egyszer arról faggatta Galileit, miért van az, hogy kockázásnál három kockával dobva gyakrabban jön ki a dobott pontok összegeként 10, mint 9, holott a 10-et és a 9-et ugyanannyiféleképpen lehet három 7-nél kisebb pozitív egész összegeként felírni.

Válaszoljon a hercegnek!

a) Írja fel a 9 és a 10 összes lehetséges felbontását!

b) X jelentse a dobott pontok összegét három kockával való dobás esetén. Számítsa ki a $P(X = 9)$ és a $P(X = 10)$ valószínűségeket!

511. Egy nagyobb ruházati áruházban hosszú ideje figyelik a vásárlók szokásait. Megállapították, hogy a betérők 40%-a valamit vásárol. Ha többen jönnek együtt, akkor őket egy betérőnek tekintik. Azt is észrevették, hogy az egyedül jövőknek csak körülbelül a harmada vásárol, viszont a ténylegesen vásárlóknak a fele egyedül jött.

a) A betérők hány százaléka jön egyedül?

b) A többedmagukkal érkezőknek hány százaléka vásárol valamit?

c) Mi az esélye annak, hogy valaki többedmagával érkezik vagy vásárol valamit?

512. Három pénzérmével dobunk egyszerre, amelyek közül kettő szabályos, egy viszont „cinkelt” (itt a fej esélye kétszer akkora, mint az írásé). Mekkora az esélye annak, hogy

a) pontosan egy fejet dobunk;

☐ b) feltéve, hogy egy fejet dobtunk, az szabályos érmével történt?

513. Egy vállalkozás két helyről rendeli a papírt. Az A cégtől kétszer annyit rendelnek, mint a B -től. Az A cég $0,8$, a B pedig $0,7$ eséllyel szállít egy héten belül.
- Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen választott papírcsomagra több mint egy hetet vártak?
 - ☐ Ha tudjuk, hogy egy héten belül leszállították a papírt, akkor mekkora az esélye annak, hogy A -tól rendelték?
 - Ha a szállítás késése esetén 10% engedménnyel adják a papírt, és egy csomag ára 820 Ft mindkét cégnél, akkor várhatóan hány forintot fizetnek érte?
514. Egy játékos két, látszólag egyforma kockával játszik. Az egyik tényleg szabályos, a másik kicsit egyenetlen súlyeloszlású, ezen a hatos dobás esélye megközelítőleg $\frac{1}{3}$. A játékos véletlenül választ egyet, majd feldobja.
- Mennyi az esélye annak, hogy hatost dobjon?
 - ☐ Igazolja, hogy $\frac{2}{3}$ eséllyel dobott a szabálytalannal, feltéve, hogy az eredményről tudjuk, hogy hatos lett!
515. Egy játékos két, látszólag egyforma kockával játszik. Az egyik tényleg szabályos, a másik kicsit egyenetlen súlyeloszlású, ezen a hatos dobás esélye megközelítőleg $\frac{1}{3}$. A játékos véletlenül választ egyet, majd kétszer feldobja.
- Mennyi az esélye, hogy mindkettő hatos lesz?
 - ☐ Mennyi az esélye, hogy a szabálytalant választotta, ha tudjuk, hogy mindkét dobás 6 -os lett?
516. Egy rajzszeget leejtve az kétféleképpen eshet a földre: $A: \perp$ vagy $B: \swarrow$.
- Milyen módon lehet megbecsülni, hogy mennyi az A helyzet valószínűsége?
Tegyük fel, hogy az A helyzet bekövetkezésének a valószínűsége $0,6$.
 - Egy rajzszeget kétszer egymásután a földre ejtünk, majd ezt a kísérletet sokszor megismételjük. Mit várunk, a kísérleteknek körülbelül hány százalékában fog kétszer egymás után A helyzetben földet érni a rajzszege?
 - Minek nagyobb a valószínűsége, hogy
 - egy rajzszeget kétszer egymás után leejtve az mind a kétszer A helyzetben érjen földet;
 - két rajzszeget leejtve mindkettő A helyzetben ér földet?
517. a) Egy adott esemény valószínűségének a becslésére egy véletlen kísérlet során 100 megfigyelés helyett $10\,000$ megfigyelést végeznek. Hányszor lesz nagyobb ugyanakkora eséllyel a relatív gyakoriság körüli intervallum a kisebb kísérlet-sorozatnál, mint a hosszabb sorozatnál (ebbe az intervallumba várjuk a valószínűséget)?

b) Ugyanazon biztonság mellett mennyivel szűkebb intervallum adható meg a relatív gyakoriság számára, ha a minta terjedelmét meghuszonötszörözzük?

518. Ugyanazt a dobókockát az egyik játékos 600-szor dobta fel, míg a másik 6000-szer. Az első meglepődött, hogy az egyes számok relatív gyakoriságai a valószínűsüktől (szabályosságot feltételezve) egy századnál kevésbé tértek el.

a) Legfeljebb, illetve legalább hány 1-es, 2-es, 3-as, 4-es, 5-ös, illetve 6-os dobást jegyezhetett fel az első játékos?

A másik játékos hozzátette, hogy ez a tulajdonság (a relatív gyakoriságokra) teljesül nála is.

b) Itt milyen eredmények születhettek az egyes kimenetek gyakoriságaira?

c) Melyik észrevétel a valószínűbb: az, hogy 600 dobás esetén az eltérés a relatív gyakoriság és a valószínűség között kisebb, mint 0,01, vagy hogy ugyanez 6000 dobás esetén teljesül? Miért?

519. Valaki így érvel:

„Annak a valószínűsége, hogy két érmével dobva fej-fej lesz az eredmény, nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy egy érmével kétszer egymás után dobva fej-fej-et kapunk. Ez azért van így, mert az első esetben három kimenet lehetséges: két fej, fej és írás vagy két írás, és ezek közül csak egy kedvező, ezért a valószínűsége $\frac{1}{3}$. A másik esetben mindkét dobásnál $\frac{1}{2}$ a fej valószínűsége, a fej-fej eredményé tehát $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.” Elfogadja-e az érvelést?

520. Egy becslés szerint az embereknek körülbelül 2%-a balkezes. Mekkora a valószínűsége, hogy hat véletlenszerűen kiválasztott ember között

a) van balkezes, b) legalább ketten balkezesek?

521. A gyártó tájékoztatója szerint az egyik gyógyszer az esetek 80%-ában gyógyulást eredményez. Ha egy kórházban tíz beteget kezelnek ezzel a gyógyszerrel, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy

a) mind a tízen meggyógyulnak;

b) legalább kilencen meggyógyulnak;

c) a betegeknek pontosan a fele gyógyul meg?

522. A tojásokat 12 db-os dobozokban árulják. Minden tojás $\frac{1}{12}$ valószínűséggel sérült.

a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz csak ép tojásokat tartalmaz?

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy doboz kettő vagy több törött tojást tartalmaz?

c) A boltban tízen vesznek egy-egy doboz tojást. Mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük ketten csupa ép tojást tartalmazó dobozt visznek haza?

523. Biztosláb Berci, a népszerű futballista és csapatának 11-es végrehajtója eddigi tapasztalataink szerint körülbelül 70%-os eséllyel rúgja be a büntetőt.
- Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy ötös büntetőszériából pontosan hármat lő be?
 - Mekkora az esélye, hogy ugyanebben az ötös szériában legalább három gólt szerez?
 - Mekkora annak az esélye, hogy éppen a második, negyedik, illetve ötödik büntetőt értékesíti?
 - Legalább hány büntetőt kellene ennek a játékosnak lőnie, hogy legalább 0,95 valószínűséggel minimum egy büntetőt berúgjon?
 - Egy másik játékosról tudjuk, hogy három büntetőből 0,9 valószínűséggel szerez legalább egy gólt. Mekkora az esélye annak, hogy berúgjon egy büntetőt?
524. Egy kalap hét piros és három fekete golyót tartalmaz. Százszor húzunk belőle úgy, hogy minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót, és alaposan megkeverjük a kalapban levő, tapintásra egyforma golyókat. Azt kell megtippelni, hogy hány feketét fogunk húzni.
- Adjuk meg a kihúzott fekete golyók számának legvalószínűbb értékét!
 - Mit mondana a kihúzott fekete golyók átlagos számáról, ha sokszor megismételjük ezt a százas húzássorozatot?
- *c) Két tanuló fogadást akar kötni. Eszerint az A tanuló akkor nyer, ha a feketék száma legfeljebb k , míg a B tanuló akkor nyer, ha nagyobb, mint k . Van-e olyan k , amire ez a fogadás igazságos? Ha ilyen nincs, akkor melyik k érték közelíti meg ezt a legjobban, tehát melyik k -ra tekinthető a fogadás a leginkább igazságosnak?
525. Egy mosógépszervizről a következőket tudjuk: általában annak az esélye, hogy egy nap nincs munkára megrendelés 0,1; hogy éppen egy megrendelés van 0,3; míg annak, hogy pontosan két megrendelés legyen 0,5.
- Mekkora az esélye annak, hogy egy nap legalább három mosógépet kell javítaniuk?
 - Mekkora az esélye annak, hogy három egymás utáni napon nincs munka?
 - Mekkora az esélye annak, hogy három nap alatt összesen éppen két mosógépet kell megjavítaniuk?
526. Annak a valószínűsége, hogy fiú születik 0,514, valamivel nagyobb, mint annak, hogy lány.
- Mekkora valószínűséggel van egy ötgyermekes házaspár gyerekei között egyetlen lány?
 - Mekkora a valószínűsége, hogy egy hatgyermekes családban legfeljebb két lány született?

- c) Mekkora a valószínűsége, hogy két, egymás után született gyerek különböző nemű?
- d) Feltéve, hogy bármelyik gyerek ugyanolyan eséllyel születhet bármelyik hónapban, mekkora a valószínűsége, hogy az ötgyerekes házaspár gyerekei közül legalább ketten ugyanolyan hónapban születtek?

527. Egy településnek 11 000 lakosa van.

- a) Írja fel annak a valószínűségét, hogy a lakosok közül véletlenszerűen választva 100 főt, abból éppen 13 gyerek lesz, ha tudjuk, hogy összesen 1980 gyermek él itt!
- b) Számolja ki ezt a valószínűséget a binomiális eloszlással közelítve!
- c) Miért lehet jó ez a közelítés?

528. Határozza meg az alábbi valószínűségi változók eloszlását! Melyik mutat binomiális eloszlást?

- a) Dobókockával kétszer dobunk. Jelentse X a dobott pontok összegét!
- b) Egy játékautomatánál 40% eséllyel lehet nyerni. Ötször játszik valaki. Jelentse Y a nyertes játzmák számát!
- c) A Z valószínűségi változó jelentse a b)-beli esetben a nyerések relatív gyakoriságát az öt játszma során!

529. Jelölje X azt a pozitív egész számot, amely azt mutatja meg, hogy egy 0,3 valószínűségű A esemény hányadikra következik be először, ha A bekövetkeztéig végezzük a kísérletet.

- a) Adja meg a $P(X = k)$ valószínűségeket, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$!
- b) Annak mekkora az esélye, hogy legalább háromszor meg kell ismételni a kísérletet?

530. Egy állatpopuláció számosságának a meghatározására gyakran használják a következő módszert: befognak néhány állatot, megjelölik, és visszaengedik őket. Egy bizonyos „keveredési idő” elteltével ismét befognak valahány állatot. Abból, hogy ezek között hány megjelölt állat van, következtetnek a populáció méretére.

- a) Egy területen 1000 állat van, amelyből megjelöltek ötvenet. Megfelelő várakozási idő után kifognak harmincat. Milyen eséllyel lesz közöttük éppen k megjelölt? Milyen eloszlású lesz a kifogottak között a megjelöltek száma?

Mit kell ehhez feltételezni?

- b) Adjon becslést az állatok számára, ha ötven megjelölt visszaengedése után, megfelelő kivárással befogott harminc állat között két jelölt volt! Módszerét indokolja!

531. Az ötös lottón kilencven számból húznak ötöt.

- a) Mi a legnagyobb kihúzott szám eloszlása?
- *b) Mi ennek a maximumnak a várható értéke?

532. Egy feleletválasztós teszt kitöltése teljesen véletlenszerűen zajlik. Három kérdés van, és mindegyikre négy válaszlehetőség adott. Jelölje X a találatok számát.
- Adja meg X lehetséges értékeit és a hozzájuk tartozó valószínűségeket!
 - Ábrázolja az eloszlást!
 - Határozza meg az eloszlás várható értékét!
 - Mi az esélye annak, hogy legalább 2 találatunk lesz?
533. Egy edzésre véletlenszerűen érkeznek a játékosok. A késésért percenként 100 Ft a büntetés. Tudjuk, hogy fél óra a maximális késés, azon belül viszont bármennyi lehet, amit egész percre kerekítenek (bármelyik érték egyforma esélyű). Mekkora összegre számíthat hetente a klub, ha 24 játékos és heti öt edzés van?
534. Két testvér azt játssza, hogy mindketten feldobnak egy-egy kockát, s aki a kisebbet dobja, az fizet a másiknak annyit, amennyit az dobott. Ha egyenlőt dobnak, akkor senki sem fizet, hanem megismétlik a dobást. Egy parti addig tart, amíg valaki nyer.
- Mennyi a partinként gazdát cserélő összeg várható értéke?
 - Mekkora ennek az összegnek a szórása?
535. Egy számológép véletlenszám-generátora segítségével előállítunk egy természetes számot 1 és 100 között egyenletes valószínűséggel.
- Mennyi a választott szám várható értéke?
 - Fogalmazzon meg egy olyan feladatot, amelynek kérdésére a választott szám várható értéke a válasz!
 - Mekkora a szórása a választott véletlen természetes számnak?
536. Két kockával dobunk, és a kapott két szám összege (levonva belőle a beszálló összeget) lesz a nyereményünk.
- Hány forintot kell fizetni partinként ahhoz (beszálló összeg), hogy ez a játék igazságos legyen, azaz a nyeremény várható értéke nulla legyen?
 - Mekkora a nyeremény szórása?
 - Mekkora legyen a partinkénti beszálló összeg abban a játékban, ahol két kocka feldobásával kapott számok szorzatát fizetik ki nyereménynek?
537. Egy fogadóirodában egy sportesemény három kimenetelére lehet fogadni: az elől álló csapat győzelmére, döntetlenre, illetve a második csapat győzelmére. (Ilyen például a Tippmix játék.) Feltételezzük, hogy az egyes kimenetekre adott nyereményszorzók a megfelelő kimenetek valószínűségével fordítottan arányosak. A nyereményszorzók a következő számok: 1,3; 5,9; 3,2. Ezek azt mutatják meg, hogy az egyes kimenetelre feltett összeg hányszorosát fizetik ki nyereményként, ha az adott kimenetel valósul meg.
- Mekkorára becsüli a fogadóiroda az egyes kimenetek esélyét?

b) Mekkora a fogadóiroda várható nyeresége, ha erre a mérkőzésre összesen 96 000 000 Ft-ot tettek fel a játékosok, mégpedig a hazai győzelemre 62, döntetlenre 8 és a vendéggyőzelemre 26 milliót? (Az összegek millióra kerekített értékek.)

538. Egy kozmetikai cég három samponfajtát (A , B és C), valamint egy hajbalzsamot állít elő. Minden samponfajtát egy meghatározott hajtípusra ajánlanak, míg a balzsam bárkinek jó. Induljunk ki a következő feltételezésekből:

Minden vevő egy meghatározott sampont vásárol. Csak aki ettől a cégtől veszi a sampont, az fogja a hajbalzsamot is innen venni.

A cég eladásai a következőképpen alakulnak: A vevők 50%-a az A , 30%-a a B és 20%-a veszi a C típust. A hajbalzsamot is vevők az A sampont vásárlóknak 10%-át; a B sampont vásárlóknak 20%-át, és a C -t vevőknek is 20%-át teszik ki.

a) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy egy sampont vásárló vevő hajbalzsamot is vesz!

b) Mekkora a valószínűsége, hogy ha valaki hajbalzsamot vett, akkor B sampont használ?

c) Mekkora a valószínűsége, hogy két hajbalzsamot vevő mindegyike B sampont használ?

d) Megkérdeztek tíz vevőt a cégtől vásárlók köréből, hogy a cég melyik termékét használják. Mindenki csak egyféle termék mellett állt ki. Mekkora a valószínűsége, hogy több mint nyolcan az A sampont használják közülük?

*e) Elvégeztünk egy százfős közvélemény-kutatást a cég termékeit vásárlók körében. Mekkora a valószínűsége, hogy ebből több mint nyolcvan fő használja az A sampont?

539. Egy nagy felmérésből az derül ki, hogy a felnőttek 3%-a színtévesztő.

a) Véletlenszerűen kiválasztunk tíz felnőttet. Mekkora a valószínűsége, hogy közülük

i) pontosan két személy;

ii) legfeljebb két személy színtévesztő?

b) Vegyünk sok ilyen véletlenszerűen választott tízfős csoportot. Számolja ki, hogy mekkora lesz a színtévesztők átlagos száma és szórása!

c) Számolja ki annak a valószínűségét, hogy száz emberből kevesebb mint két színtévesztőt találunk!

*d) Néhány évvel később megvizsgálunk ezer véletlenszerűen választott felnőttet. 95%-os biztonsággal milyen intervallumba esik a színtévesztők száma, ha feltesszük, hogy nem nőtt a színtévesztőség gyakorisága? (A Csebiszev-egyenlőtlenséggel számoljon.)

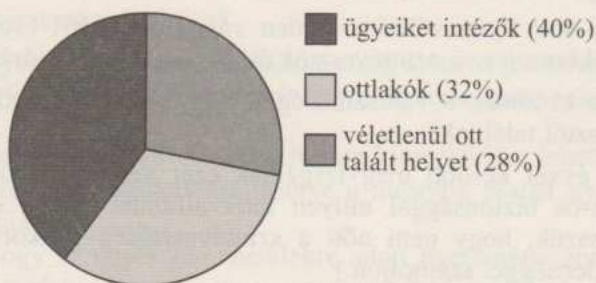
e) Oldja meg a d) feladatot normális eloszlással számolva!

540. Egy boltban kétfajta mobiltelefont, A -t és B -t lehet kapni, mindegyiket három különböző típusban. Jelöljük ezeket 1, 2 és 3-mal. Egy csomagba tíz azonos fajtájú és típusú mobiltelefont csomagoltak. A következő táblázat azt mutatja, hogy az üzletben hány darab található az egyes telefoncsomagokból.

A1	A2	A3	B1	B2	B3
35	29	46	12	48	30

- a) Egy vevő a cége számára egy 3-as típusú csomagot akar venni. A kereskedő a márkát (fajtát) véletlenszerűen választja. Mekkora a valószínűsége, hogy éppen B -t választ?
- b) Az előállítók adatai szerint a termékek 2%-a hibás. A kereskedő egy tízes csomagból véletlenszerűen kiválaszt három telefont. Ha mindhárom hibátlan, akkor a csomagot jónak tekinti.
- i) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy meghatározott csomagot így jónak ítélt? (Tételezzük fel, hogy a csomagolásnál a hibások teljesen véletlenszerűen kerülnek a csomagba, tehát nincsenek jó és rossz szériák!)
- ii) A kereskedő öt csomagot tesztl a fenti módon. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább négyet az ötből jónak ítélt?
- c) Hibásnak számít az a mobiltelefon, amelynek hardverproblémája (H_1 hiba), illetve szoftverproblémája (H_2 hiba) van. A gyártott telefonok 2%-ánál sajnos legalább az egyik hiba fellelhető. Tudjuk, hogy a mobiltelefonok 1%-a H_1 hibás, és hogy 0,2%-ának mindkét hibája megvan. Független-e a két hiba egymástól a fenti adatok alapján?
- *d) A B márka gyártója arról biztosítja a kereskedőket, hogy legalább 0,995 annak a valószínűsége, hogy egy 3-as típusú készüléke hibátlan. Egy kereskedőnek ezer ilyen típusú készüléke van a B márkából. Legfeljebb mennyi hibás lehet ezek között, hogy 5%-os hiba-valószínűség mellett elfogadja a kereskedő a cég állítását? (Útmutatás: Használja a Csebisev-egyenlőtlenséget vagy a normális eloszlást, vagy a számítógépet!)

541. Az alábbi kördiagram a parkolások célja szerinti eloszlást ábrázolja Budapest belvárosában. Az egyik parkolóban a vizsgálatkor éppen húsz autó áll.



- a) Mekkora a valószínűsége, hogy a 20 autó közül pontosan 4 az ügyeiket intézőké?
- b) Mekkora az esélye, hogy a 20 autóból legfeljebb 5 az ügyeiket intézőké?

- c) Erre a parkolóra mennyire fogadja el a kördiagram adatait, ha 20 kocsiból 9 véletlenül ott parkoló kocsit talált?
542. Egy iskolai büfé vezetője megfigyelte, hogy naponta a tanulóknak körülbelül 40%-a vásárol nála üdítőitalt a szünetekben. Az iskolába 480 tanuló jár.
- Hogyan modellezné a szituációt, és milyen feltételezésekkel él e közben?
 - Mennyiben tekinthető a modellje reálisnak?
- *c) Mennyi üdítőitalt hozasson a büfé vezetője az iskolába, ha legalább 90%-os biztonsággal minden igényt ki akar elégíteni?
543. Két íjász versenyez. Az edzések alapján egy nehéz célba lövésnél az első 60%-ban talált, a második 70%-ban.
- A versenyen mekkora eséllyel fog mindkettő 10-10 lövésből legalább 7-szer célba találni? Mit feltételez a számítása során?
 - Mekkora eséllyel fog legalább az egyikük 7-szer célba találni?
544. Egy üzem az új autók 12%-át piros, 8%-át kék, 15%-át fehér színben gyártja. A többi autó mind más színű. Az üzemben gyártott 15, véletlenszerűen kiválasztott autó színét feljegyezzük. Modellezze a köztük levő piros autók számának eloszlását!
545. Éjszaka felébredve az órára nézek.
- Mekkora az esélye annak, hogy a nagymutató éppen a kettes és a négyes között legyen?
- Egy barátom elmesélte, hogy ma éjjel ő is felébredt, és 3:15-öt mutatott a digitális órája. Ez már a harmadik alkalom volt, hogy éppen 3:15-kor ébredt fel.
- Tegyük fel, hogy minden este pontban 11-kor elalszik, felébredni pedig mindig 3 és 4 között szokott. Ekkor egy órányit olvas. Mekkora az esélye annak, hogy háromszor egymás után 3:15-kor ébredjen föl? (Másodpercet nem mutat a digitális órája.) Mit feltételez a számításnál, és ez mennyire reális?
546. A buszmegállóban a kiírás szerint két különböző buszjárat áll meg. Egy busz átlagosan 30 másodpercet tartózkodik a megállóban. Jó közelítéssel feltételezzük, hogy a buszok egyenletes eloszlás szerint érkeznek a $[0; 10]$ perces intervallumon belül bármikor. Mekkora eséllyel fordul elő, hogy a megállóban mindkét járat egy adott pillanatban együtt áll bent?
547. Egy számítógép képernyőjén egyenletes eloszlással véletlenszerűen villan fel mindig egy pont. A monitor egy $28\text{ cm} \times 21\text{ cm}$ -es téglalapnak tekinthető.
- Mekkora eséllyel fog felvillanni a pont a középpont körüli 5 cm -es sugarú körben?
 - Mi az esélye, hogy öt, egymás utáni felvillanás is ezen a körön kívül lesz?
 - Száz felvillanásból várhatóan mennyi lesz a képernyő középponti 5 cm -es körében?

548. Tudjuk, hogy az emberek 15%-a Rh^- vércsoportú.
- Milyen eloszlású egy 18 fős osztályban az Rh^- vércsoportú tanulók száma? Miért lehet ezt binomiális eloszlással közelíteni?
 - Tegyük fel, hogy binomiális eloszlású az Rh^- vércsoport előfordulása. Mekkora az esélye annak, hogy egyetlen Rh^- vércsoportú se legyen az osztályban?
 - Ha az osztályban 16 Rh^- vércsoportút találunk, akkor elfogadná-e azt a hipotézist, hogy a beiskolázási körzetben is csak 15%-os az Rh^- vércsoport előfordulása? Válaszát számítással is támassza alá!
549. Egy számítógép bemutató memóriajátéka 16 db képpárból áll. Amikor a gép „magával” játszik, egy „húzás” (2 lap megfordítása) 0,1 másodpercig tart. A gépet teljesen lebutítva (nem jegyez meg egy lapot sem, teljesen véletlenszerűen fordít meg két lapot, viszont ugyanazt a kettőt nem fordítja meg kétszer, tehát azt megjegyzi ugyan, hogy melyik párt nézte már, de azt nem, hogy mik voltak azok a lapok)
- a legrosszabb esetben mennyi ideig tart a bemutató?
 - mennyi az esélye annak, hogy a bemutató legfeljebb egy percig tartson?
550. Egy kocka oldallapjait befestik piros, kék és sárga színekkel úgy, hogy minden lapon csak egyetlen színt használnak.
- Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik színből tetszőleges számú lehet? (Lehet egyszínű kocka is.)
 - Mennyi a valószínűsége, hogy egyszínű a kocka összes lapja?
551. Egy nagyvárosban a felnőttek 35%-a dohányzik. Megállapították, hogy a dohányosok körében 1000 halálesetből 150-ben a tüdőrák játszotta a főszerepet, míg a nem dohányzók körében 1000 emberből csupán 21 halálát okozta ugyanez a betegség.
- Véletlenszerűen választunk tíz felnőttet a nagyváros lakói közül. Számolja ki annak a valószínűségét, hogy köztük legalább három dohányost találunk! Hol használja ki azt a feltevést, hogy nagyvárosról van szó?
 - A fenti adatok alapján mekkora annak a valószínűsége, hogy valaki tüdőrákban haljon meg?
- ☒ Számolja ki annak az esélyét, hogy ha valaki tüdőrákban halt meg, akkor dohányos is volt!
552. A hat kék és négy zöld golyót tartalmazó dobozból 200-szor húzunk visszatevéssel, minden húzás előtt alaposan megkeverve az egyforma golyókat.
- Várhatóan hány kék lesz a kétszáz húzás között?
 - Mekkora a kékek számának szórása?
- ☒ Ennek alapján 90%-os biztonsággal melyik intervallumba esik a kétszáz húzás közötti kékek száma, ha az intervallumot a legszűkebbnek szeretnénk választani? Használjon táblázatot vagy számítógépet!

553. A „Ki nevet a végén?” nevű játékba akkor léphetünk be, ha sikerül hatost dobunk a dobókockával.

- a) Leggyakrabban hányadik körben sikerül elkezdenünk a játékot?
- b) Melyik a valószínűbb: hogy legkésőbb a harmadik körben belépünk, vagy az, hogy többet kell várunk?
- c) Ha feljegyezzük minden játék esetén, hogy hányadik körben sikerült először hatost dobunk, akkor vajon milyen értéket várhatunk ezek átlagára?

554. Egy munkaközvetítő iroda 50, munkára jelentkező kliensét kérdőíven megkérdezte, hogy az előző öt napból hányon dolgoztak. Az alábbi diagram mutatja az eredményt.

0 napot dolgozott: 14 fő; 1 napot 4 fő; 2 napot 2 fő; 3 napot senki, 4 napot 8 fő és végül 5 napot 22 fő.

- a) Hány százaléka a munkanélküli (azaz, aki egyáltalán nem dolgozott)?
- b) Határozza meg a heti ledolgozott munkanapok átlagát, móduszát és mediánját! Egy cég négy embert keres munkára a hétvégére. A közvetítő az ötven megkérdezett klienséből választ négy főt.
- c) Hányféle lehetősége van a közvetítőnek, ha csak olyanokat választ, akik nem dolgozták végig a hetet?
- d) Mekkora eséllyel választ négy olyan embert, akik még egyáltalán nem dolgoztak a héten?



555. Egy nagy létszámú egyetemen 60% nő- és 40% férfighallgató van. A nők 30%-a, a férfiak 15%-a nem beszél németül.

- a) Véletlenszerűen választunk egy tanulót. Mekkora az esélye, hogy ez a hallgató nem beszél németül?
- b) Egy, a fenti egyetemről véletlenszerűen választott hallgatóról tudjuk, hogy nem beszél németül. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy ez a hallgató nő!
- c) Az egyetemről nyolc hallgatót választunk ki véletlenszerűen. Mekkora az esélye annak, hogy köztük éppen négy férfi lesz, akik mind beszélnek németül?

556. Különböző országokban különböző lottófajták vannak. Valaki arra kíváncsi, hogy Magyarországon az ötös lottónál hány számból húznak. Annyit tud, hogy egy héten a következő öt számot húzták ki: 3, 26, 33, 59, 67.
Hogyan lehet becslést adni ebből az eredményből a legnagyobb lehetséges lottószámra? Adjunk meg minél több módszert!
557. Egy programozó 0 és 1 között egy tizedesjegy-pontossággal generál egymástól függetlenül két véletlen számot (a két határt nem választhatja, de a két szám lehet egyenlő is).
- Mekkora a valószínűsége, hogy a számegyenesen a $[0, 1]$ szakaszt ezáltal három részre bontva a darabokból háromszöget lehet szerkeszteni?
 - Mekkora az esélye annak, hogy a háromszög tompaszögű?
 - Ha két pontot tudna véletlenszerűen generálni, azaz két valós számot generálna, akkor mi a válasz az első kérdésre? Mekkora az eltérés?
558. Egy üzemben az elkészült hibás termékekről az ellenőr 95%-os biztonsággal állapítja meg, hogy hibásak. Jelentse X a tévesen jónak ítélt termékek számát 100 darab selejtes termék közül.
- Mennyi X várható értéke és szórása?
 - Mekkora valószínűséggel lesz a tévesen jónak ítélt termékek száma a várható érték egyszórásnyi környezetében?
559. Egy vállalkozó rendszeresen kap walkmaneket (sétálómagnókat) tartalmazó szállítmányokat egy híradás-technikai cégtől. A gyártó állítása szerint a szállítmányokban a selejt aránya legfeljebb 1%. Ellenőrzésként a vállalkozó minden szállítmányból 50 db-os mintát vesz visszatevéssel. Az X változó jelentse a mintában a selejtesek számát a számára legkedvezőtlenebb esetben, azaz, ha a selejtarány éppen 1%.
- Határozza meg a $P(X \leq k)$ valószínűségeket $k = 0, 1, \dots, 5$ esetén!
 - Hány hibás darab esetén utasítsa vissza a szállítmányt a vállalkozó, ha legfeljebb 2% tévedési esélyt vállal arra, hogy egy megfelelő szállítmányt ne vegyen át? (Megfelelő a szállítmány, ha a selejt $\leq 1\%$.)
560. Egy számítógépben 16 memóriaegység van, amelyből pontosan két hibás, de nem tudják, hogy melyik. A hibakeresés végett sorban egyesével kiveszik az egységeket, és tesztelik őket.
- Hányféle sorrendben választhatják ki a 16 egységet?
 - Mekkora az esélye annak, hogy mindjárt az első hibás legyen?
 - Mekkora az esélye annak, hogy két teszttel mindkét hibásat megtalálják?
 - Mekkora eséllyel kell pontosan öt mérést végezni, amíg mindkettőt megtalálják?
 - Mennyi a szükséges mérésszám várható értéke, azaz átlagosan hány méréssel találják meg a két hibásat?

6. ÖSSZETETT FELADATOK

561. Hányféleképpen lehet a 32 lapos magyar kártyát két embernek kiosztani úgy, hogy mindketten kapjanak legalább egy lapot?

562. Egy 12.-es osztály 36 tanulója közül sokuknak van nyelvvizsgálója angol, német vagy francia nyelvből a következők szerint:

21 tanuló angoltól, 18 németből és 15 franciából tett sikeres nyelvvizsgát; 20-an legalább két nyelvből, 1 tanuló pedig mindhárom nyelvből.

a) Hány tanulónak nincs egy nyelvvizsgálója sem?

b) A 36 tanulóból egyet kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy pontosan egy nyelvből van nyelvvizsgálója?

563. Mennyi azoknak a hatjegyű számoknak az összege, amelyek az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyet tartalmazzák, és mindegyiket legalább egyszer?

564. Egy koncerten a négytagú kórus tagjai közül minden dalt hárman énekeltek. Kálmán szerepelt a legtöbbször, ő nyolc dalban énekelt. Aurél szerepelt a legkevesebbszer, ő öt dalban énekelt. Összesen hány művet adtak elő?

565. Egy osztályban a diákokat a szabadidő eltöltésének három típusáról kérdezték: a tévénézésről, az internetezésről és az olvasásról. Az elkészült statisztika szerint e három elfoglaltság közül 22 tanuló a tévét nézi, 21 tanuló internetezik, 18 tanuló pedig szívesen olvas. Heten mindhárom szabadidős tevékenységgel, 19-en pedig legalább kettővel foglalkoznak szívesen.

a) Hány tanuló jelölt be legalább egyet a három tevékenységből?

b) Egy másik osztályban a kérdőívekből a következők derültek ki.

Tudjuk, hogy:

1. Van olyan, aki sokat néz tévét, mégsem internetezik szívesen.

2. Mindenki, aki szeret olvasni, az szívesen internetezik, vagy nem sokat néz tévét.

3. Vagy az igaz, hogy aki nem szívesen internetezik, az szeret olvasni, vagy az igaz, hogy aki szívesen internetezik, az nem szeret olvasni.

Igaz-e a fenti állítások alapján az, hogy aki sokat néz televíziót, az nem szeret olvasni?

566. Hat szomszédos pozitív egész számot két halmazba csoportosítunk.

- a) Hat adott szám esetén hányféleképpen lehet ezt megtenni úgy, hogy egyik halmaz se legyen üres halmaz?
- b) Van-e hat olyan szám, amelyek esetén az egyik halmazban levő számok szorzata megegyezik a másik halmazban levő számok szorzatával? Ha igen, akkor melyik ez a hat szomszédos pozitív egész szám?

567. Egy sportegyesület négyszáz versenyzőjének 30%-a labdajátékos és 40%-a nő. Tudjuk, hogy a labdajátékosok $\frac{3}{4}$ -e nő.

- a) Hány olyan férfi sportolója van az egyesületnek, aki nem labdajátékos?

Az alábbi táblázat az egyesület sportolóinak létszámát mutatja 1962 és 2002 között. Tudjuk, hogy 1977-ig évről évre nőtt, 1988-tól viszont már évről évre csökkent az egyesület igazolt sportolóinak a száma.

Évszám	Létszám, fő
1962	714
1966	852
1971	907
1977	954
1983	894
1990	657
1996	590
1999	480
2002	400

- b) Melyik időszakban volt nagyobb arányú az egyesület létszámának csökkenése: 1996 és 1999 között vagy 1999 és 2002 között?

- c) Az egyesületen belül futóbajnokságot rendeztek, amelyen az egyesület tíz legjobb futója vett részt. Hányféle befutási sorrend lehetséges, ha a következő feltetelek teljesülnek:

- minden induló célba ér;
- Ákos biztosan benne van az első háromban;
- Csaba és Szabolcs biztosan az első öt beérkező között van.

568. Ádám a fogadóirodában egy focimérkőzés lehetséges kimeneteleire fogad. Ha az A csapat nyer, akkor a betett összeg kétszeresét, döntetlen esetén a betett összeg négyeszeresét, a B csapat győzelme esetén pedig a nyolcszorosát nyeri vissza. Melyik lehetőségre mennyit tegyen, hogy mindenképpen nyerjen 100 Ft-ot?

569. a) Oldja meg a következő egyenletet az egész számok halmazán:

$$(10x)^2 + y^2 = 50^2$$

Hány megoldás van?

- b) Készítsen négyjegyű pozitív egész számot úgy, hogy egy kétjegyű számot egymás után kétszer leír! Ezeknek a típusú számoknak mi a közös osztójuk?
- c) Bizonyítsa be, hogy azok a négyjegyű pozitív egész számok, amelyeknek első két jegyük, illetve a második két jegyük egyenlő egymással, 11-gyel oszthatók!
- d) A c) részben szereplő számok közül melyik lesz négyzetszám?

570. Bizonyítsa be, hogy

- a) minden 6-ra végződő négyzetszámban a tízesek helyén páratlan szám áll;
- b) az első kilencven pozitív egész szám fokban mért szinuszainak négyzetösszege $\frac{91}{2}$!

571. Tekintsük az olyan derékszögű háromszögeket, amelyeknek oldalai egész számok!

- a) Bizonyítsa be, hogy a háromszög egyik oldala biztosan páros!
- b) Ha az oldalhosszak relatív prímek, akkor a paritásukat tekintve milyenek lesznek a befogók és az átfogó?

572. Bizonyítsa be, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n + 1$ értéke mindig egyre végződik! ($n \in \mathbb{N}$)

573. a) Bizonyítsa be, hogy a 10-nek minden pozitív egész hatványa előállítható két négyzetszám összegeként!

- b) Mutassa meg, hogy végtelen sok olyan természetes szám van, amely nem állítható elő két négyzetszám összegeként.

574. Egy téglatest oldalélei egészek és $[0; 40]$ közöttiek, összegük 62. Mekkora a téglatest felszíne, ha a térfogata 2880?

575. Egy játék a következők szerint zajlik: valaki bemond egy pozitív egész számot, például a 36-ot. Az a feladat, hogy ezt úgy bontsa a játékos tetszőleges számú pozitív valós számra, hogy azok összege 36 legyen, és a szorzat a lehető legnagyobb.

- a) Hogyan járjon el a játékos 36 esetén?
- b) Miként játsszon a játékos, ha csak pozitív egészekre bonthatja a számot?

*c) Általában adott n esetén milyen stratégiával érdemes játszani az a)-beli vagy a b)-beli feltétel esetén?

576. Határozza meg az a pozitív valós számot, amelyre

$$\frac{2\sqrt{a}}{a} \left(\sqrt{1 - 2\sqrt{a} + a} + \sqrt{1 + 2\sqrt{a} + a} \right)$$

négyzetszám!

577. Adja meg a Descartes-féle koordináta-rendszerben az $(x; y)$ egész koordinátájú pontokat, amelyekre

$$(x - y)(1 - xy) + x^2 = y(xy - x - 3)!$$

578. Egy derékszögű háromszög két befogójának mérőszáma páratlan egész. Bizonyítsa be, hogy az átfogó mérőszáma nem lehet racionális!

579. Oldja meg a valós számok halmazán és diszkutálja az egyenletet az a valós paraméter szerint!

$$|x - a^2 + a| + |x - 3 + a| = 20$$

580. a) Milyen másodfokú egyenletben cserélhetné fel egy „rossz tanuló” a Viète-formula képleteit?

b) A „rossz tanuló” azt is állítja, hogy egész együtthatók esetén a gyökök is egészek, ha $a = 1$, mivel a gyökök szorzata és az összege is egész lesz. Igaz-e?

581. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $|2x - 4| = \operatorname{sgn}(x - 4)$

b) $\frac{x+5}{x-2} > \operatorname{sgn}\left(\frac{x+5}{x-2}\right)$

582. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $|x - 1| + 1 = \{x + 5\}$

b) $|x| = \{x\}$

c) $x + \frac{1}{x} = 2\{x\}$

583. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $[x^2] < x + 0,5$

b) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{8-x}$

584. a) Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 2) = 12$$

b) Lehet-e 2002, 2003 vagy 2004 az egész együtthatós $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet diszkriminánsa?

585. Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet!

$$2 \sin \frac{x^2 + 3y}{6} = 5^x + 5^{-x}$$

586. Fejezze ki pozitív x értékek esetén az $x + \frac{1}{x} = p$ paraméter segítségével a következő tört értékét!

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - x^3 - \frac{1}{x^3}}$$

Mennyi e kifejezés legkisebb értéke?

587. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $\{x\} = -\sqrt{-x-1}$

b) $\sqrt[4]{2x^5+5} = 1 + \sqrt[4]{x-2}$

c) $\frac{x^2-1}{x+1} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-4) > 0$

588. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$(x^2+1) \cdot (x^6+1) = 4x^4 \cdot (1-2^y)$$

589. Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán! (Az a valós paraméter.)

a) $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = x$

b) $\sqrt{a-x} + \sqrt{x-a} = 0$

c) $\sqrt{4-2ax+x^2} + \sqrt{x-a} = 0$

590. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

a) $(x-0,5)^4 + (x+0,5)^4 = 337$

b) $(x-2)^4 + (x-1)^4 = 337$

591. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet! (Az $a \in \mathbb{R}$ és $b \in \mathbb{R}$ paraméter.)

$$\sqrt{x - \sqrt{2ax - a^2}} - \sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} = b$$

592. Milyen valós változó mellett azonosság a következő egyenlőség?

$$\lg \sin 2x = \lg 2 + \lg \sin x + \lg \cos x$$

593. Oldja meg a következő egyenleteket!

a) Grafikus módszerrel:

$$2|3-2x| = 3|(x-2)(x-1)|$$

b) Algebrai úton:

$$4(x-2)^4 + 4(x-1)^4 = 17(x-2)^2(x-1)^2$$

594. Adjuk meg m értékét úgy, hogy a következő kifejezés értéke x -től függetlenül állandó legyen!

$$K(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + m(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

595. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x$$

596. Oldja meg a következő egyenletet! (Az a valós paraméter.)

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = a$$

597. Bizonyítsa be a következő egyenlőtlenséget a, b, c, d pozitív számok esetén, ha $a + b + c + d = 1$!

$$\sqrt{a(b+c+d)} + \sqrt{b(a+c+d)} + \sqrt{c(a+b+d)} + \sqrt{d(a+b+c)} \leq 2$$

598. Oldja meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

599. Mely pozitív valós c értékekre van az alábbi egyenletnek a valós számok körében megoldása?

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + 2c(c+1) = 0$$

600. Határozza meg az α paraméter értékét úgy, hogy az $x^2 \cos \alpha - x + \sin^2 \alpha = 0$ egyenlet x_1 és x_2 valós megoldásaira az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ feltétel teljesüljön!

601. Két helikopter mozog, az egyik A -ból indul, és észak felé tart, sebessége $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a másik C -ből keletre repül, sebessége $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Az AC távolság 50 m. Az A és a C pont ugyanazon a délkörön fekszik.

Mikor lesznek egymáshoz legközelebb? Mekkora lesz ekkor a távolság közöttük?



602. Ipartelepítésnél az új vállalat egy férfi és egy nő dolgozóját betanítják a technológiára, akik egy hét alatt újabb dolgozókat tudnak betanítani: egy férfi két férfit és egy nőt, egy nő egy férfit és két nőt, akik további embereket tanítanak be.



- Hány hét alatt tanítaná be a vállalat ötszáz nő és ötszáz férfi dolgozóját, ha mindenkit nekik kellene betanítaniuk?
- Hány hét alatt tanulja meg a vállalat ötszáz nő és ötszáz férfi dolgozója a munkafolyamatot, ha mindenki csak egy hétig vesz részt a többiek betanításában?
- Hány hét alatt tanítható be az ötszáz nő és ötszáz férfi, ha addig nem kezdődik el a munka, amíg mindenkit ki nem képeztek?

603. Egy pingpongversenyen ázsiai és európai versenyzők indultak. Mindenki mindenkiével egyszer játszott. Az európaiak kétszer annyian voltak, mint az ázsiaiak, de az ázsiaiak $\frac{4}{3}$ -szor annyi mérkőzést nyertek, mint az európaiak.

- a) Hány európai és hány ázsiai versenyző indult?
- b) Hány európai győzelem volt?

604. Albert, Bendegúz és Dávid kerékpárral versenyeznek. Albert kétszer akkora sebességgel megy, mint Dávid, ezért két perc előnyt ad neki. Bendegúz még gyorsabb, ezért 160 másodperc előnyt ad Dávidnak. A sebességük közben végig állandó. A célba egyszerre érkeznek.

- a) Mennyi ideig ment Dávid?
- b) Mit mondhatunk Bendegúz sebességéről?
- c) Ábrázolja egy út-idő diagramon a három kerékpáros útját a rajttól a célig!

605. A gyógyszerárban háromféle, 70%-os, 64%-os és 50%-os alkoholból kevernek 60%-os alkoholt. Összesen 600 ml-re van szükség, de csak egész millilitereket tudnak kimérni.

- a) Mennyit kell összeönteni az egyes alkoholtípusokból?
- b) Egy liter alkohol ára,

ha 70%-os: 3200 Ft;

ha 64%-os: 3000 Ft;

ha 50%-os: 2900 Ft.

Milyen mennyiségben kell az egyes töménységű alkoholokat összekeverni, hogy a 600 ml 60%-os ára a lehető legkevesebb legyen? Mennyi ez az ár?

606. Anna, Béla és Cecil kártyáztak. Kezdő pénzük mindnyájuknak százszal osztható volt.

Először Anna nyert, Béla és Cecil elvesztette a pénze felét.

Utána Béla nyert, Anna és Cecil elvesztette a pénze felét.

Legvégül Cecil nyert, Anna és Béla elvesztette a pénze felét.

Így Annának 550 Ft-ja maradt, Cecil pedig az eredeti pénzének négyszeresénél 250 Ft-tal többet vitt haza. Mekkoraak voltak a kezdő összegek?

607. A matematikatanár dolgozatot készít elő 5. osztályosok számára. Az alábbi egyenletbe az a paraméter helyébe a különböző csoportoknak más-más számokat ír be. Hogyan választhatja meg az a (a egész szám) paraméter értékét, ha azt szeretné, hogy az alábbi egyenlet megoldása egész szám legyen?

$$ax + (2 - a)x = (a + 3)x + 10$$

608. Az autó kereke egy bizonyos sebességnél egy perc alatt 360-at fordul. Fékezésnél ez a fordulatszám folyamatosan és egyenletesen csökken, minden másodpercben 12%-kal.
- Mennyi lesz a fordulatszám tíz másodperc múlva?
 - Összesen hány fordulatot tesz meg a kerék a tíz másodperc alatt?
609. Egy részecskegyorsítóban két részecske egyenletesen kering 4,3 km sugarú körpályán. Ha egy irányban keringenek, akkor $18 \cdot 10^{-4}$ másodpercenként, ha ellentétes irányban, akkor $3,6 \cdot 10^{-4}$ másodpercenként találkoznak. Mekkora a sebességük?
610. Négy különböző minaretbe szeretnénk feljutni. (A minaret henger alakú torony, benne csigalépcsővel.) Hány lépcsőfok van bennük, ha az alábbiakat tudjuk az egyes minaretekről?
- minaret: Lefelé kétszer olyan gyorsan megyünk, mint felfelé. Ha felfelé egy percig haladunk kétszáz lépcső, lefelé ugyanennyi ideig haladva húsz lépcső hiányzik a teljes fel-, illetve leérkezéshez.
 - minaret: Minden lépcső egy 15° -os körcikk. Mire felérünk, éppen kilencszer fordulunk körbe a toronyban.
 - minaret: 11 fős kis csapatunk szorosan egymás mögött a következő lépcsőfokokon állva halad felfelé. Egyenletesen gyorsan megyünk, s így az első 10 másodperccel előbb ér fel, mint az utolsó. Lefelé haladva 10%-kal gyorsabban megyünk, s ekkor 3,5 percig tart az utunk (ennyi idő alatt ér le mindenki).
 - minaret: Ha az első lépcsőre egy babszemet teszünk, s minden továbbira eggyel többet, akkor mire felérünk, összesen 7381 babszemet helyeztünk el a lépcsőfokokon.
611. A török szultán egyik szolgája rendszeresen lopott abból a kétszáz literes hordóból, amelyben a szultán kedvenc borát tartották. Mindennap egy litert lopott el ebből a hordóból, de hogy ne tűnjön fel a hiány, ezt egy liter vízzel pótolta. Az 50. napon rajtakapták, amikor a tiszta vizet töltötte a hordóba.
- Hány százalékos lett ekkorra az eredetileg tiszta bor?
 - Hányadik napon volt 85%-os a hordó tartalma?
 - A szolga javítani próbált szorult helyzetén, ezért megígérte, hogy a kilopott ötven liter bort visszaönti, azaz kivesz a hordóból ötven litert, és azt pótolja ötven liter valódi, azonos minőségű tiszta borral. Így hány százalékos lesz a hordó tartalma?
612. Az öreg király az életének fontos eseményeit a kapujában elhelyezett márványtáblába vésette. Az írás a táblán fentről lefelé olvasandó, s a fentről lefelé tengelyesen szimmetrikusan elhelyezkedő vízszintes sorok egyre hosszabbak. A szöveg csúcsos (piramisszerű) elrendezése is az ő égi felé törő, kiemelkedő uralkodói tevékenységét akarta ábrázolni.
- Összesen hány betűt kellett a táblába vésni, ha
- a legelső sorban 1023 betű van, s minden továbbiban eggyel kevesebb;

- b) minden sor három betűvel hosszabb a felette levőnél, s az első sor négy betűből áll, valamint tudjuk, hogy 870 sor van;
- c) az első sor négy betűből áll, majd minden további sorban kettővel több betű van, az utolsó sorban pedig 360 betű olvasható;
- d) összesen 500 sor van, és a sorok fentről lefelé a következő számú betűkből állnak: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, ...?

613. Egy csembalóban a legmélyebb hanghoz 160 cm-es húr tartozik. A következő húrja 158 cm. Minden további húr ugyanígy 2 cm-rel rövidebb.

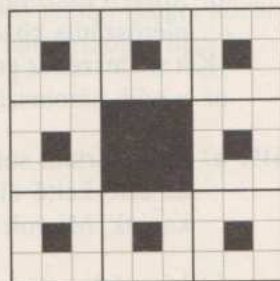
- a) Mekkora a legkisebb húr hossza, ha 65 hang van összesen?
- b) Hány hang szólaltatható meg, ha a legrövidebb húr 26 cm-es?
- c) A legrövidebb húr 26 cm-es. Hány méter acélhúr kellene összesen, ha mindegyik hanghoz egy szál drót tartozna?
- d) A legrövidebb húr 24 cm-es. Hány méter acéldrót kellett a hangszer elkészítéséhez, ha a hangok alsó harmadához egy szál húr tartozik, a középső harmadhoz két szál drót, s a hangok felső harmadához (minden egyes hanghoz) három szál húr tartozik?

614. A bicikli kerekében a nyomás a külső légnyomás kétszerese, mi pedig két és félszeresét szeretnénk elérni. A pumpa minden lenyomásakor a nyomás 2%-kal nő a tömlőben. (A vászonköpenyes külső gumi tágulása elhanyagolható.)

- a) Hányszor kell a pumpát lenyomnunk?
- b) Sajnos rossz a kerékpár szelepe, így a pumpáláshoz kissé meg kellett lazítani a csavarját. Ekkor viszont másodpercenként 2,5%-kal csökken a nyomás a szelepen távozó levegő miatt. Másodpercenként hányszor kell lenyomni a pumpát, ha egy perc alatt szeretnénk a kereket a külső légnyomás 2,5-szeresére felfújni?

615. Egy matematika tagozatos osztályban a gyerekek egy szekrény üvegére rekurzív matematikai mintát festenek az ábrán látható módon.

A képet úgy készítik el, hogy a 80 cm oldalú négyzet oldalait elharmadolják, és a középen keletkezett négyzet területét feketére festik. A maradék négyzetekkel ugyanígy járnak el.



- a) Hány darab négyzetet kell befesteniük az ötödik lépésben?
- b) Az ötödik lépés után mekkora részét festették be a négyzetnek?
- c) Hányadik lépés után lesz a négyzet legalább 90%-a befestve?

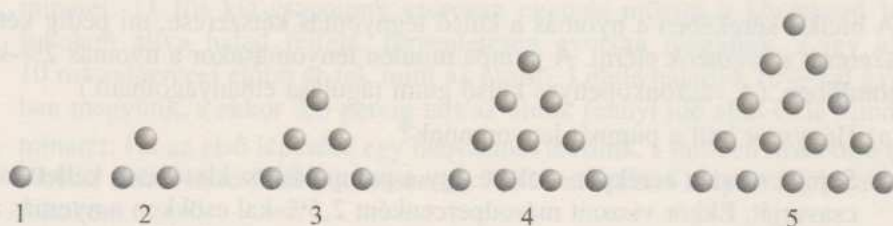
616. A mosáshoz egy 100%-os koncentrátumú öblítőt vásárolunk. Ezt úgy használjuk, hogy egykupaknyit kiöntünk belőle a ruhákhoz, majd helyére vizet töltünk. (Egykupaknyi mennyiség a flakon $\frac{1}{20}$ -ad részét jelenti.)

- Lehet-e így egy örökös, állandó koncentrátumú oldatot kapni?
- Hányadik öntögetésre lesz az oldatunk körülbelül 25%-os?
- Hányadik öntögetésre lesz az oldatunk pontosan 25%-os?

617. Egy negyvenliteres akváriumban víztisztító berendezés működik. Ez a vizet folyamatosan magába szívja, majd megszűrve visszaengedi. A gép működése közben a szűrt víz tökéletesen elkeveredik. Percenként egy liter víz halad át a szűrőberendezésen. Mennyi idő múlva lesz a víz fele átszűrve?

A vételkor a kereskedő azt állította, hogy a berendezés az egész vizet egy óra alatt átszűri. Igaz-e az állítása?

618. A püthagóreusok nagyon szerettek a számokkal játszani. Például kitalálták a háromszögszámokat. Ezek az ábrán látható módon képezhetők (a kavicsokat egyenletesen helyezik el).



- Hogyan határozhatjuk meg az n -edik háromszögszámban levő kavicsok számát?
 - Milyen összefüggést találhatunk a kavicsok száma és az általuk lefedett terület mérőszáma között?
- (Két szomszédos golyó középpontjának távolságát tekintjük egységnyiinek. Mennyi az n -edik háromszögszám területe n -nel kifejezve?)

619. a) Egy mértani sorozat három egymást követő tagja közül a harmadik 2. Ha ezt az első kettő elé tesszük, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Mi volt az eredeti három szám?

b) Írjon fel egy olyan harmadfokú egyenletet, amelynek gyökei 2 , $\frac{1}{2}$ és -1 .

c) Bizonyítsa be, hogy minden kettőnél nagyobb vagy egyenlő számra igaz a következő összefüggés!

$$\sqrt[3]{x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1} \leq x - \frac{1}{2}$$

620. Egy mértani sorozat három, egymást követő tagjának összege 39, tízes alapú logaritmusuk összege 3. Határozza meg a sorozat első három elemét!

621. Egy számtani sorozat negyedik tagja 5. A sorozat d különbségének milyen értékére igaz, hogy az első három tag páronként vett szorzatát összeadva a legkisebb értéket kapjuk?
622. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egy mértani sorozat egymást követő tagjai. A sorozat hányadosa $\frac{5}{4}$.
- Mekkorák a háromszög szögei?
 - Tegyük fel, hogy a háromszög legkisebb oldala 12 cm. Milyen magas az a gúla, amelynek térfogata 170 cm^3 és alaplapja az adott háromszög?
 - A fenti paraméterekkel fagúlákat állítanak elő dísz tárgyak készítéséhez. Ehhez henger alakú fadarabokat használnak fel. Mekkora legyen a henger alapkörének sugara, hogy a megmunkálás során a hulladék a lehető legkevesebb legyen? (Tegyük fel, hogy a henger alakú rudak magassága a gúla magasságának egész számú többszöröse.)
623. Egy háromszög legnagyobb szöge kétszerese a legkisebb szögnek, a háromszög oldalai pedig egy 3 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a háromszög területe?
624. Egy háromszög szögeinek tangensei egy 1 differenciájú számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a háromszög legkisebb szöge?
625. Egy derékszögű háromszög oldalai
- számtani;
 - mértani
- sorozatot alkotnak. Mekkorák a háromszög szögei?
626. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai, szögei közül pedig az egyik szög kétszerese egy másiknak. Mekkorák a háromszög szögei?
627. Egy háromszög oldalai mértani sorozatot alkotnak.
- Lehet-e a sorozat hányadosa 1,7?
 - Lehet-e a sorozat hányadosa 0,8?
 - Milyen határok között változhat a sorozat hányadosa?
628. 800 ezer forintot két évre takarékbba tettünk éves lekötésre (az első évi kamatot év végén tőkésítik). A második év végén 933 040 Ft-ot vehettünk fel.
- Hány százalékos volt az átlagos éves pénzgyarapodás?
 - A második évben két százalékkal nagyobb volt a kamatláb, mint az elsőben. Hány százalék volt az első évben a kamatláb?
 - Az eltelt két évben az infláció átlagosan évi 11%-os volt. Hány forintot ért a 933 040 Ft két évvel korábban?

629. Egy sorozatot az alábbi módon adtak meg: $a_n = n^3 + 11n$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

- a) Adja meg a sorozat első négy tagját!
- b) A sorozat hányadik tagja lesz egymilliónál nagyobb?
- c) Mutassa meg, hogy a sorozat minden tagja osztható 6-tal!

630. Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben azokat az $(x; y)$ pontokat, amelyekre a következő feltétel teljesül!

$$\lg \sin x > \lg y$$

631. Ábrázolja a koordináta-rendszerben a sík azon pontjait, amelyek a következő feltételt kielégítik!

$$\log_{\sin x}(|y - 1| - 2) > 0$$

632. Ábrázolja koordináta-rendszerben azt a ponthalmazt, amelyre

$$(2 \sin x)^y > 1!$$

633. Ábrázolja koordináta-rendszerben azt a ponthalmazt, amelyre

$$\log_{y+1}(x^2 - 1) > 1!$$

634. $y = ax^2$ és $y = bx$ függvények grafikonja közötti terület értéke

- a) milyen $(a, b) = 1$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ értékre lesz állandó?
- b) milyen $(a, b) = 1$, $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ értékre lesz a terület mérőszáma is egész?

635. Ábrázolja, és jellemezze az alábbi függvényt függvényvizsgálattal!

$$f(x) = (2 - x)\sqrt{x + 4}$$

636. a) Diszkutálja, és ábrázolja a következő $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1!$$

- b) Melyik koordinátájú vektorral kell eltolni a koordináta-rendszert, hogy a kapott grafikon az (új) origóra szimmetrikus legyen?
- c) Mi lesz ebben a koordináta-rendszerben a hozzárendelési szabály?
- d) Az új koordináta-rendszerben határozza meg az I. és III. negyed szögfelező egyenese és a görbe által bezárt terület nagyságát!

637. Mutassa meg, hogy a következő függvény szigorú monoton növekedő!

$$f(x) = x + \sin x$$

638. Határozza meg a $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ függvény

- a) 45° -os irányszögű érintőinek egyenletét;
- b) 30° -os érintőinek egyenletét!

639. Adott az alábbi $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ahol $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = x^4 - kx^2$$

- a) Határozza meg a k paraméter függvényében az f függvény lokális minimumának helyét!
- b) Ábrázolja $k = -1$ és $k = 1$ esetén a fenti két függvényt!
- c) Határozza meg $k = 1$ esetén az x tengely és a függvény grafikonja által bezárt rész területét!

640. Ábrázolja és jellemezze a következő függvényt!

$$f(x) = (x + 1) \cdot (x + 3)^2$$

641. Határozza meg az $xy = 1$ görbe azon érintőit, amelyek merőlegesek az $y = 3x + 2$ egyenesre!

642. Ábrázolja, és jellemezze az alábbi függvényt! (A függvényvizsgálat során használjuk ki az első derivált nyújtotta információkat!)

$$f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

643. Határozza meg az $y = x^2 + 4$ görbe azon pontjait, amelyekbe érintőket húzva azok párhuzamosak az $y = 3x - 5$ egyenessel!

644. Vizsgáljuk meg a következő függvény szélsőértékét a pozitív valós számok halmazán!

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

645. Vizsgáljuk meg a következő függvény szélsőértékét a pozitív valós számok halmazán!

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x + 4)}{x}$$

646. Határozzuk meg a következő függvény minimumát!

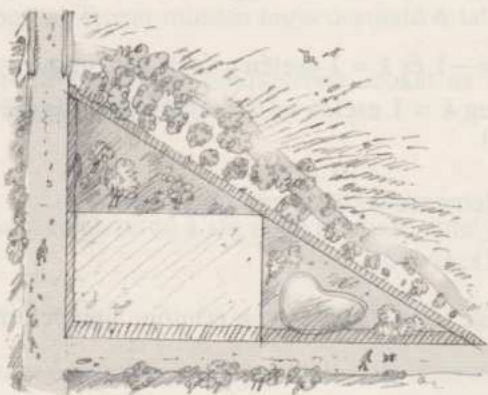
$$f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + \frac{3}{x^2 y^2}$$

647. Adott az f pozitív egész számokon értelmezett függvény, ahol n páratlan pozitív egész szám.

$$f(x) = (x - 1)^2 + (x - 2)^2 + \dots + (x - n)^2$$

Hol veszi fel ez a függvény a legkisebb értékét, és mennyi ez az érték?

648. Egy háromszög alakú saroktelekre téglalap alapterületű házat akarnak építeni úgy, hogy annak két oldala az utcára nézzen. A telek két merőleges oldala 50 m, illetve 30 m. Hogyan válasszák meg a ház oldalainak hosszát, hogy az a lehető legnagyobb alapterületű legyen?



649. Egy 50 cm átmérőjű, 6 méter hosszú fatörzsből téglalap keresztmetszetű gerendát faragnak. Mekkora élei lesznek, ha
- a) a téglalap-keresztmetszet átlója maximális;
 - a) a gerenda testátlója maximális;
 - a) a gerenda térfogata maximális;
 - a) a gerenda éleinek négyzetösszege maximális;
 - a) a gerenda éleinek összege maximális?
650. Vizsgáljuk meg az $f(x; y) = x^6 + y^6$ függvényt, ha tudjuk, hogy $x + y = 10$, valamint $x > 0, y > 0$!
- a) Milyen ponthalmazon van értelmezve a függvény?
 - b) Mennyi a függvény minimuma?
 - c) Hol veszi fel a minimumértékét?

651. Bizonyítsa be, hogy igazak a következő egyenlőségek!

$$a) \int_{-1}^1 x^3 dx = \int_{-5}^5 x^3 dx$$

$$b) \int_0^{\pi} \sin x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$c) \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 dx$$

652. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$\cos^2 x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) \geq 0$$

653. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\log_{\cos x}(\sin 2x) > 1$$

654. Bizonyítsuk be, hogy $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ és $a + b = 1$ esetén, $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$!

655. Egy háromszög egyik oldala a másik két oldal mértani közepe. Bizonyítsa be, hogy az ezzel szemközti szög legfeljebb 60° lehet!

656. Legyenek egy háromszög szögei radiánban mérve α , β és γ . Bizonyítsa be, hogy ekkor $27(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \leq 8\pi^3$!

657. Az x és y milyen értéke mellett lesz minimális a $z = x^2 + y^2 - 8x + 5y$ kifejezés értéke?

658. a) Ábrázolja, és diszkutálja a következő $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $x \mapsto x^3 + 9x - 10$ függvényt!

b) Bizonyítsa be, hogy az $x^3 + 9x - 10 = 0$ egyenletnek csak egy valós megoldása van. Adja meg a gyök értékét!

659. Ábrázolja, és jellemezze a következő függvényt!

$$f: x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

660. Adott a valós számok halmazán értelmezett következő függvény:

$$f: x \mapsto \sin^6 x + \cos^6 x + k(\sin^4 x + \cos^4 x), \text{ ahol } k \in \mathbb{R} \text{ paraméter.}$$

a) Milyen k paraméterre lesz a függvény periodikus?

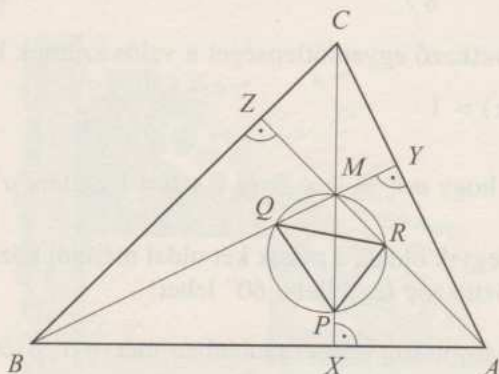
b) Milyen k paraméterre lesz a függvénynek nullahelye?

c) Ábrázolja a függvényt $k = -\frac{3}{2}$, illetve $k = -1$ esetén!

661. Igaz-e, hogy az $x^2 + y^2 = 1$ körvonal pontjainak koordinátáira mindig fennáll, hogy $|x + y| \leq \sqrt{2}$? Milyen számpárok esetén áll fenn egyenlőség?

662. Az ABC háromszög B -nél tompaszögű. Az A -ból, illetve a C -ből induló magasságának talppontja X , illetve Z . Igazolja, hogy az XBZ háromszög hasonló az ABC háromszöghöz!

663. Az ábrán látható ABC háromszög M magasságpontjára illeszkedő k kör a háromszög magasságvonalait a P , a Q és az R pontokban metszi. Igazolja, hogy PQR háromszög hasonló az ABC háromszöghöz!



664. Mekkora középponti szögnek megfelelő AB húrral kell egy kört elvágunk, hogy a kisebbik körív, a nagyobb körív és a körkerület mérőszáma egy mértani sorozat három egymást követő tagja legyen?
665. Egy kör egyik átmérőjének két végpontja legyen A és C . Az átmérő harmadolópontjaiban állítson merőleges félegyeneseket az átmérőre az egyik, illetve a másik félkörben, ellentétes irányokban. Ezek kimetszik a körön a B és D pontokat.
- Bizonyítsa be, hogy az $ABCD$ téglalap!
 - Hány százaléka a téglalap területe a kör területének?
 - Mekkorák a téglalap oldalai, ha a kör sugara r ?
666. Egy deltoid alakú papírsárkány két keresztlécének hossza 30 cm és 54 cm. Azt szeretnénk, hogy a sárkány két különböző hosszúságú oldaléle merőleges legyen egymásra.
- Hogy helyezzük el a két keresztlécet, hogy a fenti feltétel teljesüljön?
 - Mekkorák az oldalak?
667. Egy háromszög területe $t = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - (b - c)^2)$, ahol az oldalak hosszát szokásosan a , b , c jelöli.
- Mekkorák egy ilyen háromszög szögei?
 - Igaz-e, hogy ha a c oldallal szemközti szög 30° -os, akkor $b = 2c$?
 - Vannak-e a területre vonatkozó kezdeti feltételnek eleget tevő háromszögek között olyanok, amelyeknek a szögei egy mértani sorozat egymás utáni tagjai?
668. Adott egy ABC hegyesszögű háromszög.
- A háromszög AB oldalára (kifelé) rajzolt négyzet csúcspontjai legyenek D és E . Az AB oldalt az EC egyenese a K , a CD egyenese az L pontban metszi. Állítsunk merőlegest az AB oldalra a K és L pontokban! E merőlegesek a

háromszög másik két oldalegyenesét az M és az N pontokban metszik. Igazolja, hogy a $KLMN$ négyszög négyzet!

b) A háromszögbe írható négyzetek közül melyiknek legnagyobb a területe, ha $a > b > c$?

c) Igazolja, hogy a háromszögbe írható négyzet területe nem lehet nagyobb a háromszög területének felénél!

669. Egy r sugarú kör r hosszúságú húrjának végpontjai A és B . A kör melyik C pontjára lesz az $AC + CB$ összeg a legnagyobb?

670. a) Milyen négyszöget határoznak meg egy síkbeli konvex négyszög két szemkötti oldalának felezőpontjai és az átlók felezőpontjai?

b) Legyen A, B, C, D a tér tetszőleges négy pontja úgy, hogy nincs köztük három egy egyenesbe eső pont. Milyen négyszöget határoznak meg az AB, BC, CD, DA szakaszok felezőpontjai?

671. Mutassa meg, hogy egy parabolához minden külső pontból pontosan két érintő húzható!

672. Egy háromszög belső pontján keresztül az oldalakkal párhuzamosokat húztunk, így három paralelogrammát és három háromszöget kaptunk.

a) A háromszögek területe rendre $1, 4$ és 9 cm^2 . Mekkora az eredeti háromszög területe?

b) A háromszögekbe írt körök területe rendre $1\pi, 4\pi$ és $9\pi \text{ cm}^2$. Mekkora az eredeti háromszögbe írható kör területe?

673. Bizonyítsa be, hogy minden parabola hasonló!

674. Egy kör érinthet-e három pontban egy parabolát?

675. Adott R sugarú kör egy A pontját rögzítjük, és legyen B a kör tetszőleges pontja. Hol helyezkednek el az ABC egyenlőszárú derékszögű háromszög C csúcsai, ha $|AB| = |AC|$ és B végigfutja a kört?

676. Egy szabályos háromszög oldalait merőlegesen vetítjük egy, a háromszög síkjában levő egyenesre. Milyen helyzetű egyenes esetén lesz a vetületek négyzetösszege a legnagyobb?

677. Igazolja, hogy a szabályos ötszög bármely két, nem közös csúcsból induló átlója aranymetszésben metszi egymást! (Az aranymetszés aránya: a kisebb rész úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobb az egészhez.)

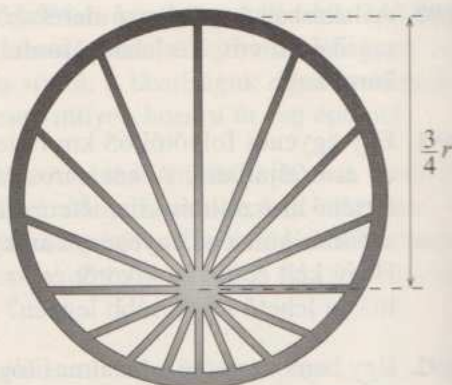
[A feladat megoldását megkönnyíti, ha előbb az alábbi kérdésekre válaszol:

a) Hogyan aránylanak egymáshoz a 36° -os szárszögű egyenlő szárú háromszög oldalai?

b) Hogyan aránylik egymáshoz egy adott sugarú körbe írt szabályos ötszög és tízsög oldala? (Pontos értéket számoljon!)]

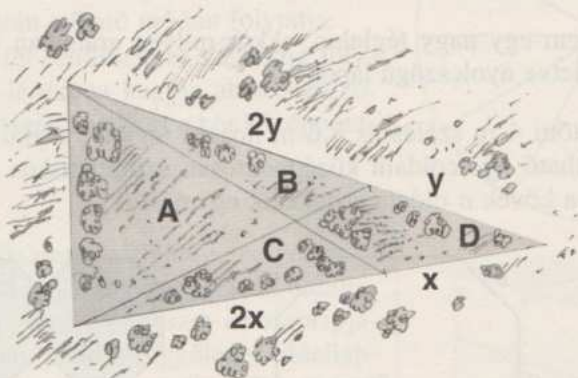
678. Egy körbe írt szabályos háromszög csúcsainak a körvonal tetszőleges pontjától mért távolságainak összege a kör melyik pontja esetén lesz
- a legkisebb;
 - a legnagyobb?
 - Mennyi a távolságösszeg legkisebb és legnagyobb értéke?
679. Határozza meg a szabályos ötszög belső szöge szögfüggvényeinek pontos értékét.
680. Igazolja, hogy minden szimmetrikus érintőtrapéz esetén a párhuzamos oldalaknak
- számtani közepe a szár;
 - mértani közepe a beírt kör átmérője;
 - harmonikus közepe a szárazon levő érintési pontokat összekötő szakasz!
 - Milyen nagyságrendi összefüggés írható fel a fentiek alapján a középértékek között?
681. Tükrözzünk egy adott P pontot egy tőle különböző O ponton keresztülmenő összes egyenesre!
- Mi lesz a keletkező képpontok mértani helye?
 - Vegyünk O -n átmenő egyenespárokat. A P pontot mindkettőre tükrözve, a két tükörkép és a P pont (ha nem esnek egy egyenesbe) egy háromszöget alkot. Mekkora a keletkező háromszög területe, ha OP távolság $d = 10$ egység, s az egyik tengely merőleges OP -re, míg a másik az előző tengely és az OP egyenes szögfelezője.
 - Mikor lesz a b -ben leírt egyik tükörtengely forgatásával létrejött háromszög területe a legnagyobb (a másik tengely mindig szögfelező)?
682. Egy négyszögben két-két szemközti oldal fölé rajzolt négyzetek területösszege egyenlő. Milyen négyszögek esetén teljesül a fenti feltétel?
683. a) Egy háromszög két külső szögének aránya $11 : 9$, e két külső szög különbsége 24° . Mekkora a háromszög legnagyobb szöge?
- b) Egy háromszög egyik oldalát a hozzá tartozó magasság 14 és 36 egységnyi részekre osztja. Ezzel a magassággal húzunk egy párhuzamost, amely felezi a háromszög területét. Milyen arányban osztja ez a párhuzamos az előbbi oldalt?
684. Egy háromszög kerülete 24 egység. Ha a beírható kör oldalakkal párhuzamos érintőinek a háromszögön belüli részét tekintjük, akkor ezek közül mekkora lehet a leghosszabb? Melyik háromszögben fordulhat ez elő?
685. Egy húrnégyszög oldalai a körüljárás irányában számtani sorozatot alkotnak. A legkisebb oldal 10 cm, a négyszög kerülete 52 cm. Mennyi a területe?

686. Egy arany ékszer egy kör alakú keretből és benne nyolc darab pálcikából áll, amelyek egy ponton mennek át, és egyenlő szögeket zárnak be egymással. Ezek a kör húrjai, illetve az egyik közülük egy átmérő. A közös pont a sugár körívhez közelebbi negyedelő pontja. A kör sugara 2,4 cm.



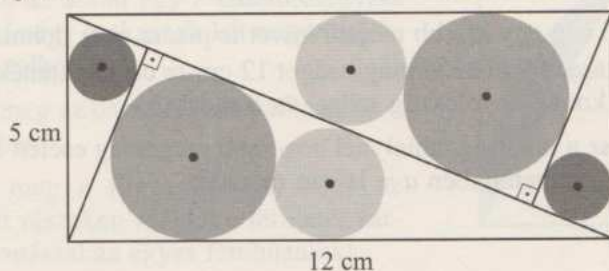
- a) Mekkora a legrövidebb pálcika hossza?
b) Mekkora az átmérőt követő leghosszabb pálcika hossza?

687. Egy háromszög alakú telket az eladás előtt az ábrán látható módon négy részre osztanak fel. A telek 1 200 000 Ft-os árának a felosztása az egyes részek területének arányában történik. Mennyit fizetnek az új tulajdonosok?



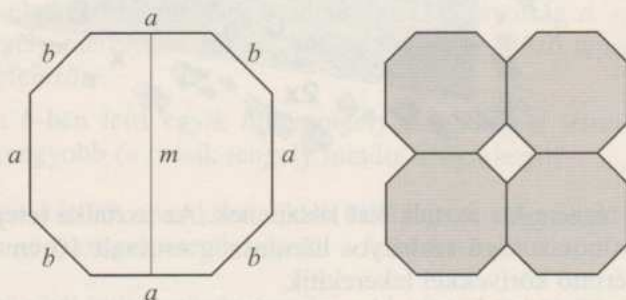
688. Bölcsődék részére kis asztalkákat készítenek. Az asztalka teteje úgy készül, hogy 90 cm oldalhosszúságú szabályos háromszög csúcsait 10 cm sugarú, az oldalak egyenesét érintő körívvel lekerekítik. Hány százalék a hulladék?

689. Egy téglatest alakú gyertyatartóba, amelynek alapélei 5 cm és 12 cm hosszúak, henger alakú gyertyákat raknak az ábrán látható módon. (Az ábrán a gyertyatartót felülnézetben látjuk.)



A gyertyák érintik a doboz egy-egy oldalfalát, a belső elválasztófalakat is, sőt vannak olyanok, amelyek egymást is. Mekkora a gyertyák sugarai?

690. A lakásban két folyosó derékszögben találkozik. Az egyik szélessége 110 cm, a másiké 90 cm. Be lehet-e fordulni egy 3 m hosszú, vízszintesen tartott függönykarnissal?
691. Egy egyenes folyótól 65 km-re levő A városból a folyóparton levő B városba kell az árut eljuttatni. A két város távolsága 97 km. A számítások szerint a hajóval történő áruszállítás kilométerenként negyedannyiba kerül, mint autóúton. (Az áruszállítás költsége egyenesen arányos a megtett úttal.)
Hová kell építeni a kikötőt és az A -ból a folyópartra vezető utat, hogy az áruszállítás a lehető legolcsóbb legyen?
692. Egy bank szeretné a hatalmas fogadótermét mozaikparkettával burkolni. A mozaik kétféle lapot tartalmaz: szabályos tizenkétszög alakú lapokat és csillag formájú nyolcszögeket.
- a) Ha a tizenkétszögek élhossza 20 cm, akkor mekkora a területe a kétféle mozaiklapnak?
- b) Ha a terem egy nagy téglalap, akkor milyen arányban van szükség tizenkétszögű, illetve nyolcszögű lapokra?
693. A házunk előtti 4 m széles és 5,6 m hosszú téglalap alakú területet kövezzük ki az ábrán látható nyolcoldalú középpontosan szimmetrikus kövekkel. A burkolat lerakásakor a kövek a oldala érintkezik egymással.

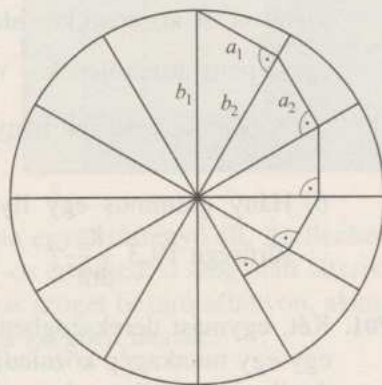


- a) Ha $a = 16$ cm és $m = 32$ cm, akkor mekkora a kő b oldala, szögei és területe?
- b) Legalább hány darab fenti méretű kő kell a terület lefedéséhez? (A kövek találkozásánál keletkező lyukakat nem kell befedni. A kövek darabolhatók, de a maradékokat már nem használhatjuk újra.)
- c) A gyártó cég egy kisebb méretű követ is piacra akar dobni, ezért az $a = 16$ cm változtatása nélkül az m magasságot 12 cm-re csökkentenék. Így mekkorák lennének a konvex nyolcszög szögei és b oldala?
- d) Melyik az a távolság, amelynél hosszabb magasság esetén létrejön ez a konvex nyolcszög, amennyiben $a = 16$ cm marad?

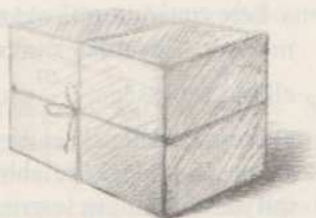
694. Egy egyenes vasútvonal azonos oldalán levő két falu közös vasútállomást épít úgy, hogy a megépítendő egyenes utak hossza összességében a legrövidebb legyen. Az egyik falu 3 km-re, a másik 4 km-re van a síntől, a távolságuk egymástól pedig 8 km. Hová kell építeni az állomást? Összesen milyen hosszú út fog épülni?

695. Egy tükrös távcső főtükre forgási paraboloid. A távcső átmérője 40 cm. A tükrök széle 16 cm-rel van magasabban a közepénél. Milyen messze kell elhelyezni a fényképlemezt a távcső tubusában a főtükör közepétől? (Ezt a fotólemezt a paraboloid gyújtópontjában kell elhelyezni, mivel a végtelen távrolól érkező fényeket ide gyűjti a tükrök.)

696. Egy 10 cm sugarú körbe Anna úgy próbál „csigavonalat” rajzolni, hogy az ívét tizenkét részre osztja, majd az így keletkezett szabályos tizenkétszög egyik csúcsából merőlegest állít az egyik átlóra. Az ekkor létrejött metszéspontból az eljárást az ábrán látható módon folytatja. Úgy dönt, hogy fél centiméteres szakaszig folytatja. Hányadik lépésben hagyja abba a rajzolást? Milyen messze van ekkor a kör középpontjától?



697. Egy dobozt vízszintes felületre helyezve a következőképpen kötik át zsineggel: az oldallapok középvonala mentén egyszer az alaplappal párhuzamosan, majd a függőleges oldallappal párhuzamosan. (Lásd az ábrát!) A csomó megkötéséhez szükséges zsinegen kívül még egyméternyi zsineg van.

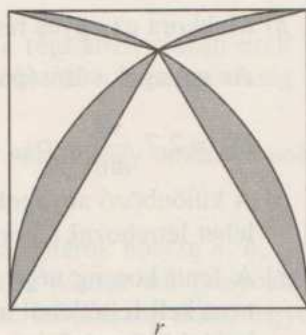


Mekkora az a legnagyobb térfogatú téglatest formájú doboz, amelyet egy 1 méteres zsineggel a fenti módon át lehet kötni?

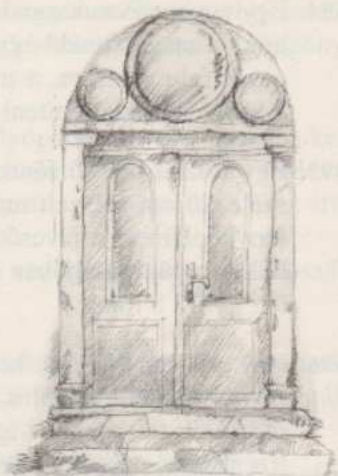
698. Egy ólomüveg ablakban fémhuzalok erősítik a keretet és választják el egymástól a különböző mintákat. Ezen az ábrán egy r oldalú, négyzet alakú ablakban négy szakasz és két negyedkörív készült fémhuzalból.

a) Határozza meg az összes fémhuzal hosszát r függvényében!

b) Határozza meg r függvényében, hogy az ábrán jelölt részeken mekkora területt zárnak be egymással az egyes fémhuzalok!



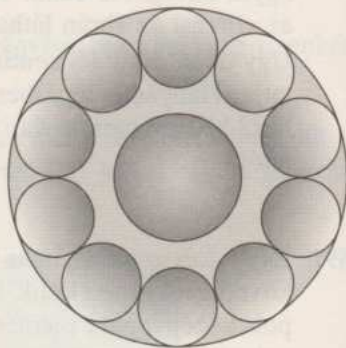
699. Egy kapu fölötti félkör alakú részbe három kör alakú ablakot építenek be úgy, hogy érintsék egymást és a széleket is. A kapu 1,2 m széles. Mekkora a kör alakú ablakok átmérője?



700. A rajzon egy 1674-ben készített díszes aranypénz látható, amelynek vastagsága 1 mm, sugara 3 cm. A rajzon látható módon a pénzt a szélén tíz darab kisebb, középen pedig egy nagyobb kör alakú pecsét díszíti. A szélén levő kisebb körök mindegyike érinti a két szomszédját és az eredeti pénz szélét is. A középső kör alakú pecsét átmérője az egész pénz átmérőjének $\frac{3}{8}$ része.

a) A pénz területének hány százalékát fedi díszítés?

b) Hány grammos egy ilyen pénz, ha az arany sűrűsége $19,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$?



701. Két, egymást derékszögben metsző egyenes úton, egy-egy munkagép közeledik a kereszteződés felé. Amikor az egyik nyolcvan méter távolságban van a kereszteződéstől, akkor a másik éppen hatvan méterre. Egyenletes sebességgel közlekednek, az előbbi sebessége $3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, az utóbbié $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. A sofőrök akkor kezdenének el egymással beszélgetni, amikor a lehető legközelebb vannak egymáshoz. Mennyi idő múlva következik ez be, milyen távolságra lesznek egymástól és a kereszteződéstől?

702. Egy ötvös olyan korongot készít, amelyet négy különböző sűrűségű, de azonos tömegű anyagból állított össze. Az egyes összetevők az alumínium, az arany, az ezüst és a réz a körben egy-egy körcikket alkotnak.

a) Mekkora az egyes részek középponti szöge?

Az anyagok sűrűségei:

$$\rho_{\text{Al}} = 2,7 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}; \rho_{\text{Au}} = 19,3 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}; \rho_{\text{Ag}} = 10,5 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}; \rho_{\text{Cu}} = 8,9 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}.$$

b) A különböző anyagoknak eltérő a színük. Ezt figyelembe véve hányféleképpen lehet létrehozni a korongot?

c) A fenti korong négy szektorát a négy megadott színnel színezik ki úgy, hogy nem kell feltétlenül mind a négy színt használni, és a szomszédos tartományok különböző színűek legyenek. Hányféle színezés jöhet így létre?

703. Egy falióra ingája 4 cm-t emelkedik, miközben a függőlegestől mért távolsága 25 cm.

a) Milyen hosszú az inga?

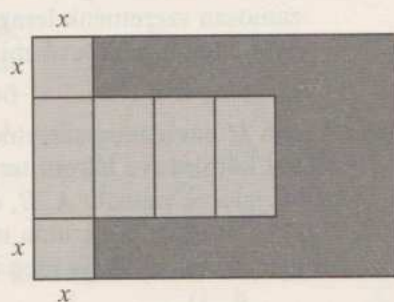
b) Mekkora utat tesz meg közben az inga legalsó pontja?

704. Az asztalos egy dobozt szeretne készíteni gyermekének. Egy $1\text{ m} \times 1,5\text{ m}$ -es elhanyagolható vastagságú rétegelt lemezből szeretné elkészíteni az ábra szerinti négyzetes oszlop formájú dobozt. A sátrózott rész lenne a hulladék, a maradék a készí-tendő doboz hálójá, amit azután szögeléssel és ragasztással állít össze.

a) Írja fel a doboz térfogatát x függvényében!

b) Mely x választása mellett lesz a legnagyobb a doboz térfogata?

c) Ekkor hány százalék a hulladék?



705. Egy észak–déli irányban haladó folyó egyik partján egy óriásfenyő áll. Átellenben a túlsó partról nézve a fa teteje a vízszintessel 45° -os emelkedési szög alatt látszik. Ha nyolcvan métert odébb sétálunk a parttal 30° -os szöget bezáró sétányon, akkor ugyanennek a fenyőnek a teteje 30° -os emelkedési szögben látszik.

a) Milyen magas a fa, és milyen széles a folyó?

b) A fa tövében ülő turista fejével követte a túlparton nyolcvan métert sétáló megfigyelőt. Hány fokos szöggel kellett elfordítania a fejét közben?

706. Egy egyenes, 10 km hosszú, AB útszakasz felénél fekszik a D település. Szeretnének egy D -t elkerülő utat építeni. Az út keresztülmenne a C ponton, amely D -től 3 km-re, A -tól 4 km-re fekszik, ahol egy korábbi bekötőúthoz csatlakozna. Az építendő út A -nál és B -nél belesimulna az eddigi egyenes útba, azaz mindkét pontban AB lenne az érintője az új út görbéjének. Emellett az út mindig közeledjen a végpontokhoz.

a) Keressen olyan, legfeljebb negyedfokú polinomfüggvényt, amelynek grafikonja az építendő út lehet!

b) Az egész terület eddig szántó volt, s az új út és a régi közti részen ezek után megszűnik a földművelés. Mekkora terület „veszett el” a mezőgazdaság számára?

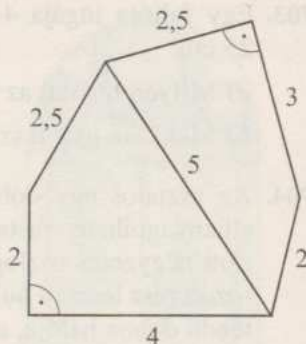
*c) Lehetne-e csökkenteni ezt az „elveszett” területet azzal, hogy ötödfokú polinomot is megengedünk az út leírására?

707. A mesebeli király országa háromszög alakú, az országhatárok hossza a , b , c mérföld. Lánya esküvőjén a király fele királyságát az ifjú párnak adományozta. Az országot úgy osztották ketté, hogy mindkét birodalom háromszög alakú legyen, s minél rövidebb legyen az új határvonal.

Milyen hosszú az új határvonal a keletkező két ország között?

708. Egy régi, hatszögletű szobába padlószőnyeget terveznek. Ehhez megméri a szoba oldalait, valamint egy átlóját.

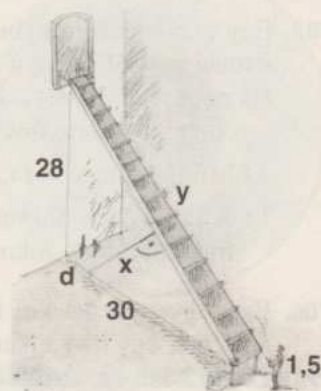
- Mekkora a szoba alapterülete?
- Hány méter szőnyeget kell vásárolni, ha az négy méter széles, és ezt az oldalt az ábrán az alsó, derékszöget tartalmazó oldallal párhuzamosan szeretnék leragasztani? (A szőnyeget nem lehet a rajta levő mintázat miatt forgatni!)



709. A hajó H navigátora szeretné megállapítani a hajó pontos helyzetét. A hajóról távcsővel körülnézve három tereppontot lát, amelyeket felismer, és amelyek a térképen is jelölve vannak: A , B , és C . Megméri a következő szögeket: $\angle AHB = 100^\circ$, $\angle BHC = 125^\circ$. Ezek után meg tudja határozni a hajó helyét. Hogyan csinálja? Adja meg a szerkesztési eljárást indoklással!

710. A ház 28 m magasan levő ablakából egy szállítószalag indul, és 1,5 m-rel a talaj felett végződik. A talajra eső merőleges vetülete 30 m. A nagy távolság miatt ki kell támasztani a szalagot pontosan a felezőpontjánál, a szalagra merőlegesen.

- Milyen hosszú a szállítószalag?
- Milyen hosszú a kitámasztó oszlop?
- A kitámasztó oszlop végét a talajon is rögzíteni kell. A ház falától számítva mekkora vízszintes feszítőrúdra van ehhez szükség?



711. Egy díszpark két, egymást derékszögben metsző egyenes sétaútvát egy harmadik, szintén egyenes vezetési úttal akarják összekötni úgy, hogy az összekötő út közvetlenül a park kis vadászháza mellett haladjon el. A vadászház az egymást derékszögben metsző utak egyikétől kétszáz, a másiktól háromszáz méter távolságban van. Legkevesebb hány méter hosszú az összekötő út? Adja meg az összekötő út irányát is!

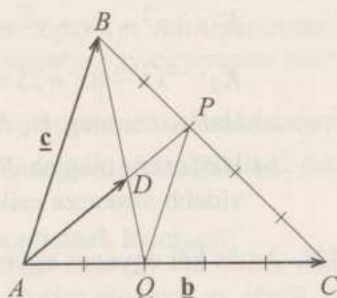
712. Egy 1,3 m széles folyosón egy téglalap alakú asztalt szeretnénk volna megfordítani, de beszorult. Az asztal méretei: $1,1 \text{ m} \times 0,75 \text{ m}$. Az asztallapnak vízszintesen kell maradnia, tehát térben nem forgatható.

- Mekkora szögnél szorul be az asztal?
- Mennyit kellene lefaragni minimálisan az oldalából, ha az eredetihez hasonló alakú asztalt akarunk kapni, amit már meg tudunk fordítani?
- *c) Minimálisan mekkora a lefaragandó terület, ha az asztalnak téglalap alakúnak kell maradnia, de a hasonlósághoz nem ragaszkodunk?

713. Rajzoljon egy koordináta-rendszert! Kösse össze a $P_0(1;0)$ pontot a $P_1(0;2)$ ponttal! Állítson merőlegest P_0P_1 -re a P_1 pontban! Ennek a merőlegesnek és az x tengelynek a közös pontja legyen P_2 . Állítson merőlegest P_1P_2 szakaszra P_2 -ben! Ennek a merőlegesnek és az y tengelynek a metszete legyen P_3 . Állítson merőlegest P_2P_3 szakaszra P_3 -ban, és így tovább. Az eljárást százszor megismételve jutunk a P_{101} ponthoz.

Mekkora lesz a $P_0P_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{100}P_{101}$ összeg?

714. Egy általános háromszög AC és BC oldalát osszuk fel öt egyenlő részre. A C csúctól mért harmadik osztópontokat kössük össze a szemben levő csúccsal. E szakaszok metszéspontja legyen D . Fejezzük ki az ábrán is látható $\vec{AD}$ vektort az $\vec{AC} = \mathbf{b}$ és az $\vec{AB} = \mathbf{c}$ vektorok segítségével!



715. Egy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1;4)$ és a $B(3;2)$ pontok.

- Bontsa fel az A pontból a B pontba mutató vektort $\mathbf{x}(-1;5)$ és $\mathbf{y}(3;3)$ vektorokkal párhuzamos összetevőkre!
- Adott egy rombusz, amelynek rövidebbik átlójának végpontjai A és B . A másik átló hossza ennek kétszerese. Írja fel a rombusz csúcsainak koordinátáit!
- Mekkora a rombusz területe?
- Mekkorák a rombusz szögei?

716. Egy derékszögű koordináta-rendszerben legyenek adottak a következő pontok!

$A(0;4)$, $B(4;0)$, $C(-4;-4)$, $D(-2;2)$, $E(2;2)$, $F(2;-2)$, $G(-2;-2)$.

A P ponthalmaz legyen az ABC háromszöglap, a Q ponthalmaz legyen a $DEFG$ négyzetlap.

Határozza meg a következő síkidomok területét!

- P
- $P \cap Q$
- $P \cup Q$
- $P \setminus Q$

717. Egy háromszög két csúcsának koordinátái $A(5;1)$, $B(2;15)$. A harmadik csúcsról tudjuk, hogy az y tengelyen van.

Határozza meg a C csúcs koordinátáit, ha azt szeretnénk, hogy a háromszög területe minimális legyen!

718. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái

$A(\lg x; \lg y)$, $B(\lg 9x; \lg y)$, $C(\lg x; \lg 27y)$.

- Határozza meg a háromszög területét!
- Mekkora legyen x és y , hogy a háromszög köré írható kör középpontjának koordinátái $(1;1)$ legyenek?

719. Egy rombusz két szomszédos csúcsa $A(0; 0)$ és $B(12; 5)$. Tudjuk, hogy a rombusz másik két csúcsának koordinátái is egész számok, területe pedig 119 területegység. Számítsa ki a hiányzó csúcsok koordinátáit!

720. Keresse meg az $x^2 + y^2 - 2y - 25 = 0$ egyenletű kör azon C pontját, amelyre igaz, hogy a kör AC és BC húrjainak aránya $2 : 3$, ha $A(-1; -4)$ és $B(1; 6)$!

721. Adott a következő két kör:

$$K_1: x^2 + 2x + y^2 + 4y = 15$$

$$K_2: x^2 - 8x + 35 = 16y - y^2$$

a) Határozza meg K_1 és K_2 körök közös E pontját!

b) Határozza meg az E ponton átmenő egyenesek közül azt, amelyiknek a legrövidebb szakasza esik az első negyedbe!

722. Adott két egyenes egyenlete.

$$e: 3x + 4y = 5$$

$$f: ax + 4y = 1$$

Hogyan válasszuk meg az a valós paramétert, hogy a két egyenes által közbezárt szög 60° -os legyen?

723. Adott egy parabolapályán mozgó test pályájának egyenlete.

$$y = 2x^2 + 8x + 12$$

a) Hol van vagy vannak a pályáján azok a pontok, ahol az érintő meredeksége 1?

b) Melyik az a legkisebb távolság, amennyire pályája során megközelíti az $y = x - 3$ egyenest?

c) Mekkora az a terület, amit a parabola $A(-1; 6)$ illetve $B(2; 36)$ pontja közötti ív, valamint ezen pontok merőleges vetülete az $y = x - 3$ egyenesen, és a két vetítőszög határol?

724. Adott az $y = 5 - x^2$ parabola. Írja fel azoknak a köröknek az egyenleteit, amelyek belülről szimmetrikusan két pontban érintik a parabolát és az $y = 1$ egyenest is!

725. Adott egy parabola a síkon. Határozzuk meg azon pontokat a parabola síkjában, amelyekből a parabola 90° -os szögben látszik!

726. Milyen messze van az (x, y) síkban levő $e: 3x + 4y - 5 = 0$ egyenestől a

a) $P(1; 2, 5)$;

b) $P(1; 2; 5)$ pont?

727. Tekintsük a következő egyeneseket! (m valós paraméter.)

$$(1 - m^2)x - 2my + 2(1 + m^2) = 0$$

- a) Hogyan helyezkednek el ezek az egyenesek a koordinátáson?
- b) Van-e az egyeneseknek közös pontjuk?
- c) Az m értékétől függően melyik egyenes érinti az $x^2 + y^2 = 4$ egyenletű kört? Állapítsa meg az érintési pontot!

728. Tekintsük az $y = (m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 1$ görbesereget! (m valós paraméter.) Bizonyítsa be, hogy $m \neq 1$ esetén a parabolák tengelypontja egy egyenesen van!

729. Tekintsük az $y = (m - 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 1$ görbesereget! (m valós paraméter.)

- a) Bizonyítsa be, hogy van olyan pont, amelyiken mindegyik görbe áthalad! Adja meg ezt a pontot!
- b) Határozza meg $m \neq 1$ esetén a parabolák fókuszpontjainak halmazát!

730. Egy lövedék parabolapályán mozog, miután 45° -os szögben elhagyja az ágyút. Az ágyútól 125 méterre ér le a földre. A kilövés helyét tekintsük origónak.

- a) Mi az egyenlete annak a parabolának, amelyen mozog?
- b) Milyen magasra emelkedik fel a lövedék, és az ágyútól milyen távolságra jut el?

731. Adottak a $kx^2 + (1 - 3k)x - y - 3 = 0$ ($k \in \mathbb{R}$) egyenletű alakzatok.

- a) Határozza meg a k értékét, ha ez az alakzat egyenes! Írja fel az egyenes egyenletét!
- b) Mely k nem nulla paraméter esetén lesz a parabola és az a) részben megadott egyenes által bezárt rész területe $4,5$?

732. Adott az $y = 3x - x^2$ parabola.

- a) Ábrázolja a parabolát!
- b) Adja meg a tengelypont, a fókuszpont koordinátáit, a vezéregyenes egyenletét és a paraméter értékét!
- c) Írja fel annak a parabolának az egyenletét, amely a fenti parabolának az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükörképe!
- d) Tekintse a megadott parabola $[0; 2]$ intervallumra vonatkozó leszűkítését, és a második parabolának azt a részét, amely ennek a tükörképe az $y = x$ egyenesre vonatkozóan. Határozza meg a két görbe szimmetrikus pontjait összekötő szakaszok közül a leghosszabbat!
- e) Határozza meg a két görbe által bezárt síkidom területét!

733. Igazolja, hogy egy körbe írt szabályos hatszög, négyszög, illetve háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint egy kocka éle, lapátlója és testátlója!

734. Térfogatának hányadrésze marad ki a szabályos tetraéderből, ha 4 db egybevágó, egymást és az oldalakat érintő gömböt helyezünk el benne? Hány százalékkal több vagy kevesebb hely marad ki, ha csak egy érintőgömböt írunk bele?

735. Vegyük egy kocka négy olyan csúcsát, amelyek közül semelyik kettő nem szomszédos.

a) Mit alkot négy ilyen csúcs?

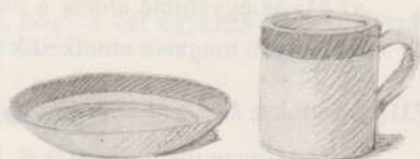
A kocka egy P belső pontjának a négy csúcstól mért távolsága rendre: $\sqrt{50}$, $\sqrt{70}$, $\sqrt{90}$, $\sqrt{110}$.

b) Milyen hosszú a kocka éle?

c) Hányféleképpen vehető fel ez a négy távolság?

d) Változik-e a kocka élhossza, ha más sorrendben vesszük a csúcsokat és így a távolságokat?

736. Egy henger alakú kávéscsésze és egy kör alakú tányér széle aranyozva van. A tányéron csak felül és belül, a csészén pedig csak felül és kívül található egy-egy arannyal kifestett sáv. A csésze 55 mm-es magasságának 40%-a van aranyozva, az alapkörének átmérője 48 mm. A tányér alapkörének átmérője 54 mm, a magassága 15 mm, az aranyozott sáv szélessége 20 mm – ez a tányéroltal szélességének $\frac{2}{3}$ -a.

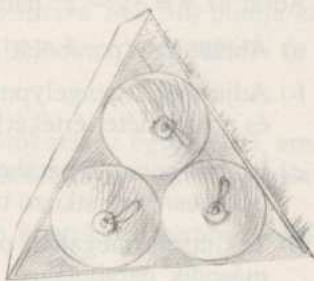


A két edényen összesen hány négyzetcentiméter az aranyozott részek területe?

737. Egy dobozba 3 cm sugarú, gömb alakú karácsonyfadíszeket raknak. Az ábra a doboz felülnézeti rajzát mutatja.

a) Mekkora a doboz oldala?

b) A cég meglepetésként egy negyedik díszet tesz a dobozba úgy, hogy az kívülről nem látszik (a három dísz alá, középre). Legfeljebb mekkora lehet a kis dísz sugara?



738. Egy a oldalú, négyzet alapú gúla $ABCD$ alaplajának A csúcsából a BCE oldalháromszög S súlypontjába vezet az AS szakasz. Az AS szakasz egyenese merőleges erre az oldallapra, és az AS szakasz hossza egyenlő a gúla magasságával.

a) Mekkora a gúla felszíne és térfogata?

b) Mekkora térfogatú részt metsz le az AES sík a gúlából?

739. Egy tetraéder egy csúcsában összefutó élei páronként merőlegesek egymásra.

a) Bizonyítsa be, hogy akkor a csúcsnak az alaplap síkjára eső merőleges vetülete az alapháromszög magasságpontja!

b) Mekkora a tetraéder térfogata, ha az alap a oldalú szabályos háromszög?

740. A matematikaórán a gyerekek kis kockákból egy a , b , c oldalélű, 100 cm^3 térfogatú téglatestet készítenek (a , b , c tetszőleges valós pozitív egészek). A tanító néni arra kéri őket, hogy készítsék el ezekből az élekből az összes lehetséges négyzetes oszlopot. (Például a alapélű b magasságú oszlop.)

a) Hányféle téglatestet készítenek?

b) Lehet-e köztük 100 cm -nél magasabb?

c) Hogyan kellene megválasztani a téglatest oldaléleit, hogy a belőlük készíthető kockák térfogatának minimuma legyen? ($a^3 + b^3 + c^3$)

d) Hogyan kellene megválasztani a téglatest oldaléleit, hogy a belőlük készíthető nem kocka négyzetes oszlopok térfogatának minimuma legyen?
($a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$)

741. Adott egy forgáskúp. Írjon ebbe egy olyan forgáshengert, amelynek alapja a kúp alapjára illeszkedik, és térfogata maximális! Mekkora a kúp magasságának és az alaplap sugarának az aránya, ha ez a henger egyenlő oldalú? (Egyenlő oldalú hengernek nevezzük azt a forgáshengert, amelynek tengelymetszete négyzet.)

742. Az $ABCE$ háromszög alapú gúla az ABC derékszögű háromszög, $EB = 8$, $BC = 5$, $AC = 7$ és AE merőleges az ABC háromszög síkjára. Mekkora a tetraéder felszíne, illetve térfogata?

743. Egy téglatest alakú ládikában öt biliárdgolyót helyeztek el két sorba, úgy, hogy azok nem tudnak elmozdulni, mert mindegyik érintkezik a doboz aljával, tetejével és falával, valamint egy vagy két szomszédos golyóval.
Mekkora a golyók átmérője, ha a ládika alapterülete $20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$?

744. Születésnapjára készülve az ünnepelt pezsgőspoharakból egy gúlát épít. Az első réteghez egy szabályos háromszögrácsba helyezi el a poharakat. A következő rétegekhez mindig három szomszédos pohárra állít egy újabbat. Amikor éppen az utolsót akarja a gúla tetejére feltenni, véletlenül leejti a poharat, ami összetörik. Némi gondolkodás után egy négyzetrácsba rendezi át a poharakat. Most négy szomszédos pohárra állít egyet, hogy megkaphassa a következő réteget. Így éppen felépül egy négyzet alapú gúla.

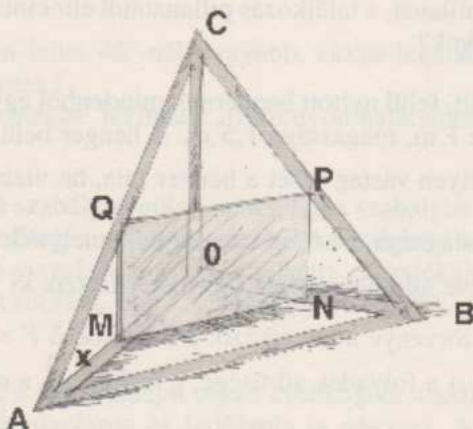
a) Hány pohárból áll az építmény?

b) Hány $0,75$ literes pezsgő kell a poharak megtöltéséhez, ha úgy tölti meg azokat, hogy csak a felsőbe önt, és onnan csurog le a többibe? Tegyük fel, hogy legfeljebb 5% megveszendőbe az átömléseknél! Egy tele pohár legyen $0,3 \text{ l}$.

745. A kocka testátlójára illeszkedő síkok közül melyik vágja ki a legnagyobb területű síkmetszetet a kockából?
746. A kocka felszínének mely pontjaiból látszik a kocka testátlója a legkisebb szögben? (Kivéve természetesen az átló végpontjait.)
747. Adott egy térbeli négyszög. Legfeljebb, illetve legalább hány fokos lehet a szögösszeg? Mikor lépnek fel ezek az esetek?
748. Bizonyítsa be, hogy egy tetszőleges háromszög alapú gúla íráható gömb átmérőjének kétszerese egyenlő a gúla négy magasságának harmonikus közepével!
749. Egy félgömb alakú mészkőből készült műalkotást védeni kell az időjárás viszontagságaitól, ezért téli fából készült szabályos négyoldalú gúlát építenek fölé, amelynek alapsíkja a félgömb alapsíkjával megegyezik. Az r sugár függvényében határozza meg, hogy mekkora legyen a gúla oldaléle és alapéle, ha a lehető legkevesebb anyagot szeretnék felhasználni!
750. Egy a alapélű, M magasságú szabályos négyoldalú gúla alaplajára olyan félgömböt helyezünk, amelyet mind a négy oldallap érint. A félgömb és az alaplappnégyzet középpontja egybeesik.
- Fejezze ki a félgömb sugarát az a és az M függvényében!
 - Hányszorosa a gúla magassága az alapélnek, ha a félgömb sugara, a gúla alapéle és a gúla magassága egy mértani sorozat három egymást követő tagja?
751. Szűkítőt építenek be a vízvezetékrendszerbe azért, hogy a cső átmérőjét a felére csökkentsék. Ehhez egy csonka kúpot használnak.
- Mekkora a kúp palástjának felszíne, valamint a térfogata a kúp nyílásszögétől függően?
 - Ha v a víz sebessége a szélesebb csőben, akkor mekkora lesz a keskeny szakaszon?
 - Ha nyílásszög nem lehet 40° -nál nagyobb, akkor legalább mekkora úton kell felgyorsulnia a víznek?
- Megjegyzés: A folyadékot tekintsük összenyomhatatlannak, azaz a térfogata állandó.
752. Egységnyi magasságú szabályos gúla (az alaplaja szabályos sokszög, és a csúcsának az alapra eső merőleges vetülete a szabályos sokszög középpontja), az alaplaján áll és félig van vízzel. Magasságának hány százalékáig van benne víz, ha a gúlát úgy fordítjuk a csúcsára, hogy a magassága továbbra is merőleges legyen az alaplapra?
753. Egy édesipari vállalat a csokoládéját olyan csonkagúla alakú díszdobozban hozza forgalomba, amelynek alaplaja és fedőlapja is négyzet. Az alapél a egység, a fedőél b egység ($a < b$), a magasság pedig m .
A gyártó cég egy idő után szeretne egy kétszer akkora térfogatú dobozt is a piacra dobni. Az új doboz alapéle továbbra is a lenne, és a térfogatnövelés az eredeti oldalélek meghosszabbításával történne.

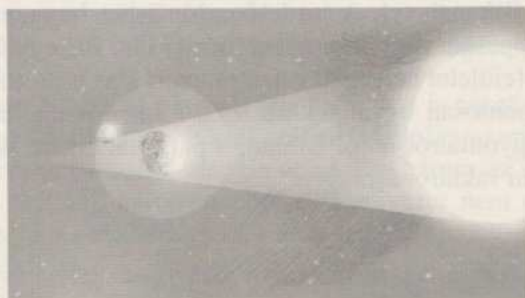
- a) Mennyivel nőne meg a doboz magassága, ha az eredeti méretek $a = 9$ cm, $b = 11$ cm és $m = 10$ cm?
- b) Bizonyítsa be, hogy ha c -vel jelöljük az új doboz fedőélét, akkor a^3 , b^3 és c^3 számtani sorozatot alkotnak!
754. K négyzetméter területű anyagmennyiségből maximális térfogatú, felül nyitott henger alakú konzervdobozt akarnak gyártani. Hogyan kell ehhez megválasztani a henger alapkörének sugarát és magasságát? Adja meg a henger alapkörének sugarát és magasságát K függvényében! (A hulladéktól tekintsünk el!)
755. Felül nyitott, forgáshenger alakú konzervdobozt akarnak gyártani. A konzervdoboz űrtartalma V .
Hogyan kell megválasztani a méreteket, hogy a legkevesebb anyagot használják a doboz gyártása során? Adja meg a henger alapkörének sugarát és magasságát is V függvényében!
756. Egy kocka tetszőleges öt csúcspontjának kiválasztásával keletkező test térfogata hányadrésze lehet a kocka térfogatának?
757. Egy téglatest testátlója egy négyzet oldalával egyenlő hosszú. E négyzet területének kétszerese egyenlő a téglatest felszínével.
Határozza meg a téglatest egy csúcsából kiinduló három élének összegét!
758. Az egyik egyenes utcán egy villanyoszlop áll. Valaki az oszlophoz jobbról, vele szemben egy másik személy balról közeledik. Mindketten 1,80 m magasak. Amikor egymástól 20 méterre vannak, az egyik árnyéka 2,6 m, a másiké 3,8 m.
- a) Milyen magasan lehet a villanyoszlopon a fényforrás?
- b) Ha egyforma sebességgel közelednek, akkor hol lesz az a pont, ahol találkoznak?
- c) Lesz-e olyan pillanat, a találkozás pillanatától eltekintve, amikor azonos hosszúságú az árnyékuk?
759. Egy vasból készült, felül nyitott hengernek mindenhol egyenlő az anyagvastagsága. A külső átmérője 1 m, magassága 1,5 m. A henger belül üres.
- a) Legfeljebb milyen vastag lehet a henger fala, ha vízbe téve nem süllyed el?
- b) Mekkora a vastagsága, ha félig van olajjal, amelynek sűrűsége $900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, és óvatosan vízbe téve álló helyzetben 0,3 méter látszik ki belőle?
- Arkhimédész törvénye a következő: a felhajtóerő $F = V\rho g$, ahol V a bemerülő test térfogata, ρ a folyadék sűrűsége, $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ a nehézségi gyorsulás.

760. Három, henger formájú, 8 mm átmérőjű ceruzát egy gumival fogunk össze.
- Ha felülnézetben a három ceruza keresztmetszetkörei kölcsönösen érintik egymást, akkor milyen hosszú az őket összefogó gumiszál?
 - Mekkora terület marad ki a körök között?
 - Mennyivel hosszabb lenne a gumiszál, ha egymás mellett volna egy sorban a három ceruza, és fogná össze azokat a szál?
761. A cukrászda kirakatában csalogatónak szánt, nagyméretű koktélos poharat helyeztek el. A pohár 20 cm magas talpán egyenlő oldalú forgáskúp látható (átmérője és alkotója egyenlő hosszú). A pohárban eredetileg 10 cm magasan rózsaszínűre festett folyadék állt. Ebbe egy barackot megmintázó üveggolyót dobtak, amelyet a megemelkedett folyadékszint éppen ellepett. Mekkora a sugara a barackot mintázó golyónak?
762. A gyerekek két nagy (0,5, illetve 1,5 méter átmérőjű) gömbből hóembert építettek. Az enyhe téli napon szemerkélő eső elől egy kúppalástot húznak rá, hogy ne olvadjon el. Ez pontosan érinti a hóember két gömbjét.
- Mennyi anyagot használtak fel hozzá? (Mekkora a kúp felszíne?)
- A Kisherceg a B612-es kisbolygójára vitte a hóember kicsinyített mását (minden mérete az eredetinek egy tizede). Szeretné a Nap sugárzásától megóvni ezt a hóembert. „Naponta” negyvenhárom naplemente van ezen a bolygón.
- Most mekkora legyen a védőátor felszíne?
763. Egy szabadtéri moziban három egymásra merőleges a hosszúságú rudat (AO , BO , CO) állítanak fel, amelyeket az AB , BC , CA merevítővel kötnek össze. Így egy meglehetősen stabil szerkezetet kapnak. Az AO szakaszon A -tól x távolságra kijelölik az M pontot, és ebből AB -vel, illetve OC -vel párhuzamosokat húzva kapják az $MNPQ$ négyszöget.



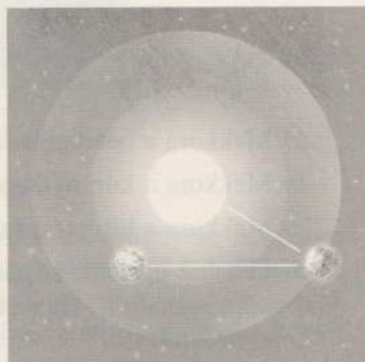
- Bizonyítsa be, hogy $MNPQ$ téglalap!
- Hogyan válasszák meg az x távolságot, hogy a vászon területe maximális legyen?

764. Teljes holdfogyatkozáskor a Föld a Nappal ellentétes oldalára kúp alakú árnyékot vet, amely kb. 108 földátmérőnyi távolságba nyúlik. A Hold a Földtől (középpontjától) kb. 30 földátmérőnyi távolságban kering. A Hold átmérője kb. $0,272d_{\text{Föld}}$.



- a) Mekkora az árnyékkúp szélessége a Hold pályáján a Nappal átellenes oldalon?
 b) Ismerve a Hold keringési idejét (kb. 28 nap), legfeljebb mennyi ideig tarthat a holdfogyatkozás?
765. Viszonylag jó közelítéssel körnek tekinthető a Nap körül mind a Föld, mind a Vénusz (Esthajnalcsillag) pályája. Ezenkívül a két bolygó keringési síkja is egybeesik. Csillagászok állítása szerint a Vénusz–Föld–Nap szög legfeljebb 46° -os lehet.

- a) Ha a Föld egy 150 000 000 km-es körpályán kering, akkor mekkora a Vénusz-pálya sugara?
 b) Kepler óta tudjuk, hogy az egyes bolygók keringési idejének négyzete és a Naptól való távolságuk köbének hányadosa állandó. Ha a Föld keringési ideje körülbelül 365 nap, akkor mennyi a Vénuszé?
 c) Milyen gyakran van egy vonalban a Vénusz, a Nap és a Föld?



766. Egy egyenes útszakaszon három radarállomás van egymás után rendre A , B és C . A C pontból egy adott pillanatban a repülő tárgy ABC irányított egyenessel bezárt szöge γ , a B pontból nézve ugyanebben a pillanatban a tárgy és az ABC irányított egyenes szöge β . Az A pontból nézve a test ugyancsak az ABC irányított egyenessel bezárt szöge γ .

- a) Hogyan mozoghat az a térbeli repülő tárgy, amelyre a pályája minden pontjában igaz, hogy $\gamma = \alpha + \beta$?
 b) Milyen görbén mozog a repülő test, ha azt is tudjuk, hogy egy síkgörbe a pályája?
 c) Van-e olyan pálya, amelyre nemcsak a szögek összegére vonatkozó összefüggés teljesül, hanem még az egyes szögek nagysága is állandó?
 *d) Ha $AB = 10$ km, $BC = 30$ km, akkor maximum milyen messze kerülhet a repülő test az A ponttól?

767. Egy alkalmas völgyben rendezett nagyszabású vásár és kulturális hét alkalmával bizonyos vállalatok fél méter magas, több méter kerületű betongyűrű alapa bádogból 173 cm magasságú, óriásplakátok és reklámok elhelyezésére alkalmas „hirdetőoszlopokat” állítanak fel. A hirdetőoszlop lehet hagyományos hengerpalást, de akár csonkakúppalást vagy kúppalást formájú is. Az egyik vállalat kúppalást formájú hirdetési felületet helyez az aljzatra, mert kiszámították, hogy a hasznosítható felület így is pontosan ugyanakkora lesz, mint a hengerpalást esetén, ráadásul a kúppalást a hegyoldalról is jól látható, a palásttal elzárt, befedett térrészt pedig ki tudják használni raktározásra.



- Mekkora a betonaljzat sugara?
- Mekkora a kúp nyílásszöge?
- Mekkora a hirdetési felület?
- Lehetne-e csonkakúppalástot elhelyezni úgy, hogy a hirdetési felület ugyanakkora maradjon? Ha nem, miért nem? Ha igen, mekkora szöveget zárjon be a palást a vízszintessel?
- Lehetne-e megfelelő csonka kúp választásával növelni a hirdetési felület nagyságát a hengerhez képest?

*768. Egy nagy havazás alkalmával a leesett hóból „iglut” készítünk. Ehhez nagy kupacba havat lapátolunk össze (a kúp-nak vett alakzat alapkörének átmérője 2,5 m, magassága 180 cm). Hány köbméter havat kellett lapátolni ehhez, ha figyelembe vesszük, hogy a hó a felette levő súlytól összenyomódik, s lent a hó térfogata így 20%-kal kisebb, mint eredetileg volt? Modellünkben a nyomás a magassággal lineárisan változik.



769. Egy 5 cm átmérőjű üvegpohárban 5 cm magasságig van higany. A pohár eltörött, s a higany ezer darab (megközelítőleg megegyező sugarú) kis gömböcskére esett szét, és gurult szanaszét. Mennyivel nőtt meg a higany felszíne? Ábrázolja a golyók számának függvényében a golyók felszínének és az eredeti felszínnek az arányát! (A golyók száma 1000 – 10 000 között változzon ezres lépésekben.)
770. Egy trópusi országban általában a napok fele esős. Azt is megfigyelték a meteorológusok, hogy ez kapcsolatban van a széljárással. Hét olyan naptól, amikor északi szél fúj, az elmúlt évszázad adatai alapján átlagosan három az esős napok száma, míg ha nem északi szél fúj, három naptól csak egyszer nem esik. A tapasztalat szerint mindig van szél – szélcsendes időt nem regisztráltak.
- Mekkora az esélye annak, hogy esik az eső és északi szél fúj?
 - Vajon mekkora eséllyel lesz egy nap északi szél?
 - Ha esik az eső, akkor mekkora eséllyel fúj északi szél?
 - Vizsgálja meg ezek alapján a meteorológusok állítását a szélirány és az eső kapcsolatáról: függetlenek-e, vagy valamilyen kapcsolatot igazolnak a fenti adatok. A megfigyelések szerint az esős napok évi átlaghőmérséklete $6,5^{\circ}\text{C}$ -kal alacsonyabb, mint a nem esőseké.
 - Mennyi az esős és a nem esős napok évi átlaghőmérséklete, ha az évi átlaghőmérséklet $24,5^{\circ}\text{C}$?
771. Egy iskola tanulóinak száma 1440. Az év végi statisztika alapján megállapították, hogy az iskolában tanuló lányok 22,5%-ának, a fiúk 18,75%-ának van nyelvvizsgája. Ez azt jelenti, hogy a tanulók $\frac{1}{5}$ -ének van nyelvvizsgája.
- Hány lány- és hány fiútanulója van az iskolának?
12 tanuló jutalomutazásra mehet az iskolából. A diákönkormányzat hosszasan vitatkozott arról, hogy milyen szempontokat vegyenek figyelembe a diákok kiválasztásánál. Végül is úgy döntöttek, hogy sorsolással döntenek el a kiutazók személyét, de úgy, hogy a kiutazók között a lányok és a fiúk aránya az iskolai nemek arányát tükrözze.
 - Ha a fenti feltételek szerint sorsolnak, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a régóta egy párt alkotó Tamás és Barbara együtt kerül az utazók közé?
772. Egy felmérés szerint a 16 éves középiskolás fiúk 65%-a legalább egyszer rágyújtott már cigarettára. Egy ifjúsági rádióműsor egyik adásához, amely a dohányzás ártalmairól szól, egy iskolából véletlenszerűen kiválasztanak 4 középiskolást, 16 éves fiút.
- Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott fiúk közül pontosan kettő olyan van, aki még soha sem cigarettázott? (Tegyük fel, hogy minden 16 éves középiskolás fiú az országos átlaggal megegyező valószínűséggel gyújtott már rá cigarettára.)
 - Ha az iskola 16 éves fiútanulóinak száma 60, akkor hányféleképpen választhatjuk ki a négy riportalanyt úgy, hogy közülük egy se legyen, aki már kipróbálta a dohányzást?

773. Egy 18 fős nemzetközi kutatóorvos-társaság rendszeresen küldi egymásnak a legfrissebb kutatási eredményeiket angol, spanyol vagy német nyelven.
- a) Mutassa meg, hogy van köztük három, akik egymás közt ugyanazt a nyelvet használják!
- A 18 kutató közül hét rákkutatással, öt érrendszeri megbetegedésekkel, a többiek genetikai kérdésekkel foglalkoznak. Egy genetikai konferenciát szervező társaság hozzájuttott mind a 18 kutató adataihoz, de nem tudja, kik azok, akik közülük genetikusok. Nyolc meghívót küldenek ki számukra véletlenszerűen.
- b) Mekkora a valószínűsége, hogy legalább négy meghívó genetikushoz kerül?
774. A magyar kártyacsomag harminckét lapból áll. Ezekből nyolc-nyolc darab zöld, makk, tők vagy piros.
- a) Péter az összekevert kártyacsomagból addig húz, amíg királyt nem kap (négy király van a pakliban). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott lapok között szerepel ász (négy ász van a pakliban)?
- b) Péter egymás után véletlenszerűen kihúz tíz lapot, és anélkül, hogy megnézné, lefordítva egymás mellé helyezi őket. Ezek után egyenként megtippeli mind-egyikről, hogy milyen színű. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább ötöt eltalál?
775. Egy iskolai matematikaversenyen harminc fő indult. A feladatsor három feladatból állt. Minden tanuló megoldott legalább egyet. Az első feladatot 15-en, a másodikat 14-en, a harmadikat 9-en oldották meg. Legalább két feladatot hat tanuló oldott meg jól.
- a) Hányan oldották meg mind a három feladatot?
- b) Négy tanuló küldhető tovább az iskolák közötti versenyre. Hányféleképpen állítható össze a továbbjutó csapat, ha a három feladatot megoldók mindenképpen továbbjutnak és a többi csapattag a két feladatot megoldókból kerül ki?
- c) Feltesszük, hogy az iskolák közötti versenyben mindenki egyenlő eséllyel kerülhet be az első hat helyre. Ötven tanuló versenyzett. Mekkora az esélye annak, hogy az adott iskola tanulói közül legalább három bejut az első hat közé?
776. Egy internetes csevegőfórumon olyan emberek beszélgetnek egymással, akik pontosan két nyelven tudnak. Száz ember angolul és spanyolul tud, száz franciául és németül, száz angolul és németül és száz angolul és franciául.
- a) Mennyi a valószínűsége, hogy véletlenszerűen egymásra akadó két ember megérti egymást?
- b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen egymással kapcsolatba került két ember csak németül tudjon egymással csevegni?

777. Egy iskolai futóversenyen 25-en indulnak.

- a) Hányféle eredmény születhet, ha csak az első nyolc befutót regisztrálják?
- b) Ha ez a verseny az iskolák közötti futóverseny selejtezője, és négyen juthatnak be a döntőbe, akkor ez hányféleképpen történhet, ha a selejtező eredménye nem számít?
- c) Ha feltesszük, hogy mindenkinek egyenlő esélye van a döntőbe jutni, akkor mekkora a valószínűsége, hogy János és Karcsi közül legalább az egyik bejut az iskolák közötti döntőbe?

778. Tetszőleges hármat kiválasztva az $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 179^\circ$ szögeértékekből (ugyanaz a szöge érték többször is választható), mekkora valószínűséggel tudunk olyan háromszöget készíteni, amelynek mindhárom oldala különböző?

779. Egy földmérő egy bizonyos szakaszon az Eiffel-torony irányába mutató vízszintes úton mér. Az első mérőhelyen a torony tetejét $4^\circ 17'$ emelkedési szögben látja. Ezen az egyenes úton egyenletesen haladva fél óra múlva már $5^\circ 3'$ a torony emelkedési szöge. (A torony magassága 320 m.)

- a) Mekkora sebességgel halad a földmérő?
- b) Hány százalékkal változik meg a földmérő sebessége, ha figyelembe vesszük a műszer 170 cm-es magasságát?
- c) A toronyra felvonókkal lehet felmenni, s három szinten (57 m, 110 m, 276 m) lehet kiszállni. A napi statisztika szerint aznap a látogatók 40%-a szállt ki az első szinten, $\frac{1}{3}$ -a a második szinten és 860 vendég a harmadik szinten. Mi a valószínűsége annak, hogy három, véletlenszerűen megkérdezett látogató mindegyike a legfelső szinten szállt ki?

780. Az $1, 2, \dots, 3n$ számok közül taláломra kiválasztunk négyet ($n \geq 2$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott négy szám számtani sorozatba rendezhető?

781. Egy iskola diáknapján három osztály versenyez egymással.

- a) Az első feladat az, hogy egy tíz méter hosszú zsinórral olyan derékszögű háromszög alakú területet jelöljenek ki, amelynek legnagyobb a területe. Adják meg a biztos nyerést garantáló megoldást!
- b) A második feladathoz ötfős csapatokat kell kijelölni úgy, hogy minden csapatban két fiú és három lány legyen. Az egyik osztályba 12 fiú és 17 lány jár. Mi a valószínűsége annak, hogy Krisztián és Zsuzsa, az osztály szerelmes párja együtt kerül be a kiválasztott csapatba úgy, hogy Sára, akinek szintén tetszik Krisztián biztosan nem csapattag?

782. Egy televíziótársaság vezetője szerint az ország teljes lakossága az ő csatornáján vetített három sorozat közül legalább az egyiket nézi. Ennek alátámasztására a következő felmérési adatokat közli:

Az ország lakosságának 31%-a nézi az A sorozatot.	
Az ország lakosságának 20%-a nézi az B sorozatot.	
Az ország lakosságának 12%-a nézi az C sorozatot.	
Az ország lakosságának 15%-a nézi az A és a B sorozatot.	
Az ország lakosságának 9%-a nézi az A és a C sorozatot.	
Az ország lakosságának 8%-a nézi a B és a C sorozatot.	
Az ország lakosságának 5%-a nézi mindhármát.	
Ezeket összeadva:	100%

- Helyes-e a következtetés?
- Összesen hány százalék nézi valamelyik sorozatot?
- Véletlenszerűen kiválasztott személy esetén mennyi a valószínűsége, hogy egyik sorozatot sem nézi?

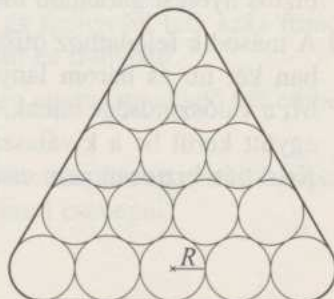
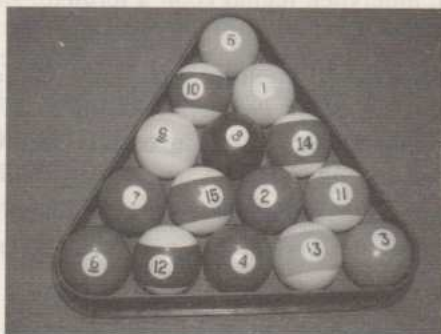
783. Négy egyforma dobozba hat egyforma csokoládét osztunk szét. (Maradhat üres is.)

- Hányféle kiosztás lehetséges?
- Valaki elárulta, hogy az egyik dobozban pontosan négy darab csoki van. Találomra kiválasztunk egy dobozt. Mi a valószínűsége, hogy találunk benne csokit?

784. A hosszútávfutók szívverését vizsgálják a célnál. Öt futó átlagszívverése 192 volt, a szórás pedig 9. Egyikük tudja, hogy az ő pulzusa 185 volt.

- Vajon mennyi a többiek átlaga (a 185-ös nélkül)?
- Mennyi a többiek szívverésének a szórása?
- *c) Mit lehet mondani általában két adathalmaz átlagának és szórásának a kiszámításáról, ha egyesítjük a két halmazt?

785. Tizenöt biliárdgolyót egy a képen látható kerettel tartunk egyben.



- Mekkora a keret kerülete és mekkora a bezárt terület? Egy-egy golyó sugara 2,86 cm.

- b) Hányféleképpen lehet elhelyeznünk a keretben a tizenöt golyót, ha tudjuk, hogy a golyók különbözőek, hiszen mindegyiken van egy szám 1-től 15-ig?
- c) Ha taláломra egyszerre kiveszünk három golyót, akkor mi a valószínűsége, hogy lesz közöttük egy egyszínű (számozása 1-től 7-ig), egy csíkos (számozása 9-től 15-ig) és a fekete (8-as)?
- d) Ha taláломra visszatevés nélkül kiveszünk egymás után két golyót, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a rajtuk levő számok különbsége nyolc lesz?

786. Egy kaszinó a következő játékot ajánlja: feldobnak egy kockát, s amennyiben 1-es jön ki, akkor a játékra befizetett pénzt elteszik, ha 2, 3, 4, 5 vagy 6 jön ki, akkor a játékos a dobott számmal egyenlő pénzegységet kap.

- a) Ha a kaszinó 20% átlagos nyeresémet szeretne, akkor mennyi legyen a játékba beszállás díja?

A játékkedv fokozására a következő változtatást eszelik ki. Nem egyszer fognak dobni, hanem addig, amíg a játékos akarja, feltéve, hogy nem jött ki egyes, mert akkor vége a játéknak, és a pénz a kaszinóé. Amíg nincs egyes, addig a játékos dönthet, hogy kér-e még dobást, amiért külön nem kell fizetnie, hiszen ez a játék része. A nyeresége, ha nem egyessel végződött a játék, hanem a játékos kérte a befejezést, akkor annyi egység, amennyi az összes dobott szám összege.

- *b) Ha a játékos addig játszik, amíg legfeljebb 0,5 annak az esélye, hogy addig a dobásig lesz legalább egyszer egyes, akkor várhatóan hány dobást fog kérni?

- *c) Mennyi a várható nyeresége a b) részbeli stratégiát követve, ha a játék ára t egység?

787. Mi a valószínűsége annak, hogy a -t és b -t $[-2; 2]$ -ből egyenletesen véletlenszerűen választva az egyenletnek van valós gyöke?

$$a \sin x + b \cos x = 1$$

788. Mi a valószínűsége annak, hogy a -t és b -t $[-2; 2]$ -ből egyenletesen véletlenszerűen választva az egyenletnek van valós gyöke, ahol c valós paraméter?

$$a \sin x + b \cos x = c$$

789. Kör alakú céltáblát látunk, a belső kör 100, a következő körgyűrű 50, a szélső körgyűrű 25 pont értékű. A körök sugara 10 cm, 20 cm, illetve 30 cm.

- a) Ha háromszor lő valaki, és mind a három lövés eltalálta a táblát, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy éppen 150 pont a találata?
- b) Ha ötven vannak a célba lövők, két fiú és három lány, akkor hányféle sorrendben jöhetnek, ha csak különneműek következhetnek egymás után?

790. A matematika felvételi előkészítőre huszonöt diák jár, akik vagy 12. vagy 11. osztályosok. Tudjuk, hogy mindkét évfolyamról vannak diákok, és bármelyik kettőt kiválasztva közülük, legalább az egyik 12.-es diák.

a) Hány 11.-es és hány 12.-es jár az előkészítőre?

Az elmúlt évek statisztikái szerint átlagosan az előkészítőn tanuló 12.-esek 75%-át veszik fel egyetemre.

b) Két jó barát, András és János is ebbe a csoportba jár, és 12.-esek. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettőjüket felveszik az egyetemre?

c) A 12.-es diákok közül tízet kiválasztunk. Hány százalék az esélye annak, hogy közülük legalább nyolcat felvesznek az egyetemre?

791. Egy festő átlagosan 2 mm vastagságban hordja fel a vászonra a festéket. A megszáradt festék $1,8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sűrűségű.

a) Lehetséges-e, hogy a kép felén 3 mm, harmadán 1 mm és hatodán 1,5 mm vastagon legyen festve?

b) Hány kilogramm festék van egy 60 cm $\times$ 80 cm-es képen?

c) Mekkora 2 : 3 oldalarányú (téglalap alakú) kép festhető 2 kg festékből?

d) Egy kép 50%-án 2 mm, a maradék 50%-án 1,7 mm festék van. A kép további részén milyen vastag a festék, ha most is igaz, hogy átlagosan 2 mm vastag a festékréteg?

e) Egy modern művész a 60 cm $\times$ 80 cm-es képet számítógépes eljárással torzítja úgy, hogy rövidebb oldalát logaritmikusan kicsinyíti a

$$f(x) = 200 \cdot \lg(x + 1)$$

függvény szerint (ahol x milliméterben adott). Mennyi festék került most a képre? (A festék vastagsága továbbra is átlagosan 2 mm.)

f) A logaritmikusan torzított képet a hosszabbik szimmetriatengelye mentén megfelezzük. Mekkora területű részekre osztaná ez a felezővonal az eredeti képet? Mennyi festék van a kép két „felén”?

792. Egy átlátszó műanyag dobókockában másik dobókocka van. Legyen a nagy kocka oldaléle a , a kisebbé b . (A kocka oldalfalának vastagsága elhanyagolható.)

a) Mekkora a dupla hatos dobásának valószínűsége, ha $a = 2b$?

b) Mekkora a dupla hatos dobásának valószínűsége, ha $a = \sqrt{2}b$?

c) Mekkora a dupla hatos dobásának valószínűsége, ha $b = 0,9a$?

d) Mekkora valószínűséggel lesz pontosan az egyiken hatos, ha $a = 2b$?

e) Ábrázolja az egy hatos dobásának valószínűségét a b függvényében!

793. A lámpaizzókat gyártó üzemben egy nap 1000 db izzót gyártottak, amiből 40 db selejtes volt. A minőség-ellenőrzésnél véletlenszerűen kiválasztanak 20 darabot az 1000-ból.

a) Hányféle kiválasztás lehetséges?

b) Hány olyan eset lehetséges, amikor a húsz kiválasztottnak a fele selejtes?

c) A fenti feltételek mellett milyen valószínűséggel választhatunk ki éppen tíz selejtet?

794. Egy tejföldsdoboz csónkakúp alakú. Alul 7 cm, felül 8,9 cm átmérővel. A doboz alkotója 11,5 cm.

a) Mekkora a tejföl sűrűsége, ha a doboz tele van, és 450 g tejfölt tartalmaz
(sűrűség = $\frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}}$)?

b) A dobozok töltése során a betöltött tejfölmennyiség térfogata nem teljesen állandó. A dobozokban a tejföl magassága különböző. Milyen határok között változhat a dobozban a tejföl magassága, ha az előírt tömeg $\pm 2\%$ -os tűréssel változhat?

c) A gyártási folyamatban a tejföl töltése közben a dobozok öt ezreléke megsérül, ezeket selejtnak tekintik. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a minőségi ellenőr által taláalomra kiválasztott tíz doboz közül talál legalább egy selejtet?

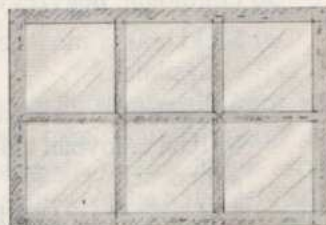
795. Lécekkal osztott ablakot látunk az ábrán. Az üveglapok egybevágó négyzetek, a fából készült lécek szélessége pedig mindenhol ugyanannyi.

a) Írja fel paraméteresen a szabadon maradt üvegfelület és a fafelület (lécek) arányát a fenti ablak esetén!

b) Ha az üveg teljes felülete $1,5 \text{ m}^2$, míg az összes fa $0,36 \text{ m}^2$, akkor milyen szélesek a választólécek, és mekkorák az üvegnégyzetek?

c) Adjuk meg a teljes ablak méreteit!

d) Egy 40 cm átmérőjű labdával véletlenül megdobták az ablakot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy átrepül az ablakon? (Ha a labda a kerethez ér, nem megy át az ablakon.)



796. Józsi bácsinak egy 500 m^2 -es, háromszög alakú sarki telke van. Mivel a háromszög alakú telkének oldalhosszúságait elfelejtette lemérni, így tanácstalanul áll a városban a kerítésbolt előtt.

Mutassa meg, hogy minimum 90 m kerítést kell vásárolnia!

797. Egy négyszög alakú virágágyást az átlókkal négy háromszögre bontanak, s a kapott háromszög alakú részekbe piros, fehér, sárga és cirmos virágokat ültetnek. A piros, fehér és sárga virágok által borított területek rendre: 1 m^2 , 2 m^2 , 3 m^2 .

Elég lesz-e 1 m^2 -re való cirmos virág a virágágy beültetéséhez, ha a cirmosak mellé az egyik oldalon piros, a másik oldalon fehér virágok kerülnek?

798. Sík terepen, egy körvonal mentén elhelyezkedő három mikrohullámú átjátszó állomás van. A geodéziai mérés során észrevették, hogy a körvonal bármelyik pontjából megmérve a három állomás távolságát, kettő összege mindig a harmadikat adja.
- Hogyan helyezkedhet el a három állomás a körvonalon?
 - Legalább milyen hatósugarú legyen a három adó, hogy a teljes kör területét lefedjék? (Feltételezzük, hogy azonos a hatósugár, és 50 km sugarú az a kör, amelynek mentén az adók elhelyezkednek.)
 - Mekkora lesz így a többszörösen lefedett terület nagysága, azaz ahol legalább két adó fogható?
- *799. A lakatlan szigetre két rabló érkezik a zsákmányukkal. Szeretnék ravaszul elásni, hogy ha később visszajönnek, ők megtalálják, de más ne. Két nagy csúcsos szikla, s egy jellegzetes pálmafa van a szigeten. Egyiküknek a következő ötlete támad. Az egyik szikla körül 90° -kal a másik irányába elforgatják a pálmát, így kapják az első segédpontot. Ugyanezt megismétlik a másik szikla körül is. A kapott két segédpont által meghatározott szakasz felezőpontjában ássák el a kincset. Ez tetszik a másinak is, elvégzik a munkát. Két év múlva visszatérnek, s kiderül, hogy a pálmafa nyomtalanul eltűnt, feltehetően tövestől kiszedték. Vajon megtalálhatják-e a kincset anélkül, hogy az egész szigetet felásnák?
800. Egy téglalap alakú medence szélén egy méter széles, kőből készült járda van. Ezt 50 cm oldalú, négyzet alakú kövekből rakták ki, összesen 224 darabból.
- Mekkorák a medence külső méretei, ha tudjuk, hogy az egyik oldal kétszerese a másinak?
 - A medencét 80°C -os termálvíz és 20°C -os csapvíz keverékével töltik meg. Milyen arányban kell a különböző hőmérsékletű vizeket összekeverni úgy, hogy a medence vize 26°C -os legyen? (A felvett, illetve a leadott hőmennyiségeket a $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$ képlettel számolhatjuk ki, ahol c a fajhő, m a tömeg és ΔT a hőmérséklet-változás.)
801. A három méter mély, téglatest alakú medencébe 120 m^3 víz fér. A medence alját és oldalát $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ nagyságú betonlapokkal borítják be, amelyek nem darabolhatók.
- Mekkora legyen a medence hossza és szélessége, ha a lehető legkevesebb betonlapból akarják kirakni?
 - Hány darab betonlapra van szükség a fenti esetben?
802. Legfeljebb mekkora lehet egy 2 egység kerületű egyenlőszárú háromszög területe?
803. Egy új számítógép ára 300 000 Ft. A gép értéke minden évben exponenciálisan csökken az $y = a \cdot 2^{-kt}$ függvény szerint, ahol t az idő években mérve, a és k pedig paraméterek. Tudjuk, hogy két év múlva a gép értéke 170 000 Ft.
- Mennyi az a és k paraméterek értéke?
 - Mennyi a gép értéke négy év múlva?
 - Hány év alatt csökken a gép értéke eredeti értékének a tizedére (ha az inflációtól eltekintünk)?

804. Egy vállalkozás egyik üzlete a vártnál nagyobb jövedelmet eredményezett. A vezetőség úgy döntött, hogy egy bizonyos összeget egyenlő arányban szétosztanak a munkában részt vevők között. Ha a jutalmazottak öttel kevesebben lettek volna, akkor mindegyik résztvevő éppen annyival kapott volna többet, mint amennyivel kevesebbet kapna, ha a jutalmazottak számát héttel növelnénk.

a) Hányan kaptak jutalmat?

A vállalkozás termeléssel is foglalkozik, amely öt éven keresztül az előző évi termelés 6%-ával nő.

b) Hány százalékkal nő a termelés öt év alatt?

c) Ha a növekedés üteme változatlan, akkor hány év alatt kétszereződik meg a termelés?

805. Juli meggybefőttet, majd meggyes süteményt készít.

a) A receptkönyv szerint a meggybefőtthez 1 kg leszedett meggyhez 30 dkg cukrot kell adni. Juli elfelejtette lemérni a leszedett meggy mennyiségét, ezt csak a kimagozás után tette meg. A mérleg 4 kg 70 dkg-ot mutatott. Tudjuk, hogy átlagosan a mag a meggy tömegének a 30%-a. Számolja ki, hogy Julinak ennyi kimagozott meggyhez hány kilogramm cukrot kell adnia!

b) Hogyan lehet a téglalap alakú meggyes süteményt egyenlő nagyságú darabokra felvágni, ha Juli a szélekkel párhuzamosan vágja, és azt szeretné, hogy fele annyi legyen a széleket tartalmazó darab, mint amelyik beljebb van?

c) A fenti feltételek mellett, hány darab süteményt kap Juli, ha a legkevesebb vágást szeretné megtenni?

806. Egy gyógyszerárban a gyógyszerek készítésénél használatos egyenlő karú kétoldalú mérlegen minden egész mértékszámú tömeget meg akarunk mérni egy grammtól ötven grammig. A mérést úgy végezzük, hogy a mérleg egyik serpenyőjébe csak a mérendő ismeretlen tömeget, a másik serpenyőjébe a mérésre szolgáló tömegetalon-sorozat megfelelő darabjait helyezhetjük. Ehhez minél kevesebb etalont akarunk felhasználni.

a) Hány grammosak legyenek az egyes etalonok? Mindegyik típusú etalonból csak egy van.

b) Mekkora az a legnagyobb tömeg, amelyet az így kapott etalonsorozattal még éppen meg tudunk mérni?

807. A kerékpár sebességét úgy mérik, hogy az egyik küllőjére kis mágneset helyeznek, és a sebességmérő óra érzékelője a kerék minden körülfordulásánál érzékeli a mágneset. A sebességmérőt 26-os (26" a kerék átmérője, ahol 1" = 2,54 cm) kerékpárra hitelesítették.

a) Másodpercenként hányat fordul a 26-os kerékpár kereke $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességnél?

b) A sebességmérőt 24-es biciklire helyezzük át. Hogyan kapható meg így a tényleges sebesség?

c) Ábrázolja a kerékméret függvényében annak a c számnak az értékét, mellyel a sebesség értékét kell megszorozni, hogy a sebesség tényleges értékét kapjuk!

808. Egy nagy óceánjáró hajó egy ismeretlen sziget felé halad $24 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Fel-
derítésre előreküldenek egy motorcsónakot $48 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Amikor a csónak
indul, a hajó éppen 80 km-re van a szigettől. A csónak 20 km-re megközelíti a
szigetet, majd 3 perc alatt megfordul, és ugyanakkora sebességgel visszamegy a
közeledő hajóhoz.
- Az indulásától számítva mennyi idő múlva éri el a motorcsónak a hajót?
 - Milyen magas az a hegy a szigeten, amelyet a motorcsónak indulásakor a hori-
zont felett 2° -os szögben láttak?
 - A szigettől 20 km távolságban levő, felderítésre előreküldött motorcsónakból
hány fokos szögben látják a szigeten levő hegy csúcsát?
809. János és Károly munkával szeretnék megkeresni a nyaralásuk költségeit. Az egyik
gyakran vállalt munkájuk a kertászás. Már pontosan tudják, melyikük milyen gyor-
san tud felásni egy adott területet. A szomszéd megkéri őket kertjének felásására.
Amikor felmérték a munkát, megállapították, hogy János egyedül három órával
hamarabb készülne el a munkával, mint Károly. Végül az első napon tíz órán át
együtt ástak, majd másnap a munkát Károly egyedül fejezte be további öt és három-
negyed óra alatt.
- Mennyi idő alatt ásta volna fel a kertet a két fiú külön-külön?
 - A munka végén kiszámolták, hogy 600 Ft-os órabérért dolgoztak. Ezzel megke-
resték a kettejük tervezett nyaralási költségének a 15%-át. Várhatóan mennyibe
kerül a nyaralásuk?
 - Nyár elején, amikorra összejött a tervezett összeg, Károly meglátott egy hirde-
tést, amely egy versenykerékpárt reklámozott. Úgy számolt, hogy ha a mun-
kával keresett összeg ráeső részét (felezik az összeget) egy évre havi 1%-os
kamatos kamatra befekteti, és ez idő alatt az eddigi keresetének 120%-át meg-
keresi, éppen meg tudja venni a kerékpárt. Mennyibe került a versenykerékpár?
810. Színes papírból szilveszteri díszítésre láncot készítünk. Ehhez 1 cm széles csíkokat
vágunk ki a papírlapból, majd a két végénél karika alakban összeragasztjuk. (A
ragasztásnál kb. 1 cm szélesen fedik egymást a lapok.) A következő karikához az
előzőn átfűzzük a csíkot, és így ragasztjuk össze.
- Egy lapból húsz csík jön ki. Öt fehér és öt piros lapunk van. Hány kék lap
kell, ha a láncban a karikák így követik egymást: FPKFPKFPKPK...? Marad
valamelyikből fölösleg?
 - A $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ -es lapokból 20 cm-es csíkokat vágunk. Hányszor lesz több
csíknak, ha 15 cm-eseket vágunk?
 - Kati a $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ -es lapokból 20 cm-es, Jani 15 cm-es csíkokat vág ki.
Hányszor nagyobb Kati karikáinak átmérője?
 - Kati a $15 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ -es lapokból 20 cm-es, Jani 15 cm-es csíkokat vág ki.
Mennyivel lesz hosszabb az egyikük lánc, ha tíz papírlapból dolgoznak mind-
ketten?

811. Vegyük a következő két molekulát: C_2H_4 és C_3H_6 . Ezek az alkén (olefin) homológ sor első tagjai, ahol a sorozat úgy folytatódik, hogy mindig eggyel több szénatom kerül a láncba, s kettővel több a hidrogénatomok száma.

- Mi lesz a sorozat általános képlete?
- A teljes molekula tömegének hány százaléka a szén tömege, ha a szén tömege tizenkétszerese a hidrogén tömegének?
- A sorozat második, illetve harmadik tagjának hányféle izomerje létezik, ha csak a kapcsolódást nézzük, azaz melyik atom melyikhez kapcsolódik, míg a térbeli elhelyezkedést nem vizsgáljuk, és a szénatomok nem kapcsolódnak gyűrűvé?
- Milyen esetek vannak, ha gyűrűs szerkezetű is lehet a molekula, azaz nem nyílt-láncú, hanem záródik?

812. A háztetőt fedő cserepeket az eresszel párhuzamosan futó, egymástól egyenlő távolságra levő tetőlécekre rakják. Egy templomtornyot négyzetes gúla alakú tető borít. Hány méter tetőlécet rendeltek, ha a körbefutó ereszcsontra 38,4 m hosszú, minden oldalon 12 sorban futnak a lécek, és a veszteségekre is számítva a szükségesnél 20%-kal rendeltek többet? (A cseréptartó lécek a csúcs és az eresz közötti részt egyenlő szélességű sávokra tagolják.)



813. Egy háromszög egyik csúcsa: $A(0; -1)$, két súlyvonalának egyenlete $x - y + 1 = 0$ és $2x - y = 0$.

a) Határozza meg a hiányzó csúcsokat!

b) Mekkora a háromszög területe?

*c) Forgassa meg x és y tengely körül a háromszöget! Mekkora a keletkezett testek térfogatának aránya?

*d) Mekkora a keletkezett testek felszínének aránya?

814. Egy digitális fényképező függőlegesen 1536, vízszintesen 2038 pontot tud tárolni.

a) Összesen hány pontot tárol egy képhez a fényképezőgép?

b) Ha a digitális fényképezőgép LCD kijelzője (egy kis képernyő, amelyen a készített képek megjeleníthetők) 4 cm széles, akkor milyen magas?

c) Egy 50 cm $\times$ 50 cm-es emléktáblát szeretnének lefényképezni 3 m távolságból. Úgy fókuszálunk (közelítünk) a képre, hogy az függőlegesen teljes egészében beleférjen a képbe. Ahhoz, hogy a szöveg olvasható legyen, az szükséges, hogy a tábla egymástól 0,5 mm távolságban elhelyezkedő pontjai a fényképen különbözőnek látszódjanak. Olvasható lesz-e a szöveg?

d) Mekkora rész marad kihasználatlanul (ahol nincs tábla) ekkor a fényképben?

815. A gyerekek az erdőben éjszakai bátorságtúrán vesznek részt. Egy hatalmas fát elérve egyedül merészkednek tovább tetszőleges irányba haladva, és a legbátrabb 100 m-re jut. Egyikőjük ezen az útszakaszon elvesztette a kulcsát, s a kísérőjük elindul megkeresni. Zseblámpájával kétméteres kör alakú foltban tudja megvilágítani a földet.

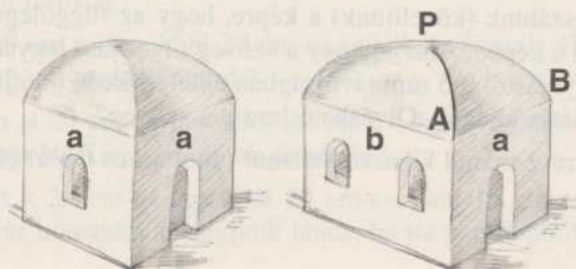
- Rajzolja le, hogy hogyan haladjon a kísérő, hogy szisztematikusan át tudja vizsgálni a bejárt területet! A legrövidebb utat keressük!
- Adjon becslést arra, hogy a legrosszabb esetben mennyi utat kell megtennie a kísérőnek!
- Legfeljebb mennyi ideig halad a kísérő $3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel?

816. A szélviharban „derékba” tört egy 18 méter magas jegenyefa.

- Milyen magasan tört el a fa, ha a háncs a letört törzset megtartotta, s annak hegye a fa tövétől hat méterre ért földet?
- Hány köbméter a letört fa törzse, ha azt egy olyan csonka kúppal közelíthetjük, amelynek átmérője a tövénél 110 cm, míg a tetejénél 8 cm?
- Milyen magasan volt a Nap, ha a maradék fa árnyéka éppen addig ér, ahol a letört darab hegye földet ért?
- Ha a letört törzset (legallyazás után) feldarabolták, és a keletkezett rönköket kettő- és háromtonnás teherautókkal szállítják el, akkor optimális tervezés mellett hányszor fordulnak?

Az optimumot idő szerint gondoljuk, tehát a legkevesebb fordulót jelenti. Tudjuk még, hogy a nagyobb kocsi 20%-kal több idő alatt fordul meg (beleértve a hosszabb fel és lepakolást, és a kicsit lassúbb szállítási sebességet), mint a kisebb. A fa sűrűségét $950 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ -nek vegyük.

817. Az ókori Rómában egy építőmester megadta a lakószobák ideális méretarányát. Szerinte sík mennyezetű szobánál a magasságnak meg kell egyeznie a szélességgel. Ha a szoba boltozott mennyezetű, és alapja négyzet, akkor a szoba magassága (a szoba legmagasabb pontja és a padló síkjának távolsága) az alap hosszának $\frac{4}{3}$ -szorosa kell, hogy legyen. (Az oldalfalak magassága továbbra is akkora, mint a szoba szélessége.) A boltozat egy-egy körívben köti össze a szoba szemközti sarkait.



a) Milyen hosszú körívek kötik össze a szoba szemközti sarkait, ha a szoba alapja $12\text{ m} \times 12\text{ m}$ -es négyzet?

Téglalap alakú helyiségre a szoba magasságának a téglalap szélességének és hosszúságának mértani közepét javasolta. (Az oldalfalak magassága továbbra is akkora, mint amekkora a szoba szélessége.)

b) Milyen magas legyen a szoba, ha 8 m széles és 9 m hosszú?

c) Milyen hosszú boltívek kötik össze a szobának az ábrán megjelölt pontjait a szoba legmagasabb pontjaival? (A boltozat ívei itt is körívek.)

818. Kati anyukája joghurtspoharakban különböző magvakat csíráztat. Hogy meg tudja különböztetni a poharakat, címkéket rak rájuk. Mindegyik címke teljesen körbe veszi a poharat, és így teljesen eltakarja a pohár oldalán levő korábbi mintát. Milyen formájú legyen a címke, ha a pohár csonka kúp alakú, méretei: $r = 4,5\text{ cm}$, $R = 7\text{ cm}$, $m = 9\text{ cm}$.

Adjon tanácsot, hogy körző, szögmérő és vonalzó segítségével hogyan tudja elkészíteni a címkét! „Szerkessze” meg!

819. Az arborétum négy leghíresebb fája közül semelyik három nem esik egy egyenesbe.

a) Hányféleképpen lehet olyan körutat tervezni, amely mindegyik fától ugyanolyan távolságra halad?

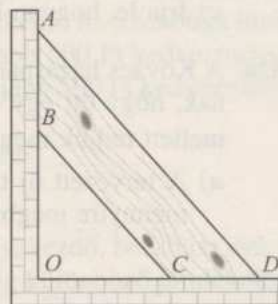
b) Legfeljebb milyen messze lesznek a megépített úttól a fák, ha a négy fa éppen egy olyan rombusz négy csúcsában helyezkedik el, amelynek oldalhossza, s egyben egyik átlója is ötven méter?

820. Egy polcot szeretnénk a falra erősíteni az ábrán látható módon. Tudjuk, hogy az $OC = 40\text{ cm}$, az OA távolság pedig 75 cm . A deszka szélessége 20 cm .

a) Milyen szögben kell elfűrészelni a deszkát, hogy az ábrán látható módon illeszkedjen a falhoz?

Egymás alá öt ugyanilyen polcot tervezünk. A bar-kácsboltban 130 cm hosszú, 2 cm vastag deszkákat vásárolunk.

b) Mennyi a hulladék, és hány százaléka ez a megvásárolt anyagnak?



821. A sportverseny végén egy pingpong- és egy teniszlabdát tartalmazó reklámtasakkal búcsúznak a szponzorok a résztvevőktől. A tasak alja kör alakú műanyag lapocskára, amely cipzárral kapcsolódik az átlátszó műanyag fóliából készült kúppaláshoz. A kúppalást érinti a két labda gömbje. Hány cm^2 -nyi műanyag fólia szükséges egy reklámtasak elkészítéséhez, ha a pingponglabda átmérője $2,7\text{ cm}$, a teniszlabdái pedig 7 cm ? (A hegesztési veszteségektől eltekintünk.)



822. Egy konvex sokszög belső szögeinek összege $p\pi$, ahol p olyan 2003-nál kisebb prímszám, amely számjegyeinek szorzata 243, és két utolsó számjegye különböző. Hány oldalú a sokszög?

823. A sportbolt kirakatában az ábrázolt módon „halmozták fel” a teniszlabdákat. A legfelső sorban két labda van, alatta 2×3 téglalapalakban rendezve, alatta 3×4 és így tovább. A labdák mindig az alattuk levő sorban levő „mélyedésekben” helyezkednek el.



a) Hány labda szükséges ahhoz, hogy a fenti szabályt követve, egy négyrétegű halom készüljön?

b) Milyen magas az „építmény”, ha egy labda átmérője 10 cm?

c) Ha képzeletben továbbépítenénk a halmot a fenti módon, és száz réteg kerülne egymásra, akkor hány labda volna benne?

824. Az utazási iroda egy utazást hirdet meg. A hirdetésben az áll, hogy harminc jelentkező esetén indul a csoport, és akkor az egy főre eső költség 100 euró. Ha harmincnál többen jelentkeznek, akkor minden új jelentkező esetén 2 euró kedvezményt ad mindenkinek az utazási iroda az árból. Hány utas kell ahhoz ilyen feltételek mellett, hogy az utazási iroda bevétele a legnagyobb legyen?

825. Egy nyolc méter magasan felfüggesztett hat méter hosszú mászórúd van a tornateremben.

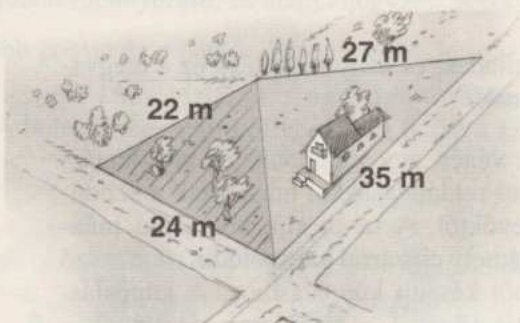
a) Ez a mászórúd a talaj mely pontjaiból látszik a legnagyobb szög alatt?

b) Mekkora ez a maximális szög?

c) Írja le, hogyan lehetne megszerkeszteni ezeket a pontokat!

826. A Kovács házaspár a telkük egy részét (az ábrán satírozással jelölt) átadná lányuknak, hogy ott egy független lakást építhessen. A telek határának hosszúságadatai mellett tudjuk még, hogy 630 m^2 a teljes telek területe.

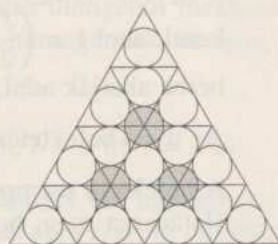
a) A tervezett új telekeltválasztó hosszára durván 28 m-t mértek. Vizsgálja meg, mennyire megbízható ez az adat, a többi figyelembevételével!



b) Általános szabály, hogy a teleknek legfeljebb 40%-a építhető be. A Kovács házaspár eddig egy 135 m^2 -es lakásban élt. Vajon ez a tény megghiúsítja-e a tervezett telekmegosztást?

- c) Hány négyzetméter lehet a két épület együttesen?
 d) Hogyan osztaná fel a telket, ha külön-külön is érvényesnek kell lennie a beépítési szabálynak?

827. Egy szabályos háromszög alakú tartományt daraboljunk fel oldalaival párhuzamosan n^2 darab, egymással egybevigő kisebb szabályos háromszögre. Az ábrán $n = 4$. Minden ilyen kis háromszögbe írjunk egy kört. Ezenkívül a körök közötti hézagokba újra körök írhatók, amelyeknek sugara megegyezik a kis háromszögekbe írt körök sugaraival.



- a) A nagy háromszög hányad részét fedik le ezek a körök együttesen?
 b) Ha n egyre nagyobb, akkor hogyan változik ez az arány?
 c) Mi a helyzet, ha ugyanezt egy négyzettel végezzük el úgy, hogy felosztjuk n^2 darab kis négyzetre, ezekbe köröket írunk, majd a körök közötti hézagokba is köröket? (Ebben az esetben a hézagokba írt körök kisebbek lesznek, mint a nagy körök!) Ekkor hányadrészt fednek le a körök együtt a négyzet területéből?
 d) Hogyan változik ez az arány n minden határon túli növelésével?
 e) Hasonlítsuk össze a két eredményt!
828. Az iskola egy cég részére úgynevezett kihelyezett tanfolyamot is elvállal, azaz csak nekik, adott helyszínen tartja a foglalkozásokat. Ennek azonban az a feltétele, hogy legalább tizenöt résztvevő legyen a csoportban. Ha pontosan tizenöt résztvevő lenne, akkor egy résztvevőnek 15 000 Ft-jába kerülne a tanfolyam. Az iskola azt is felajánlja, hogy minden résztvevő részvételi költségét csökkenti, ha tizenötönél több a jelentkező. Minden újabb jelentkező esetén mindenki újabb 500 Ft kedvezményt kap. (A 16. jelentkezőnél 500 Ft a kedvezmény, a 17.-nél újabb 500 Ft kedvezmény jár mindenkinek stb.)
 Hány jelentkező esetén lesz az iskola bevétele a legnagyobb?
 Mekkora ez a bevétel?
829. Az iskola új tanárt keres. Két jelentkező van. Egyikük pályakezdő, heti húsz órára 100 000 Ft-os fizetést kell neki adni, ami után az iskola még különböző járulékokat is fizet, tb-járulék 33%, egészségügyi hozzájárulás 11%, szakképzési hozzájárulás 1,5%. A másik jelentkező vállalkozóként dolgozna, utána az iskolának nem kell járulékokat fizetnie, ő 2000 forintot kér óránként.
- a) Melyiket alkalmazza az iskola, ha szakmai és emberi szempontból mindketten egyformán megfelelnek, s az iskola az „olcsóbb” megoldást akarja választani? (Feltételezzük, hogy egy hónapban négy hét van, és minden órát megtartanak.)
 b) Melyiket alkalmazza az iskola, ha az óráknak csak a 90%-a van megtartva (ünnepségek, szünetek miatt elmarad a 10%)?
 c) A tanár, akit felvesznek, előre gondolkodva, olyan életbiztosítást köt, amely évi 5% kamatot is ígér. Minden év elején betesz 100 000 Ft-ot. Mekkora tőkéje lesz negyven év múlva?

830. Új hivatali épületet terveznek. Az építkezésnek vannak fix költségei (például a megvásárolt telek ára), és vannak olyan költségek, amelyek a felépítendő emeletek számától függenek.

Tegyük fel, hogy a fix költség 75 millió Ft, és x emelet megépítése újabb k Ft-ba kerül, ahol $k = \left(\frac{x}{2}\right) \cdot [30\,000\,000 + 1\,500\,000(x - 1)]$. Az épületet felépítés után bérbe akarják adni, emeletenként havonta 1 500 000 Ft-ért.

Az ilyen befektetéseknél azt vizsgálják, hogy a havi $\frac{\text{teljes bevétel}}{\text{teljes költség}}$ arány mekkora.

A befektető szempontjából az a kedvező, ha ez az arány a lehető legnagyobb.

Határozza meg, hogy hány emeletes épületet érdemes építtetnie a befektetőnek! (Feltételezzük, hogy az épületben minden felépülő emeletre lesz bérlő.)

831. Egy alagutat korszerűsítene, szellőztető berendezéssel látják el. Ahhoz, hogy megtervezzék a szellőztetőt, ismerni kellene az alagút térfogatát. Az alagút keresztmetszete olyan parabolaív, aminek csúcspontja az alagút legmagasabb pontja. Az alagút magassága 6,4 m, a legszélesebb része 8 m. Az alagút hossza 400 m, és nem kanyarodik.

a) Határozza meg az alagútban levő levegő térfogatát!

b) Legfeljebb milyen magas kamion fér el az alagútban, ha a kamionok szélessége 2 m?

832. Medence alapját akarják kiásni. A medencében a víz felszíne $5\text{ m} \times 5\text{ m}$ -es négyzet, mélysége 2 m. A medence három fala függőleges, a negyedik a föld felszínével 60° -os szöget zár be. (A medence alapterülete kisebb, mint a víz felszíne.)

a) Mennyi földet kell kiásni a medencéhez?

b) A medence kicsempézéséhez hány négyzetméternyi csempét vegyenek, ha a veszteségek (szélek, sarkok csempézése) miatt 15%-ot szoktak rászámolni?

c) A csempézést két ember kezdi. Öt napra vállalják a munkát, de az egyikük két nap után megbetegszik, és társának egyedül kell befejeznie a munkát. Feltételezve, hogy azonos tempóban dolgoznak, összesen hány nap alatt végzik el a csempézést?

833. Tegyük fel, hogy egy termékből 58 Ft egységáron egy hét alatt 100 db fogyott. A következő héten, amikor egy akció keretében leszállították a termékek árát 51 Ft-ra, 200 db fogyott el.

a) Adja meg az árat a kereslet függvényében, feltételezve, hogy a termék ára és a kereslet között lineáris kapcsolat van!

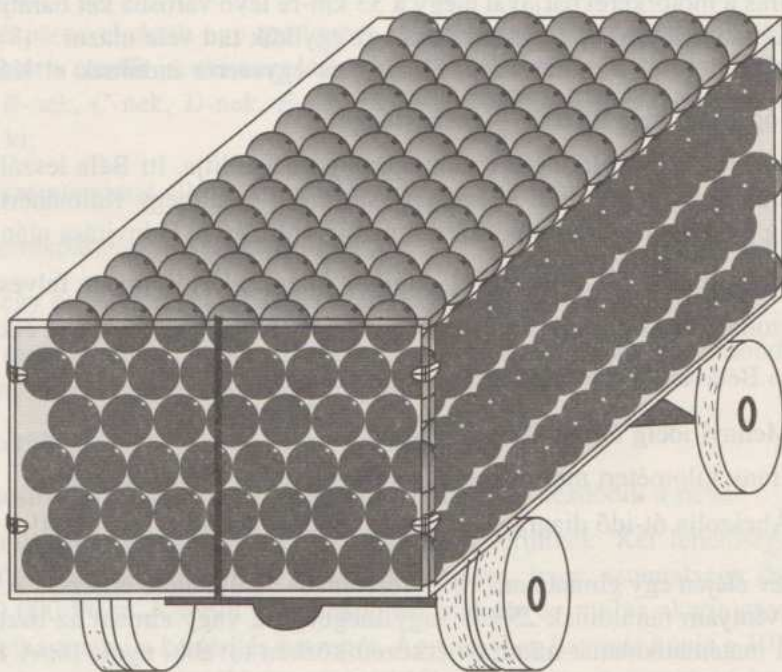
b) Milyen ár mellett lesz a heti bevétel maximális?

834. Japánban addig próbálkoztak a görögdinnye nemesítésével, amíg sikerült elérni, hogy kocka formájú görögdinnyék teremjenek. Ennek a szállításnál van nagy előnye.

a) Egy 5 kg-os, hagyományos formájú, gömbnek tekinthető dinnyéből mekkora élő „kockadinnye” lenne? (A dinnye anyagát tekintjük homogénnek, az átlagsűrűség $\rho = 1,05 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$.)

*b) Egy kamion rakodótere téglatest alakú, méretei: $a = 6 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$.

Ha 10 kg-os dinnyéket szállítanak, hány kilogramm dinnyét tud egy kamion elvinni a hagyományos, illetve a „kockadinnyéből”, ha az ábra szerinti elrendezésben rakják a dinnyéket?



835. Adott az $y = 3 - 3x^2$ egyenletű görbe és az $y = -x$ egyenletű egyenes. Tekintsünk két, az y tengellyel párhuzamos egyenest, amelyek távolsága egymástól egy egység. Hogyan válasszuk meg a két egyenest, hogy a négy görbe által közrefogott terület maximális legyen, ha tudjuk, hogy az egyenesek távolsága az y tengelytől nem nagyobb 0,8-nél? Adja meg a két egyenes egyenletét!

836. Egy test az adott erő hatására a földön, vízszintes síkban, egy körpályán mozog.

a) A derékszögű koordináta-rendszerben a körpálya egyenlete:

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0.$$

A körvonal origótól $\sqrt{5}$ távolságra levő P pontjában, a koordináta-rendszer I. negyedében az erő hatása megszűnik. (Ekkor a test a pályáját a kör adott pontbeli érintőjén folytatja.) Írja fel a test további pályájának egyenletét!

b) Bizonyítsa be, hogy a fenti kör x tengellyel való metszéspontjai és a P pont által meghatározott háromszög magasságpontjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe rajta van a háromszög köré írható körön!

837. András a motorkerékpárjával megy a 33 km-re levő városba két barátjával, Bélával és Kálmánnal együtt. Egyszerre csak az egyikük tud vele utazni.

Először Béla ül a motor hátsó ülésére, és egyszerre indulnak el Kálmánnal, aki gyalog kezdi meg útját $6 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel.

A motort a város előtti leeresztett sorompó megállítja. Itt Béla leszáll a motorról. András pedig a motorral azonnal visszafordul és elmegy Kálmánért, aki közben végig gyalogolt. A sorompó tizenöt percig volt zárva. Felnyitása után Béla gyalog folytatja útját $4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel. Amikor András eléri Kálmánt, felveszi a motorra, és azonnal visszafordulva a városba indulnak. Ide éppen egyszerre érkeznek a gyalogló Bélával. A motor átlagsebessége végig $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ volt.

a) Mennyi ideig tartott így a teljes út?

b) Hány kilométert motorozott és gyalogolt Béla, illetve Kálmán?

c) Ábrázolja út-idő diagramon András, Béla és Kálmán mozgását!

838. Tanév elején egy gimnázium 10. évfolyamába 36 új tanuló érkezett. A 10. év végén az évfolyam tanulóinak 25%-a vagy megbukott, vagy elment az osztályból a szigorú matematikatanár miatt, de érkezett közben további nyolc fő. A 10. év végéig még 5-tel kevesebb tanuló ment el az évfolyamból, mint a 12. év végi létszám $\frac{2}{5}$ -e.

Így végül az induló létszám $\frac{2}{3}$ -a érettségizett az adott évfolyamon.

a) A 10. évfolyamon eredetileg hányan voltak?

b) Az érettségiző évfolyamból nyolc tanuló elmehet a jutalomtáborba. Az igazgató a legalább 4,0 eredménnyel érettségizettek közül akarja kiválasztani ezeket a tanulókat. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha az érettségizettek 65%-a nem érte el a 4,0 eredményt?

c) Hányféleképpen választhat akkor, ha a legalább négyes átlageredménnyel érettségizett tanulók közül van egy-egy olyan pár, akik egymás nélkül nem utaznak el a táborba?

839. Péter és János kerékpárral kirándulni indultak reggel 6 órakor. Délig egyszer pihentek negyed órát. Az út $\frac{3}{5}$ -ét másfélszer akkora sebességgel tették meg, mint az $\frac{1}{3}$ -át. A fennmaradó út lejtős volt, ezért arra elég volt negyed óra.

a) Hány kilométert tettek meg délig?

b) Egyórányi ebédszünet után úgy döntöttek, hogy az előttük levő V alakú elágazásnál külön-külön folytatják az útjukat. Mindkét út egyenes országút volt, egymással 30° -os szöget zártak be.

János $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel haladt, Péter hét métert tett meg másodpercenként. Milyen távolra kerülnek egymástól tíz perc alatt?

840. Egy kerékpáros elgázolt egy gyalogost. A balesetnek két tanúja volt, és később megérkezett a rendőr is, aki nem látta az esetet. A történet öt szereplőjét nevezzük röviden B-nek, C-nek, D-nek, E-nek és F-nek. Meghallgatásukkor a következők derültek ki:

1. F szemtanú azt állítja, hogy a kerékpáros volt a hibás;

2. a kerékpáros nem szimpatizál E-vel;

3. B egy és fél perccel a baleset után betért egy presszóba kávézni;

4. C megpróbálta ellátni a sérültet, majd a 25 éves rendőrnek elmondta, hogy miként történt az eset;

5. a sérült gyalogos E nős fiának a barátja.

a) Azonosítsa az öt szereplőt! Kinek melyik betűvel kezdődik a neve?

b) A kerékpáros ügyvédje kártérítést ajánlott a sérültnek. Két lehetőséget kínált fel. Tíz éven keresztül havi 10 000 Ft-ot fizet, vagy azonnal egy összegben 1 500 000 Ft-ot. A sérült mindenképpen csak tíz év múlva akarja egy összegben felhasználni a kártérítés összegét. Amennyiben havonta kapja a 10 000 Ft-t, akkor azt azonnal takarékbba teszi, havi 1%-os kamatra. A kamatot a bank külön számlán kezeli, és év végén tőkésíti (hozzákönyveli a betett összeghez). Ha egy összegben kapja a másfél millió forintot, azt is takarékbba teszi évi 5%-os kamatra. Mindkét esetben tíz év múlva veszi fel az összeget. Melyik megoldást válassza a kerékpáros, ha számára csak az a lényeg, hogy tíz év múlva minél nagyobb összeggel rendelkezzen?

841. Egy lakás felújításának költségei a következőképpen alakultak: a mellékhelyiségek burkolatai és a fürdőszoba berendezése a konyhabútor $\frac{4}{5}$ -e, a festés-mázolás pedig a mellékhelyiségre költött összeg (a konyhabútor nélkül) 30%-a. Összesen 1 632 000 Ft-t költöttek.

a) Mennyibe került a konyhabútor, a mellékhelyiségek felújítása és a festés-mázolás?

A család a lakásfelújítás után szeretné összehívni a barátait, hogy megünnepeljék a lakás elkészültét. Összesen 37 barát került fel a meghívandók listájára, de egyszerre nem tudnak ennyi embert vendégül látni. Úgy döntöttek, hogy több részletben hívják meg őket. Az első alkalomra 14 vendéget akarnak meghívni.

b) Hányféleképpen választhatják ki őket a 37 barát közül, ha a 37 ember között három házaspár van, és a házaspárokat természetesen csak együtt lehet meghívni, továbbá három független férfi is van, akik haragszanak egymásra, és ezért nem szeretnék őket egyszerre vendégül látni?

842. Egy iskola diáknapokra készül, ahol sokféle játékot, mulatságot terveznek.

a) Az egyik osztályt a tombolaajándékok vásárlásával bízták meg. 1000, 200 és 50 Ft-os ajándékokat vásárolnak. Hányféleképpen vásárolhatnak 10 000 Ft-ért 100 darab ajándékot?

Az egyik nap kétfordulós villámsakkversenyt játszottak. A versenyen páros számú játékos vett részt. A nyertes mindig két pontot kapott, döntetlen esetén osztottak a pontokon. A verseny után azt tapasztalták, hogy az egyes játékosok által elért pontszámok szigorúan csökkenő számtani sorozatot alkotnak. Az utolsó helyen végzett játékosnak is volt pontja.

b) Bizonyítsa be, hogy a fenti feltételeknek csak egy pontsorozat felel meg!

843. Lajos motorkerékpárral elindul A városból B város felé. 11 perccel később B városból Aladár is elindul motorkerékpárral A felé. Mindketten állandó sebességgel haladnak ugyanazon az útvonalon. Éppen C városban találkoznak egymással, majd a találkozástól számítva Lajos 20, Aladár pedig 45 perc alatt érkezik meg B -be, illetve A -ba.

a) Hol helyezkedik el C város A és B között?

A környéken a fenti három városon kívül további két település (D és E város) is van. Az öt város közül bármelyik kettő között távolsági busz vagy vonat közlekedik (de mindig csak az egyik). Egyik járat esetében sem fordul elő, hogy egy városból elindulva két másik várost érintve visszajutna az eredeti városba.

b) Bizonyítsa be, hogy a fenti feltételek csak úgy teljesülhetnek, ha mind az öt városból két autóbusz, illetve két vonat indul a többi város felé!

844. Háromfős csapatok gyalogos túlélőversenyre indulnak. A versenykiírás szerint minden csapatot a legtávolabbi jutott versenyzőjének megtett útja szerint minősítenek. Addig azonban, amíg hárman vagy esetleg ketten vannak egy csapatból versenyben, együtt kell maradniuk, vagyis azonos sebességgel kell haladniuk. Út közben

azonban bármikor kiszállhat a csapat egy vagy két tagja, akiket a versenybíróság haladéktalanul megkeres, és biztonságos helyre szállít. Minden versenyző induláskor egységesen 24 km megtételéhez elegendő ivóvizet kap. Tegyük fel, hogy a versenyzők ivóvízfogyasztása azonos, és az út folyamán végig egyenletes.

Dénes, Péter és Márton még az indulásnál úgy döntött, hogy Márton lesz, aki a legtovább halad a csapatból.

Milyen stratégiával juthat el a legmesszebb Márton, ha mindenki csak a saját palackjában levő vizet fogyaszthatja, de egy-egy alkalommal (nem feltétlenül azonos alkalommal) Dénes és Péter áttölthet Mártonnak a saját ivóvizéből, és egy alkalommal Péter is áttölthet Dénes víztartályába? Ha elfogyott az ivóvíz, nem mehetnek tovább.

845. Egy matematikatanár 1999-ben olyan vizsgafeladatot keresett, amelyben elrejtethi a vizsga évszámát, s mégis bármely évben feladhatja anélkül, hogy a megoldást át kellene írnia. Végül, a következő feladatot tűzte ki:

$$\sin^{1999} x + \cos^{1999} x = 1$$

Valóban független a megoldás a kitevőben szereplő évszámtól, vagy kell valamilyen megkötést tennie?

846. Három alföldi kistelepülés közösen tervez útépítést. A legnagyobb településen (C) keresztül vezetne az út, amelynek kezdeti, egyenesen futó szakaszát úgy tervezik, hogy mindkét másik településtől egyenlő távol húzódjon.

a) Hogyan nézhet ki a terv?

b) Ha több lehetséges terv van, és a bekötőutak ára arányos a hosszukkal, akkor melyiket célszerű a két másik településnek támogatnia?

847. Szeretnénk meghatározni egy 22 méter széles patak keresztmetszetének területét, hogy aztán megbecsülhessük a vízhozamot. A párhuzamosnak tekinthető partokra merőleges irányban haladva kétméterenként megmérjük a patak mélységét. A mérési eredményeket az alábbi táblázat mutatja.

Mérési pont	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Mélység (m)	0,32	0,57	0,92	1,05	1,20	1,10	1,02	1,22	0,82	0,50

a) A mérési adatok alapján rajzolja meg a patakmeder keresztmetszetének kicsinyített képét!

b) Számítsa ki a keresztmetszet területének közelítő értékét!

848. Az Alföld két kis faluja, Alsófalva és Felsőfalva között utat akarnak építeni. A két falu távolsága légvonalban 6 km. Sajnos elválasztja őket egy 100 m széles folyócska is, így egy hidat is kell építeni. A folyó partjai ezen a szakaszon párhuzamos egyeneseknek tekinthetők. A hídépítés magas költségei miatt a hídnak a lehető legrövidebbnek kell lennie.

a) Milyen útirányt tervezzenek? Készítsen rajzot!

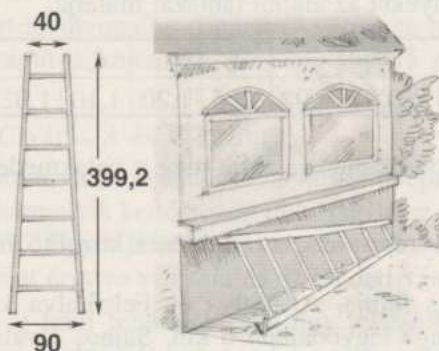
b) Igaz-e, hogy a teljes út hossza (híddal együtt) nem lesz több 6,1 kilométernél?

849. Egy édességet forgalmazó cég kókusszal ízesített csokigolyókat árusít az ábrán vázolt kartondobozkákban.



A doboz leghosszabb éle 25 cm, a vele párhuzamos élek 5 cm-rel rövidebbek, az összes többi él 5 cm hosszú.

- Legfeljebb mekkora lehet a csokigolyó átmérője?
 - Az a) feladatban meghatározott legnagyobb méretű golyócskából hány fér el egy dobozban?
 - Csomagoláskor kiderült, hogy a csokigolyók a dobozban „löttyögnek”, ezért a következő sorozatnál megváltoztatták a doboz méreteit: a c és a vele párhuzamos a oldal hosszát ugyanannyival megrövidítették. Vajon mennyivel? (A többi oldal hossza változatlan maradt!)
 - Legfeljebb hány százaléknyi takaríthatunk meg a dobozhoz használt kartonból az új csomagolás bevezetésével?
850. Péterfi úr a prospektus ábráján látható könnyű, rozsdamentes fémötvözetből készült létra megvétele mellett döntött. Döntését segítette az a körülmény, hogy egy akció keretében most a méregdrága eszköz árának csak a 12%-át kell a vásárláskor befizetni, a fennmaradó összeg hat havi részletfizetéssel törleszthető, s az első részletet csak a vásárlástól számított két hónap múlva kell befizetni.



A létrát házának oldalánál, a falhoz támasztva, fektetve akarta elhelyezni. Sajnos felakasztani nem lehet a falra, mert 88 cm magasságban egy párkány húzódik, s a létra legnagyobb szélessége ennél több, 90 cm. Először arra gondolt, hogy a létra egyik ágát a párkány alatt, vízszintesen a falhoz rögzíti.

Erről a tervéről letett, mikor rájött, hogy így a létra másik ága nem feküdne a földön. Ő pedig úgy akarta elhelyezni a létrát, hogy egyik ága a falnak támaszkodjon, másik a földön feküdjön, ha ez egyáltalán lehetséges. „Legjobb lenne talán – gondolta, – ha szimmetrikusan feküdne a létra: ugyanolyan magasan volna a talaj fölött az egyik szárnak a vége, mint amilyen távol van a faltól a másik szár vége.” Ezt a tervet is elvetette azonban, mert így nagyon „kilógna” a fekvő szár a faltól, akadályozná a közlekedést. Végül úgy döntött, amennyire csak lehet, a falhoz tolja a létrát úgy, hogy a szár vége érje el a párkányt.

Mivel éppen most készül a ház melletti rész betonborítása, a másik szárvég megtámasztását egy, a ház falával csaknem párhuzamos kis betontuskóval tervezte megoldani, amely mellé a létrát betolva, az a párkány és a tuskó közé szorulhat. Ám a hétvégi betonozásig nem érkezett meg a létra, így kénytelen volt kiszámítani, milyen távol helyezze a betontuskót a házfaltól.

a) Mekkora havi részletet kell fizetnie Péterfi úrnak, ha a létra ára 24 999 Ft?

*b) Bizonyítsa be, hogy a létra nem fektethető le oly módon, hogy egyik szára vízszintesen a falhoz támaszkodjon, másik ága pedig a földön feküdjön!

c) A Péterfi úr által elképzelt szimmetrikus elhelyezés esetén a vízszintessel hány fokos szöveget zárna be a létra falnak támaszkodó ága, és mennyire lenne távol a másik ág vége a faltól?

*d) A ház falától milyen távolságban kell kialakítani a betontuskót?

851. Tekintsünk egy olyan különleges faliórát, aminek azonos hosszúak a mutatói, csak a színük különböző, és a mutatók az óralap széléig érnek.

a) Mi a két óramutató által bezárt területek összege, miközben a 6 órát jelző helyzettől a 6 óra 30 percet jelző állapotba mozdulnak a mutatók (a kisebbik körkiket tekintve)? Az óramutatók hossza 3 dm.

b) Hány perc múlva lesz először fedésben a két mutató 6 óra 30 perc után?

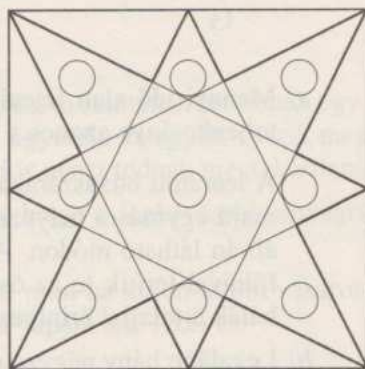
852. Az egyik általános iskolában kilenc matematika szakkörös diák jelvényt készített. Jelvényük az ábrán látható csillag lett, amelyet egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetből vágtak ki.

a) Mekkora a csillag területe?

A csillagon levő körökbe az első kilenc pozitív egész számot írták úgy, hogy a számok összege minden sorban és oszlopban ugyanannyi.

b) Mennyi ez az összeg?

c) Adjon meg egy megfelelő számrendezést!



853. Egy erdei „kisvonat” üzemanyag-fogyasztása egyenesen arányos a $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ -ban mért

sebességének a köbével. Ha a sebessége $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, akkor 100 Ft értékű üzemanyagot fogyaszt óránként. Az üzemanyagon kívül a „kisvonatnak” vannak még állandó üzemeltetési költségei (például adó, takarítás) is, ezek óránként összesen 675 Ft-ba kerülnek az eddigi tapasztalatok alapján.

Milyen sebességgel haladjon a kisvonat a végállomások között, hogy minimális legyen a költség? (Tételezzük fel, hogy képes végig állandó sebességgel menni!)

854. Az asztalra letesszünk két 100 Ft-os érmét úgy, hogy azok érintsék egymást. Az egyik érmét leSORÍTJUK az ujjunkkal, a másikat CSÚSZÁSMENTESEN körbegördítjük az álló 100 Ft-os kerülete mentén, míg vissza nem érünk a kiinduló helyzethez.

a) Hány fordulatot tett meg eközben a mozgó érme a középpontja körül?

b) A Holdnak mindig azonos oldala van a Föld felé. Mennyi ideig tart a Hold egy teljes tengelykörüli fordulata (azaz milyen hosszú egy nap a Holdon)?

855. A szántóföldön aratják a búzát. Három kombájn hat óra alatt végezné el a munkát, de az egyik kétórai munka után meghibásodik.



a) Mennyi idő alatt fejezi be a másik két kombájn így a munkát? (A kombájnok teljesítménye azonos.)

A learatott búzaszárakat összegyűjtik, és a szalmát henger alakú bálákba kötik, majd egymásra helyezik őket. Egy-egy gyűjtőhelyen hat bálát raknak össze az ábrán látható módon. A bálák átmérője 1 m, hosszúságuk 1,5 m. Az eső ellen fóliával terítik le az összerakott bálákat. (A védőfólia csak addig tart, amíg a bálák a talajjal érintkeznek, a bálák alá nem nyúlik be jelentősen.

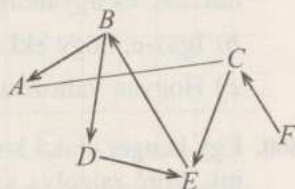
b) Legalább hány négyzetméter fóliára van szükség, ha az átfedések miatt az elméletileg számítható mennyiségnél 15%-kal több kell?

856. A szoba sarkában a földön egy 20 cm sugarú kosárlabda áll. A labda érinti a falakat. A kosárlabda mellett, a fal és a kosárlabda között elhelyeztek még egy kisebb labdát is, ami érinti a falakat és a kosárlabdát is. Az ábrán a labdákat felülnézetben ábrázoltuk.



a) Mekkora ennek a labdának a sugara?

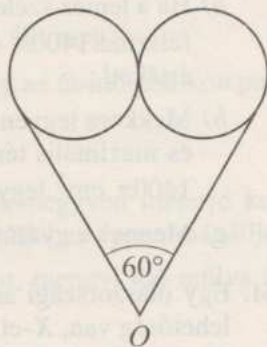
Egy iskolai kosárlabdaverseny eredményeit úgy tüntetik fel a plakáton, hogy egy-egy vonalat húznak azok közé a csapatok közé, akik már játszottak egymással. Ha döntetlen az eredmény, akkor nem tesznek nyilat a vonalra, ha pedig nem döntetlen, akkor a nyíl a győztes felé mutat.



b) Az ábra alapján foglalja táblázatba, hogy melyik osztálynak hány pontja van, ha a győzelem 2 pontot, a döntetlen 1 pontot, a vereség 0 pontot ér!

c) Hány mérkőzés van még hátra, ha tudjuk, hogy a verseny során minden csapat minden csapattal egy mérkőzést játszik?

857. Kati meg akarja lepni barátját Valentin-nap alkalmából. Egy „hatalmas” szívet akar az ablakára ragasztani öntapadós tapétából. A szívet úgy szerkeszti meg, hogy két azonos sugarú, egymást érintő kört rajzol (lásd az ábrán), majd szerkeszt hozzájuk egy-egy érintőt, amelyek egymással 60° -os szöget zárnak be.



a) Mekkora a szív területe, ha a kör sugara 15 cm?

b) Mennyi tapétát vegyen Kati, ha a tapétatekercs szélessége 70 cm, és egy darabból szeretné a szívet elkészíteni?

c) Hány százalék a hulladék?

Ötletét elmeséli két barátnőjének is, akik ezen felbuzdulva szintén szeretnének egy-egy ugyanilyen szívet készíteni. Rájönnek, hogy ha ügyesek, és együtt veszik meg az anyagot, és készítik el a három szívet, akkor egy kis pénzt tudnak megtakarítani.

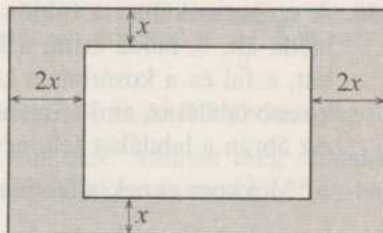
d) Hogyan helyezték el a három szívet a tapétán, hogy a legkevesebb anyagra legyen szükségük?

e) Mennyi pénzt takarítanak meg így, ahhoz képest, mint ha külön-külön vásárolnák meg az anyagot egy-egy szívhez? Egy méter tapéta ára 1200 Ft.

858. a) Bizonyítsuk be, hogy $n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n$, ahol $n \in \mathbb{Z}$!

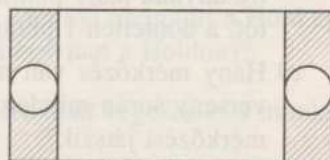
b) Mutassa meg, hogy ha az $1, 2, 3, \dots, 2n$ számok közül kiválasztunk $(n+1)$ -et, azok között mindig lesz kettő, amelyek relatív prímek!

859. Egy fényképész egy $10\text{ cm} \times 15\text{ cm}$ -es keretben akar elhelyezni egy képet úgy, hogy a fénykép és a keret között maradó rész (paszpartu) oldalt kétszer olyan széles legyen, mint alul és fölül. Szeretné, hogy a fénykép területe a keret által közrefogott terület fele legyen.



- a) Meg tudja-e ezt valósítani? Ha igen, hogyan? Később a fényképről nagyítást is rendeltek, az alakok magasságát a képen kétszeresre nagyították. Ennek a képnek a keretezéséhez a fotós egy $20\text{ cm} \times 30\text{ cm}$ -es keretet használ, és ugyanolyan módon helyezi el a képet, mint az előző esetben.
- b) Igaz-e, hogy ekkor a paszpartu területe az előzőhöz képest kétszeresére nő?
- c) Hogyan változott a paszpartu területe?

860. Egy henger alakú konténer kiterített hálóját látjuk, köré rajzolva azt a téglalap alakú lemezt, amelyből kivágták. A belső téglalap h szélessége lesz a henger magassága, a kör sugara pedig r .



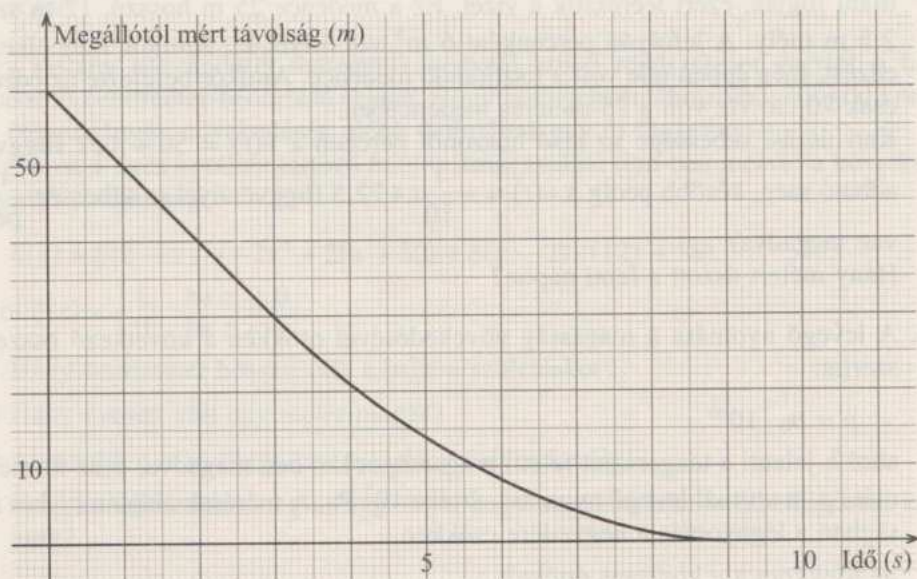
- a) Ha a lemez szélessége 1 m , és a henger össz-felšíne $1400\pi\text{ cm}^2$, akkor adja meg r és h értékét!
- b) Mekkora legyen a téglalap másik mérete, ha a lemez szélessége továbbra is 1 m , és maximális térfogatú hengert akarunk kivágni? A henger felšíne továbbra is $1400\pi\text{ cm}^2$ legyen.
- c) Mennyi a gyártás során a hulladék?
861. Egy olaszországi autópálya-szakaszon X és Y város között 8 be-, illetve kilépési lehetőség van, X -et és Y -t is beleértve. Egy árlistát szeretnének készíteni, amin feltüntetnék az összes lehetséges díjat bármelyik lehetséges belépés és kilépés között. Tekintsünk csak összefüggő szakaszokat! Ezt az árlistát az autópályajegyre ráírnák, így az utasok előre előkészíthetnék a fizetendő összeget. Az egyes szakaszok díja különböző.

- a) Hány sorból állna ez a táblázat?

A fizetőkapuk előtt az autók lassítanak, majd megállnak. Tegyük fel, hogy az egyik autó sebessége az időben $v(t) = -60\sqrt{t} + 144$ függvény szerint változik. (A sebesség mértékegysége $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, az idő s .)

- b) Határozza meg, hogy mekkora úton áll meg az autó? (Az út a sebességnek az idő szerinti integrálja.)

862. A grafikon egy fékező autóbushoz a megállótól mért távolságát mutatja a fékezés kezdetétől eltelt idő függvényében.



- Milyen messze kezdett el fékezni, és mennyi idő alatt állt meg?
- Ha állandó erővel fékez, akkor egyenletesen lassul. (Így az út-idő grafikon parabola.) Adja meg ezt a parabolát egyenlettel!
- Mekkora az átlagsebessége e kilenc másodperc alatt?
Ha legközelebb egy kicsit elmélázva, a megállótól csak negyven méterre kezd fékezni, akkor erősebben kell fékeznie ahhoz, hogy a megállóban éppen megálljon.
- Feltéve, hogy ugyanolyan sebességről kezdi a fékezést, mennyi idő múlva fog megállni?

863. Egy lift sebességét (v), miközben az egyik emeletről a másikra ér, a $v = \frac{5t - t^2}{6}$ függvény adja meg $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ban, ahol t az emeletről való elindulástól számított idő (másodpercben).

- Mennyi a lift kezdeti gyorsulása, ha tudjuk, hogy a gyorsulás (a) a sebesség idő szerinti első deriváltja?
- Mekkora a lift maximális sebessége?
- Határozza meg a két emelet közötti szintkülönbséget (s), ha tudjuk, hogy a sebesség az útnak az idő szerinti első deriváltja!

864. Kati versenyre készül, ezért tanítás előtt és után úszik, hogy minél jobb formában legyen. Egyik reggel, amikor megérkezett, kiderült, hogy az egyik medencét tisztítani fogják, ezért leeresztik a vizét. Ez a medence 25 m hosszú, 12 m széles és 2,5 m mély. A lefolyón percenként 6 m^3 víz folyik ki. Amikor Kati elkezdte az edzést, még éppen tele volt a tisztítandó medence. Amikor befejezte az edzést már csak 70 cm víz volt a 25 méteres medencében.

Kati úszási sebessége az első huszonöt percben a $v(t) = 50 + 4\sqrt{t}$ függvénnyel adható meg, később pedig a $v(t) = -\frac{1}{10}t + 72,5$ függvénnyel (a sebesség $\frac{\text{m}}{\text{perc}}$ -ben van megadva).

Hány métert úszott a fenti napon?

865. A levegő nyomása a magasság növekedésével csökken a következő összefüggés szerint:

$$p = p_0 \cdot 10^{ch},$$

ahol h jelenti a tengerszint feletti magasságot km-ben megadva, p az itt mért nyomás, p_0 a normál levegő nyomása, értéke 10^5 Pa . A mérések alapján 11 km magasságban a légnyomás a negyedére csökken.

a) Mekkora a c konstans értéke?

b) Milyen magas az a hegy, ahol a légnyomás $0,4 \cdot 10^5 \text{ Pa}$?

866. Három jó barát a karácsonyi vásáron egyforma karácsonyfadíszeket árult ugyanazon az áron. Az egyik 11 darab, a másik 18 darab, a harmadik 25 darab eladását vállalta.

Az először meghatározott áron csak keveset sikerült eladniuk, így leszállították az árat úgy, hogy az eredeti ár az új árnak egészszámszorosa lett, de továbbra is azonos áron árultak. Ezen az új áron az összes dísz elkelt. Meglepetéssel tapasztalták, hogy mind a hármuknak pontosan ugyanannyi lett a bevétele. Hogyan lehetséges ez?

867. Az áramszolgáltató a nappali energiát kétszer annyiért adja, mint az éjszakai áramot ($20 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$, illetve $10 \frac{\text{Ft}}{\text{kWh}}$). Viszont az éjszakai áram csak éjfél után kapcsolódik be. 1 kWh energiával körülbelül 14 l vizet lehet felmelegíteni. Egy öttagú családnak estére (mosogatás, mosdás, fürdés,...) körülbelül 100 l meleg vízre van szüksége, amit folyamatos nappali áram mellett már a 60 l-es bojler is tud biztosítani. A boltban a következő bojlerek kaphatók:

40 l-es 24 000 Ft;

60 l-es 30 000 Ft;

80 l-es 36 000 Ft;

100 l-es 42 000 Ft.

- a) Hány év alatt fizetődik ki a nagyobb (100 l-es) bojler megvásárlása? (A kétféle áramot nem szabad átkapcsolgatni.)

b) Egy bojler a nem megfelelő használat miatt általában kb. 30 000 óra használat után megéri a cserére. Ezt figyelembe véve melyik bojler érdemes megvásárolni?

868. Egy kislány növekedését matematikakedvelő szülei rendszeresen mérték a falra akasztott centiméter-beosztású skálán. Hogy könnyebben ábrázolhassák grafikonon az ötéves lányuk növekedését, előbb definiáltak egy új függvényt.

A gyerek x éves korához tartozó $h(x)$ testmagasságát (cm-ben mérve) a következő függvény adja meg:

$$h(x) = \xi(2 - x) \cdot (-2x^2 + 20x + 50) + \xi(x - 2) \cdot (12x + 58),$$

$$\text{ahol } \xi(z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z \geq 0 \\ 0, & \text{ha } z < 0 \end{cases}.$$

- Hány centiméter hosszú volt a baba a születéskor?
- Hány évesen volt egy méter magas?
- Ábrázolja a $h(x)$ függvényt a kislány ötéves koráig!
- Hogyan változtatná meg a függvényt, hogy nagylányként is hihető görbét kapjunk?

869. Egy telefonszolgáltató azt ajánlja, hogy 36 Ft-ért lehet percenként Amerikába telefonálni. Ezzel szemben az interneten lehetőség van arra, hogy egy Amerikában levő számítógép felhívja nekünk a kért számot, s így csak a helyi $18 \frac{\text{Ft}}{\text{perc}}$ díjat kell fizetnünk. Ehhez persze kell vennünk egy modemet a számítógépünkhöz, ami 8000 Ft-ba kerül.

- Hány percnyi telefonálás esetén érdemes már modemet venni?
- Ha havonta tíz percet beszélünk az Amerikában élő rokonunkkal, és évi 4%-os az infláció, akkor hány év múlva fizetődik ki a modemés beruházásunk, feltéve, hogy a beszélgetés díja ezalatt nem változik?

870. Az autó motorja egyenletes országúti kocsikázásnál 1500/perc fordulatszámon jár. (Ez azt jelenti, hogy percenként a négy dugattyú mindegyike 1500-szor emelkedik fel, és süllyed le.) Egyenletes gyorsításba kezdünk, s tíz másodperc alatt 3000/perc lesz a motor fordulatszáma. Ehhez a fordulatszámhoz kétszer annyira kell lenyomni a gázpedált, vagyis a dugattyúkba porlasztott benzin mennyisége fordulatonként most is ugyanannyi, mint a gyorsítás elején, csak a dugattyúk most kétszer gyorsabban mozognak.

- Mennyit fordul összesen a motor a 10 s alatt?
- A gyorsítás alatt összesen 0,2 dl benzin fogyott el. Másodpercenként mennyi porlasztódik egy dugattyúba a gyorsítás elején?
- Ábrázolja a benzin áramlási sebességét az idő függvényében a dugattyúkhöz vezető 0,5 cm átmérőjű csőben! (A négy dugattyúhoz egy csőben megy a benzin a közös porlasztóig.)

871. A kerékpárra való jó minőségű, 5000 Ft-os sebességmérő a gyár szerint 20 000 km-ig üzembiztos, a kevésbé jó gyártmány ugyan csak 1500 Ft, de a tapasztalat szerint 4000 km megtétele után már eldobható.

a) Melyiket válasszuk, ha évente 2000 km-t teszünk meg, és legalább tíz évre tervezzük a biciklik használatát?

b) Melyiket válasszuk, ha évente 2000 km-t teszünk meg, és legalább tíz évre tervezzük a biciklik használatát, de most figyelembe vesszük az évi 4%-os inflációt is? (Az 1500 Ft-os gyengébb minőségű gyártmány értéke mindvégig ugyanannyi marad, mivel addigra forgalomba hoznak sokkal jobb mérőkészülékeket is.)

c) Hány évi biciklizés mellett éri meg jobban az olcsóbb műszer?

872. A fékezett növekedés elmélete szerint, például egy állatpopuláció egy adott területen nem haladhat meg egy maximális egyedszámot. Ha ennél kevesebb egyeddel indulunk, akkor a következő képlet szerint telítődik lassan a populáció:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)a^t},$$

ahol t az eltelt idő populációtól függően években, napokban vagy akár percekben, míg a egy jellemző állandó, K a maximális egyedszám, és N_0 a kezdeti egyedszám. Ha ismerjük az egyedszámot, mondjuk 2000-, 2001- és 2002-ben, akkor meg lehet mondani a modell szerint, hogy mekkora a K és az a paraméter értéke.

A három egymást követő évben $N(t)$ értéke rendre: 16; 20; 32.

a) Adja meg K és a értékét!

*b) Vajon milyen három kezdeti érték mellett kapunk értelmes megoldást?

873. Ha két hangszer együtt szólal meg, de nincsenek jól összehangolva, akkor fellép az úgynevezett lebegés jelensége.

a) Vajon a két hangszer egymáshoz képest mennyire van elhangolva, ha tudjuk, hogy egy normál zenei A hangot a két hangszerrel egyszerre megszólaltatva, egy 4 s lüktetésű lebegés jön létre?

b) Ha mindkettő kicsit hamis, tehát egyik sem a pontos A hangot adja ki, de az egyik háromszor olyan távol van A -tól, mint a másik, akkor mekkora a két hang rezgésszáma? A normál zenei A hang frekvenciája 440 Hz ($1 \text{ Hz} = 1 \frac{1}{s}$).

874. Egy 2 cm sugarú 5 cm magas kettős kúppal közelítőleg leírható egy homokóra.

Tudjuk, hogy a homok átfolyási sebessége megközelítőleg állandó, $0,02 \frac{\text{cm}^3}{s}$.

a) Adja meg a homok pillanatnyi magasságának időfüggését, ha kezdetben a teljes homokmennyiség a felső kúpban van, és azt teljesen kitölti.

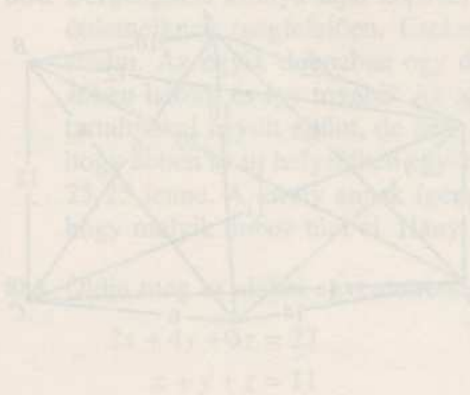
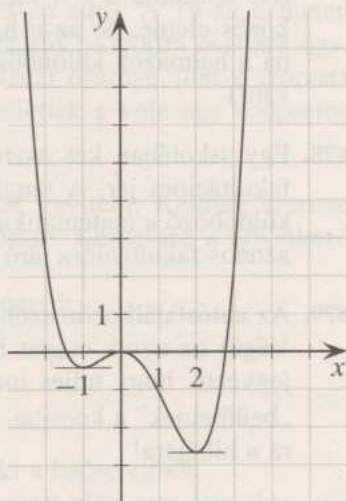
b) Mennyi idő alatt folyik át a teljes homokmennyiség a homokóra nyílásán felülről lentre?

875. Egy elektromotor fordulatszám-szabályozója egy bizonyos tartományban az alábbi összefüggés szerint működik: $n(U) = 20\sqrt{U} - 80$, ahol U jelöli a feszültséget (voltban mérve), míg a képletbeli n a fordulatszám $\frac{1}{\text{perc}}$ mértékegységgel mérve.

- Ábrázolja a fordulatszámot a feszültség függvényében!
- Mekkora lesz Δn értéke, ha a 36 V-os feszültséget 0,3 V-tal növeljük, illetve csökkentjük, azaz $\Delta U = 0,3$ V?
- Határozza meg azt a feszültségértéket, ahol igaz a következő észrevétel: egy kicsi feszültségváltozás olyan fordulatszám-változást okoz, amelynek számértéke megegyezik a feszültségváltozásával, azaz $\frac{\Delta n}{\Delta U} = 1$ jó közelítéssel teljesül!

876. A koordináta-rendszerben egy negyedfokú polinom grafikonját adtuk meg.

- Adja meg a polinom együtthatóit!
- Hol van a minimuma, illetve a maximuma?
- Mekkora értéket vesz fel ezeken a helyeken a függvény?
- Mekkora két zérushely között a függvénygörbe és az x tengely közötti terület nagysága?



7. A KÖVETELMÉNYEKEN TÚLMUTATÓ FELADATOK

877. Egy nagyvárosban 17 olyan különböző klub van, amelyek mindegyikéhez 16 bejegyzett tag tartozik. Bármely 16 klubnak a fenti 17-ből van legalább egy közös tagja, de senki sem tagja mind a 17 klubnak.

Összesen hány személy tartozik a 17 klubhoz?

(Az n számú $n - 1$ elemű halmaz közül bármelyik $n - 1$ darab halmaznak van közös eleme, de az n halmaz közös része az üres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha a halmazok különbözők, akkor a halmazok uniójának pontosan n darab eleme van!)

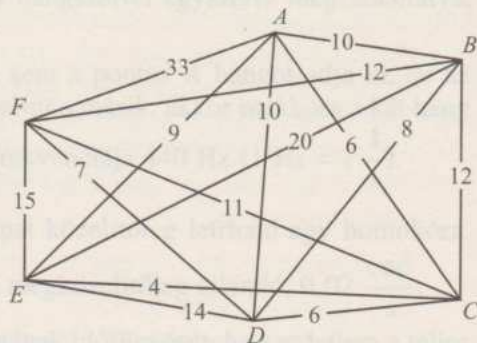
878. Egy iskolában két osztály 66 tanulója matematika, fizika, angol vagy biológia fakultációra jár. A tanulók között nincs öt olyan, aki azonos fakultációra jár és különböző a matematikaosztályzata. Igazolja, hogy található egy osztályból három azonos fakultációra járó és azonos matematikajeggyel rendelkező tanuló!

879. Az autóstalálkozón azon versenyeztek, hogy hányan férnek be egy személyautóba. Végül az egyik csapat harminchárom fővel nyerte meg a versenyt. Valaki megjegyezte, hogy teljes indukciós eljárással be tudja bizonyítani, hogy akárhányan „beülhetnek” a kocsiba. Írja le, hogy mi lehetett ez a gondolatmenet, és mutasson rá a hibájára!

880. Hat falut öt autóbuszjáratral akarnak összekötni úgy, hogy bármelyikből bármelyikbe el lehessen jutni. Az utak nem keresztezhetik egymást, csak a falvakban találkozhatnak.

a) Hányféle úthálózat lehetséges? Készítsen ábrákat a lényegesen különböző típusokról!

b) A mellékelt ábrán látható számok az egyes települések közötti útépités költségeit jelentik millió euróban megadva. Ha olyan úthálózat készül, amelyben mindegyik helységből maximum két út indulhat ki, melyik a leginkább költségtakarékos megoldás?



881. Az asztalt 14 személy ülte körbe, hét férfi és hét nő. Felváltva ültek a nők és a férfiak. Mindenki kitett az asztalra 100 Ft-ot. Karcsi, a társaság egyik férfi tagja, a következőt javasolta: kezdjék el egymásnak adogatni a 100 Ft-osokat úgy, hogy egyszerre mindig 2 db 100 Ft-ost mozdítsanak meg, egyet jobbra, egyet pedig balra helyezzenek egy ülőhellyel arrébb. Karcsi abban bízott, hogy ezzel elérhető, hogy egyszer csak előtte lesz az összes pénz. Beválik-e az elképzelése?

882. Egy születésnap ünnepségen 12 ember beszélgetett. Az ünnep kapcsán mindenki elmondta, hogy mikor ünnepli a születésnapját. Kiderült, hogy nincs köztük két olyan személy, akinek a hónapot figyelmen kívül hagyva, s csak a hónap napjait tekintve, azonos napra esne a születésnapja. (Tehát legfeljebb egy olyan személy van a társaságban, akinek elsejére esik a születésnapja, legfeljebb egy olyan akinek másodikára stb.) Azt is megállapították, hogy mindenki legfeljebb a hónap 16. napján született (tehát senki nem született 17-én, 18-án stb.). A 16-án született férfi játékos kedvében volt, és így a társaságot két hatfős csoportra osztotta úgy, hogy az egyik csoportban levők születésnapjai dátumainak összege, illetve szorzata megegyezett a másik csoportéval. Milyen napon születtek a vele egy csoportba került emberek?

883. Kálmán és Ottó egyszerre kezdtek el ólomkatonákat gyűjteni. Kálmán szerette volna tudni, hogy Ottó hány darabot gyűjtött már össze. Kérdésére a következő választ kapta:

- Ha párosával állítom fel őket a polcra, akkor egy marad;
- ha hármasával, akkor kettő;
- ha négyesével, akkor három;
- ha ötösével, akkor négy;
- ha hatosával, akkor öt;
- ha heten állnak egy sorban, akkor egy sem marad ki a hadseregből.

A gyűjteményem már meghaladta a százat, de a kétszázat még nem érte el.
Hány katonája volt Ottónak?

884. Bergengócia királya saját képével díszített pénzérmékkal ajándékozta meg híveit, érdemeiknek megfelelően. Ezeket az érméket egyforma dobozokba téve akarja átadni. Az egyik dobozban egy darab pénz van, egy másikban kettő, a következőben három és így tovább. Az ajándékozás előtt kiderül, hogy az egyik doboz a tartalmával együtt eltűnt, de nem tudják, hogy melyik. A kincstárnok kiszámolja, hogy ebben az új helyzetben egy-egy dobozban a pénzérmék darabszámának átlaga 25,25 lenne. A király annak ígéri az összes még meglevő pénzt, aki megmondja, hogy melyik doboz tűnt el. Hány darab pénzérmét kap a megfejtő?

885. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a természetes számok körében!

$$2x + 4y + 5z = 27$$

$$x + y + z = 11$$

886. Adott 8 db pozitív valós szám. Ezek összege 1.

- a) Hányféle számpár választható ki közülük, ha nincs közöttük két egyforma?
- b) Hányféle számpár választható ki közülük, ha közöttük kettő egyforma?
A 8 db számot egy kör mentén helyezik el, és összekötik mindegyiket mindegyikkel.
- c) Hány darab vonalat húztak be?
- d) A vonalak két végén levő számokat összeadva hányféle összeg kapható?
- e) Szorozza össze az előző összegeket! A számok szorzatának legalább hányszorosa a kapott szorzat?

887. Egy osztályban a tanulókat úgy teszik érdekeltté a tanulásban, hogy a tanulmányi kiránduláshoz mindenki annak a számnak a négyzetével egyenlő számú tíz fabatkát kell hogy beadjon, ahányadik a tanulmányi rangsorban (az azonos eredményűek az ábécé szerint követik egymást). Ezután a kapott pénzösszeget a tanulók között igazságosan elosztják.

- a) Milyen osztálylétszám esetén kap mindenki tízzel osztható fabatkát?
- b) Van-e tanuló, aki a pénzénél marad, ha az osztálylétszám a szokásos húsz és harminc közé esik? (Tehát ugyanannyit kell befizetnie, mint az egyenletes elosztásnál.)
- c) Az átlagosan kapott pénznél mennyivel fizet többet a legrosszabb tanuló?
- d) Milyen létszám esetén lesz a legrosszabb tanuló által befizetett pénzösszeg ezer és ötszáz fabatka között?

888. Igazolja a következő észrevétel általánosítását, és vezesse le belőle a köbszámok összegére vonatkozó összefüggést!

$$1 = 1^3$$

$$3 + 5 = 2^3$$

$$7 + 9 + 11 = 3^3$$

$\vdots$

889. a) Igaz-e az az egyiptomi észrevétel, hogy minden 0 és 1 közötti törtszám kifejezhető véges sok különböző törzstört összegeként, ahol a törzstört alatt 1 számlálójú törtet értünk?

Például $\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$.

- b) Az összeadandók számára adható-e valamilyen felső becslés (nem feltétlen éles, azaz nem javítható becslésre gondolunk)?

890. Mutassa meg, hogy bármely $k < n$ esetén a $\frac{k}{n}$ tört előállítható pontosan n darab, különböző törzstört összegeként! (A törzstört $\frac{1}{m}$ alakú szám, ahol m pozitív egész.)

891. a) Adjon meg olyan b számot, amelyre $5 \mid 2^b - 1$ -nek!

b) Adja meg azt a c számot, amelyre $7 \mid 2^c - 1$ -nek!

c) Mutassuk meg, hogy bármely a páratlan természetes számhoz található olyan b pozitív egész szám, hogy $2^b - 1$ osztható a -val!

d) Vajon igaz-e, hogy bármely olyan a pozitív egész számhoz, amelyre $(a, 10) = 1$, található olyan b pozitív egész, hogy $10^b - 1$ osztható a -val?

892. Bizonyítsa be, hogy a következő kifejezés természetes szám!

$$\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{2^n}, \quad \text{ahol } n \in \mathbb{N}^+.$$

893. Bizonyítsa a következő oszthatóságokat (n pozitív egész szám)!

a) $5 \mid 2^{4n+1} + 3$

b) $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$

c) $169 \mid 3^{3n+3} - 26n - 27$

894. Bizonyítsa teljes indukcióval a következő állításokat! Az n pozitív egész szám.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

d) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$

e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

895. Határozza meg azt az n egész számot, amelyre a következő tört értéke természetes szám!

$$\frac{n^3 - n^2 - 48}{n^3 + 5n^2 + 18n + 24}$$

896. Válassza meg az a , b és c számjegyeket úgy, hogy a velük felírható összes háromjegyű szám összege két szomszédos egész szám szorzata legyen!

897. Valaki észrevette, hogy bizonyos 37-tel osztható háromjegyű számoknak van egy érdekes tulajdonságuk. Vegyük például a 296-os számot ($296 = 8 \cdot 37$). Ha e szám számjegyeit ciklikusan permutáljuk (azaz vesszük minden lehetséges sorrendjüket), akkor 962, illetve 629 adódik. Mindkettő osztható 37-tel. Ez azt jelenti, hogy ha egy olyan hibajavító kódunk van, amely a 37-tel való oszthatóságot vizsgálja, akkor ez a ciklikus permutációnál nem jelez hibát.

a) Vajon minden 37-tel osztható háromjegyű számnak megvan ez a tulajdonsága?

b) Van-e még olyan oszthatóság, amely a ciklikus permutációra „érzékeny”, azaz ha a szám osztható egy m számmal, akkor a szám ciklikus permutációi is? Van-e ilyen m még a 37 mellett?

c) Vajon a négyjegyű számok körében vannak-e olyan számok, amelyekkel bizonyos négyjegyű számok ciklikus permutációi (ugyanúgy, mint a háromjegyűek a 37-tel) mindig oszthatók?

898. Bizonyítsa be, hogy $\sqrt[3]{5}$ nem lehet olyan másodfokú egyenlet gyöke, amelynek együtthatói racionális számok!

899. Értelmezzük $x \circ y$ -t úgy, hogy $x \circ y = a(x + y) - xy$ legyen. Mi lehet a értéke, ha az így értelmezett művelet kommutatív és asszociatív?

900. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\left| \left| |x| - 3 \right| - 2 \right| - 1 = 4$$

901. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$4x + \frac{1}{x} = 4 - \sqrt{4x - 2}$$

902. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x + 3\sqrt{5} \cdot x^4 = 10\sqrt{5} \cdot x^3$$

903. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{\sqrt{x} + 2\sqrt{\sqrt{x} - 1}} + \sqrt{\sqrt{x} - 2\sqrt{\sqrt{x} - 1}} = \sqrt{x} - 1$$

904. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol p valós paraméter!

$$\frac{x - 4p^2 + p}{x^2 - 9p^2} - \frac{x + p}{3p + x} = \frac{3p + x}{3p - x}$$

905. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol p valós paraméter!

$$\frac{2x + \frac{p}{2}}{p + 2x} + \frac{2x + p}{p - 2x} = \frac{2p^2 - 6x}{4x^2 - p^2}$$

906. A nevező gyöktelenítése egy nevezetes algebrai átalakítás. Tudjuk, hogy algebrailag teljesen azonos a két kifejezés (a gyöktelenítés előtti és az utáni), most azonban azt fogjuk vizsgálni, hogy számológépes számítás esetén is igaz-e ez.

a) Gyöktelenítse az $\frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$ törtet!

b) Számolja ki zsebszámológéppel a két kifejezés (gyöktelenítés előtti és utáni) értékét! Mekkora a kapott két érték közötti eltérés?

Vajon melyik kifejezés értéke van közelebb a valódi értékhez? E kérdés megválaszolásához két segédfeladatot adunk, a c) és d) kérdést.

c) ha a $\sqrt{2}$ hibája ε , akkor mekkora az a) kérdésben szereplő tört hibája?

d) ha a $\sqrt{2}$ hibája ε , akkor mekkora a nevező gyöktelenítése után kapott kifejezés hibája?

e) A c) és d) válasz alapján vajon mindig célszerű művelet-e a nevező gyöktelenítése a numerikus számítások esetén?

f) Vajon általános-e ez a jelenség vagy csak erre a konkrét példára vonatkozik?

Vizsgálja meg például azt, hogy az $\frac{1}{99 - 70\sqrt{2}}$ és az $\frac{1}{99 + 70\sqrt{2}}$ kifejezés közül melyik esetén pontosabb a nevező gyöktelenítése utáni alak értéke!

907. Döntse el számológép használata nélkül, melyik szám a nagyobb!

$$\log_6 7 \quad \text{vagy} \quad \log_7 8$$

908. Bizonyítsuk be, hogy $x + y = 1$, és $x > 0$, $y > 0$ esetén

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}!$$

909. Egy hosszú távú futóversenyen János és Balázs egy időpillanatban egymástól $s > 0$ távolságra vannak. János sebessége $v \frac{\text{km}}{\text{h}}$, Balázs sebessége $w \frac{\text{km}}{\text{h}}$, ahol $w > v > 0$. Mennyi idő alatt előzi meg Balázs Jánost $d > 0$ távolsággal?

910. Egy hullámvonal félkörívekből áll, minden félkörív sugara az előző sugár fele. Az első sugár 1 egység.

a) Milyen hosszú az n félkörből álló hullámvonal?

b) Milyen hosszú az n félkörből álló hullámvonal, ha $n \rightarrow \infty$?

c) Milyen hosszú az n félkörív átmérőjének összege?

d) Milyen hosszú az n félkörív átmérőjének összege, ha $n \rightarrow \infty$?

911. Egy hétévégi házba átfolyó rendszerű vízmelegítőt szerelnek be. Ebben egy 2,5 kW-os fűtőszál található, amely a spirálszerűen feltekert, 1 m hosszú és 1,3 cm átmérőjű csőben levő csapvizet ($20\text{ }^{\circ}\text{C}$) melegíti $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ -osra. (Melegebbre nem tudja, mivel a szabályozó kikapcsolja a fűtést.) Ez a fűtőszál 1 l vizet 100 s alatt melegít fel.

a) Hány fokosra tudja felmelegíteni a vizet, ha percenként 10 l meleg vizet szeretnénk nyerni? (Tegyük fel, hogy a helyi magas víznyomás miatt a csövön át tud folyni ekkora vízmennyiség.)

b) Ábrázolja a kifolyó víz hőmérsékletét 1 percnyi melegeedés után a kifolyó mennyiség függvényében!

912. A hétévégi kis ház konyhájában két villanymelegítő lapot használhatnak a főzéshez. Az egyik 600 W-os és 25 cm átmérőjű, a másik 900 W-os 35 cm átmérőjű körlap. Ezek az energiát az érintkező felületek nagyságával (a lap és a rá helyezett edény aljának közös része) egyenes arányban adják át. Az egy óra alatt fogyasztott 1000 W energia 20 Ft-ba kerül. Egy liter víz felmelegítéséhez 93,3 wattóra energia kell. Az edények 10, 15, 20, 30, illetve 40 cm átmérőjűek. Ábrázolja egy liter víz felmelegítésének költségét az edények alapátmérőjének függvényében a kétféle lap esetében!

913. Egy 10 cm átmérőjű, 7 cm magas, henger alakú csészében 5 cm magasan áll a tea. Kevergetéskor azt tapasztaljuk, hogy a keletkező forgási paraboloid széle a csésze pereméig ér. Számolja ki, hogy milyen magasságban van ekkor a teafelszín legmélyebb pontja a csésze aljától!

914. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin x = -2$$

915. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\log_{\sin x} (2 \cos x - 1) < 1$$

916. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$(\cos x)^{\sin x} > 1$$

917. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\log_{\cos x} \sin \cos x > 0$$

918. Logaritmus úr szerelmes lett Koszinusz kisasszonyba, s az alábbi „rajzos” levelet küldte neki. Rajzolja meg Ön is ezt az ábrát!

$$\begin{aligned} & [-\pi \leq y \leq 0 \wedge x^2 = (1 + \cos y)^2] \vee \\ & \vee \{y \geq 0 \wedge [(x-1)^2 + y^2 - 1] \cdot [(x+1)^2 + y^2 - 1] = 0\} \end{aligned}$$

919. Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben azokat az $(x; y)$ pontokat, amelyekre teljesül a következő feltétel!

$$(\cos x)^{\sin y} > 1$$

920. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\log_{\cos x}(\sin 2x) > 1$$

921. Az alábbi sorozatok közül melyek konvergenssek?

a) $\left(\frac{1}{2^n}\right)$

b) $\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

c) $\left(\frac{1}{2^{-n}}\right)$

d) $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$

e) $\left(\frac{n}{\sin n}\right)$

f) $\left(\frac{n}{[1 + \sin n]}\right)$, ahol $[x]$ az x egész részét jelenti.

922. Bizonyítsa be, hogy igaz a következő egyenlőség!

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1, \quad \text{ahol } n = 1, 2, \dots$$

923. Állapítsa meg a következő kifejezések határértékét!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 10}{5x^2 - x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 2}{3x^3 - 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 3}{2x^3 - x + 12}$

924. Állapítsa meg a következő kifejezések határértékét!

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 5} + 5x \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 1} - 3x \right)$

925. Állapítsa meg a következő kifejezések határértékét!

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^3-2x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x-6}{x^3-2x^2-x+2}$

926. Állapítsa meg a következő kifejezések határértékét!

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{x^3+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

927. Mennyi az egységkerületű háromszögekben az oldalak reciprokösszegének minimuma?

928. Ábrázolja, és jellemezze az alábbi függvényt!

$$f(x) = (x+2) \cdot e^x$$

929. Adott a következő függvény.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} + \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

a) Határozza meg a függvény szélsőértékét!

b) Ábrázolja a függvényt!

930. Ábrázolja $f(x)$ -et, ha tudja, hogy $f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$, ha $x \neq 0$!

931. Egy halacska a vízben való lesüllyedéséhez 10%-kal csökkentette az úszóhólyagjának térfogatát. Mennyi munkát végzett eközben az izomzata?

A halacska úszóhólyagja kezdetben 10 cm^3 , a benne levő nyomás 101 kPa .

(Állandó hőmérsékleten a térfogat és a nyomás fordítottan arányos, a munkavégzés

pedig $W = - \int p dV$.)

932. a) Oldja meg a következő egyenletet a pozitív valós számok halmazán!

$$\sqrt{x+2} = x^2 - 2$$

b) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a következő függvényeket a lehető legbővebb értelmezési tartományon!

$$x \mapsto \sqrt{x+2} \text{ és } x \mapsto x^2 - 2$$

c) Mekkora területet zár be egymással a két függvény grafikonja, ha az értelmezési tartományt a nemnegatív valós számokra szűkítjük le?

933. Határozza meg a b értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű görbe alatti terület az $[1; e]$ és az $[e; b]$ intervallumban egyenlő legyen egymással! (Az e az Euler-féle szám.)

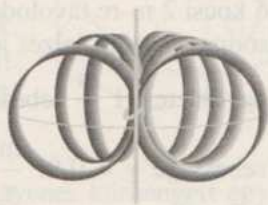
934. Egy keskeny tölcser palástja az $y = 2x$ görbe y tengely körüli megforgatásával jött létre. Mekkora felületű anyag kell ehhez, ha az x változó értéke 1 cm-től 5 cm-ig változik?

935. Egy nagy iglu sátor alakja jó közelítéssel az $x \mapsto 2 - \frac{x^4}{4}$ függvény megforgatásával keletkezett, ahol x méterekben van meghatározva. Mekkora a sátor belső légtörménye, tehát a megforgatott x tengely síkja feletti térfogat?

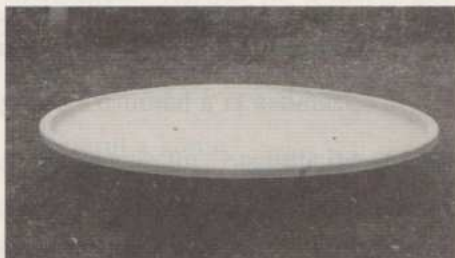
936. Az ufórajongók repülő csészealjzat terveznek. A test külső formáját az $y = -\frac{1}{8}x^4 + 2$, ahol $x \in [-2; 2]$ függvény y tengely körüli megforgatásával, illetve ezután ezt az alap síkjára [az (x, z) síkra] tükrözve nyerték. Mekkora ennek a térfogata?

937. Kössünk cérnaszálra egy karikagyűrűt, és pörgessük gyorsan! A fonalat hirtelen megfeszítve a gyűrű a rögzítési pontja körül fog forogni. Mekkora a gyűrű által határolt rész térfogata?

(Számítsa ki annak a tórusznak a felszínét, amelynek belseje összeér és körkeresztmetszetének sugara 1 cm!)



938. Egy parabolaantennát felszerelése előtt az udvarban hagyunk. Egy olyan forgási paraboloidról van szó, amelynek átmérője 70 cm. A felső peremétől az alsó fenékpontja 12 cm-re van. Ha vízszintesen állt az ábra szerint, és 6 cm magasan van benne az esővíz, akkor hány milliméter eső esett éjjel? (A párolgástól tekintünk el. 1 mm eső azt jelenti, hogy az adott A m² területű felületre $0,001A$ m³ eső esett.)



939. A vulkán kráterét egy tó tölti ki. Szeretnénk megbecsülni a tó vízmennyiségét. Két modellünk van, az első közelítés egy csonka kúp, a második egy forgásiparaboloid-darab.

A kráter „felső sugara” 15 m, körülbelül 40 m mély és az alja 6 m sugarú.

Végezze el mindkét modellel a becslést!

940. Egy 40 cm átmérőjű, 25 cm magas henger vízzel van tele. A henger alján egy $A = 4 \text{ cm}^2$ alapterületű lyuk van. Tudjuk, hogy a kifolyás sebessége a még bent levő vízmennyiség magasságának négyzetgyökével arányos, pontosan $v = \sqrt{2gh}$ (Torricelli észrevétele 1656-ból).

a) Írja föl a pillanatnyi magasságot az idő függvényében, ha a tele hordóból $t = 0$ időpillanatban kezd kifolyni a folyadék!

b) Mennyi idő alatt ürül ki a hordó?

941. Adja meg a következő függvények határozatlan integrálját!

a) $f(x) = (x - 1)(3x + 2)x$

b) $g(x) = e^x + 3\sqrt{x}$

c) $h(x) = \frac{x^3 + 1}{2x^2 - 2x + 2}$

942. A pirosra váltott lámpánál hosszú kocsisor alakult ki. A kocsik szorosan állnak, a köztük levő távolság 0,5 m, egy autó hossza 4 m. Amikor a lámpa zöldre vált, az első autó elindul, a mögötte álló kocsi pedig akkor indul el, amikor az előtte levő kocsi 2 m-re távolodott tőle és így tovább. Hány kocsi tud átmenni a negyven másodperces zöld jelzés alatt, ha a kocsik

a) egyenletes, $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel indulnak;

b) sebessége $y = 0,9t \frac{\text{m}}{\text{s}}$ szerint változik, ahol t az időt jelenti másodpercekben mérve?

943. Egy háromszög t területére a szokásos jelölésekkel igaz, hogy:

$$2t = ab\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta}.$$

Számítsa ki a háromszög szögeit, ha $\alpha = 37^\circ$!

944. a) Mi állítható azokról a háromszögekről, amelyekre $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ és $\operatorname{tg} \gamma$ egymás utáni természetes számok?

b) Van-e még olyan háromszög, ahol $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$ és $\operatorname{tg} \gamma$ egészek?

945. Egy koordináta-rendszerben adott egy négyszög. A négyszög csúcsai: $A(0; 0)$, $B(4; 6)$, $C(1; 10)$, $D(-3; 3)$. Határozzuk meg a négyszög súlypontját!

946. Legyen $ABCD$ konvex négyszög. Az ABC , ABD , ACD és BCD háromszögek súlypontjai rendre: S_1 , S_2 , S_3 és S_4 .

a) Igaz-e, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög hasonló az $ABCD$ négyszöghöz?

b) Ha igen, akkor mi lehet annak a forgatva nyújtásnak a középpontja, amelyikkel az $ABCD$ négyszöget az $S_1S_2S_3S_4$ négyszögbe lehet vinni? [A forgatva nyújtás azt jelenti, hogy egy adott pont körül elforgatjuk egy megadott szöggel a síkot, majd egy szintén adott arányú középpontos nagyítást (kicsinyítést) alkalmazunk ugyanazon pontból.]

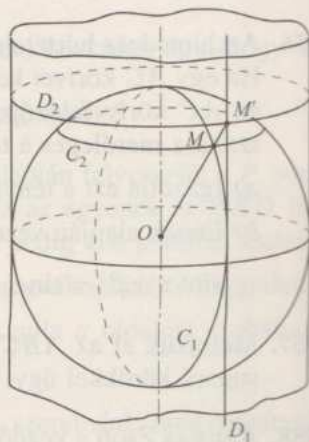
947. Egy fémcsőből pogácsaszaggatót készítenek. A cső egyik végét az alkotókra merőlegesen, a másik végét 45° -os szöget bezáróan vágják le. Ugyanabból a téstárból hányszor több pogácsát lehet a cső kör alakú végével kiszaggatni, mint a másik (ellipszis alakú) felével? (A maradékokat mindig visszagyúrjuk, hogy azokból is lehessen pogácsát szaggatni, a téstát pedig mindig azonos vastagságúra nyújtjuk.)

948. Földünkön igen nehéz térképet készíteni, mert a gömb felszínét nem tudjuk síkba kiteríteni. Ezért különféle vetítéseket találtak ki, amelyek segítségével síkba vihető a gömb felszíne. Az ábrán látható módon törtenő vetítést Mercator-féle vetítésnek hívják.

A Föld felszínéről készült térkép 20 cm széles.

Mekkora területet foglal el a Ráktérítő ($23,5^\circ$) és az Egyenlítő közötti rész ezen a térképen?

Területtartó-e ez a leképezés?



949. A hentesnél a párizsirudat papírba csomagolják. Kicsomagolás előtt vágja ketté kissé ferdén a párizsit. Ekkor egy ellipszismetszetet kap. Terítse ki a papírt! Milyen alakú lesz a párizsiról letekert papír széle a vágás mentén?

(Matematikailag megfogalmazva: Vágjunk el egy egyenes körhengert egy síkkal. Bizonyítsuk be, hogy a henger palástját kiterítve a vágás egy szinuszcörbe lesz!)

950. Az ABC háromszög B csúcsába állítsunk merőlegeset AB -re! Ez a merőleges metsze P -ben a háromszög köré írt kört. Továbbá $PC \cap AB = N$ és $BP \cap AC = M$.

a) Bizonyítsa be, hogy $AP \perp MN$!

b) Mi M mértani helye, ha BC rögzített és A végigfut a körön?

951. Az ABC háromszögben $\gamma = 90^\circ$, és $\overline{AB}$ rögzített. Mérjük fel $\overline{BC}$ -nek C -n túli meghosszabbítására $\overline{BC} = \overline{CD}$ -t. Kössük össze a D -t az O -val, ha O az $\overline{AB}$ felezőpontja. Legyen $M = \overline{OD} \cap \overline{AC}$! Mi M mértani helye, ha C minden lehetséges értéket felvesz?

952. Az ABC és PQR háromszögek szögei páronként egyenlők, és két-két oldaluk is egyenlő. Egybevágók-e?

953. Az oldalak segítségével fejezze ki a háromszög felszögeinek szögfüggvényeit!

954. Mi állítható a háromszög α szögéről, ha oldalaira igaz: $a^4 = b^4 + c^4$?

955. Aranymetszésnek nevezzük egy adott szakasz olyan felosztását, amelyben a kisebbik darab úgy aránylik a nagyobbhoz, mint a nagyobbik rész az egészhez.

a) Igazolja, hogy ekkor a kisebb és a nagyobb szakasz aránya $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$!

b) Mutassa meg, hogy a szabályos ötszög oldalának és átlójának aránya éppen az előző pontbeli aranymetszés aránya!

c) Mi mondható az R sugarú körbe írt szabályos tízszög oldalának és a köré írt kör sugarának a viszonyáról?

Útmutatás: a tízszög egy szeletét véve, a háromszög egyik körön levő csúcsának szögfelezőjét behúzva, vizsgálja meg a két részháromszöget!

956. Arkhimédész hűrtétele a következőképpen szól.

Ha egy AC körívet két részre bontunk egy B ponttal, akkor igaz lesz a következő: az AC körív felezőpontja F , és az ABC töröttvonal G felezőpontját összekötő szakasz merőleges a töröttvonalra.

a) Igazolja ezt a tényt!

b) Ennek alapján vezesse le hegyesszögek esetére a következő addíciós képletet:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

957. Metsszük el az ABC háromszög a , b , c oldalait A , B , C középpontú, r_1 , r_2 , r_3 sugarú körökkel úgy, hogy a kapott hat metszéspont egy körön helyezkedjen el!

958. Anna és Zsófi a kezdődő zápor esőcseppjeit nézik a földön. A járda $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ -es burkolólapjára hulló cseppek még különálló foltoknak látszanak. A keletkező foltok 1 cm sugarú köröknek tekinthetők.

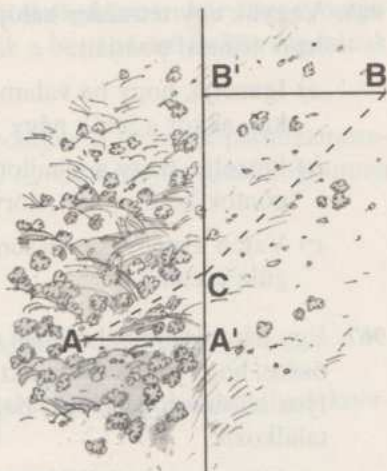
a) Anna azt állítja, hogy eddig legfeljebb 105 csepp esett a kőlapra. Bizonyítsa ezt be! (Egy esőcsepp akkor esik a kőlapra, ha teljes egészében ráesett. Tegyük fel, hogy a szélekre nem esik.)

b) Anna azt kérdezte ezután, hogy legalább mennyi esőcsepp esett, ha több nem eshet már a kőlapra anélkül, hogy ne érintene egy már rajta levő foltot. Segítsünk Annának válaszolni!

959. Két különböző terep az ábra szerint egy egyenes vonalban találkozik. A terepeken más a sebességünk: a bal oldalon $v_1 = 3 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a jobb oldalon $v_2 = 5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Hogyan menjünk az A pontból B -be a legrövidebb idő alatt, ha az A pont a határvonaltól 1 km -re, míg a B $1,5 \text{ km}$ -re van, és a merőleges vetületük (A' és B') távolsága 2 km ?

Az ábrába berajzolt szaggatott vonal ACB csak egy lehetséges út és nem a legrövidebb.



960. Fejezze ki az ABC háromszög C csúcsából induló szögfelezőjének hosszát a háromszög a , b , c oldalával!
961. Egy háromszög alapú gúla élei 7 cm , 8 cm , illetve 9 cm hosszúak úgy, hogy az egymáshoz képest kitérő élek egyforma hosszúak. Mekkora szöget zárnak be a legrövidebb élben csatlakozó lapok?
962. Az $ABCD$ szabályos háromszög alapú gúla ABC alaplajján felvesszük a P pontot, majd P -ben merőlegest állítunk az ABC síkra. Ez az egyenes az ABD lap síkját az X , az BCD lap síkját az Y , a CAD lap síkját pedig a Z pontban metszi.
- Igazolja, hogy a $PX + PY + PZ$ összeg a P pont megválasztásától független!
 - Számítsa ki a $PX + PY + PZ$ összeg értékét, ha a gúla a oldalélű szabályos tetraéder!
963. Egy ház kertjében a kaputól a házig vezető ösvényt szeretnénk megvilágítani. A lámpák (a fényforrások) a földtől 80 cm magasan vannak, és olyan kúp formájú az ernyőjük, ami lefelé bővülő.
- Hány lámpára van szükség, ha az ösvénynek csak az egyik oldalán van lehetőség lámpákat elhelyezni és a kúp nyílásszöge 120° , és szeretnénk, ha fény érne az út minden pontját? Az ösvény szélessége $s = 100 \text{ cm}$.
 - Hány lámpára van szükség, ha az útnak mindkét oldalára teszünk lámpákat, és a kúp nyílásszöge 120° , továbbá szeretnénk, ha fény érne az út minden pontját? Az út szélessége $s = 100 \text{ cm}$.
964. Síküvegből dísz tárgyakat készítünk. Üvegesnél levágatunk négy egybevágó háromszöget – ezeket rézzel befuttatva tetraéderré szeretnénk összetenni. Az összeragasztás előtt még szép, tájképszerű tárgyakat (fákat, hajókat) ragasztunk bele. Bizonyítsa be, hogy csak akkor állítható össze a levágott négy háromszög tetraéderré, ha azok hegyesszögűek!
965. Egy egyenes hengert metsszünk el egy síkkal! Bizonyítsa be, hogy a keletkező síkmetszet ellipszis!

966. Vegyük egy tetraéder hálóját. Jelöljük meg a tetraéder beírt gömbjének a lapokon levő érintési pontjait.
- Igazolja, hogy ha valamelyik lapra a közös élek mentén ráhajtjuk az oldallapokat, akkor a jelölt négy pont éppen fedi egymást;
 - Igazolja, hogy a lehajtott oldallapok csúcsai egy, a közös pontba került érintési pontok köré rajzolt, körvonalon helyezkednek el!
 - Vajon érvényes-e hasonló állítás beírható gömbbel rendelkező $n > 3$ oldalú gúla esetén?
967. Egy háromszög belsejében tetszőlegesen vegyünk fel pontokat! Ezeket úgy kössük össze, hogy csupa diszjunkt kis háromszög keletkezzen! Ezt akkor nevezzük szabályos háromszögelésnek, hogyha minden pontban ugyanannyi háromszögel (oldal) található.
- Adjon meg egy ilyen szabályos háromszögelést!
 - Mutassa meg, hogy három lehetőség biztosan van!
Útmutatás: használjuk a szabályos testek hálóját!
968. Adott a $2x^2 + 16y^2 = 64$ ellipszis.
- Mekkora szögben metszi az ellipszist az $x - 2\sqrt{2}y = 4\sqrt{2}$ egyenes?
 - Milyen b valós paraméter esetén érinti az $x - 2\sqrt{2}y = b$ egyenes a fent megadott ellipszist?
969. Adott az $x^2 + y^2 = 16$ kör és az $y = x^2 + 3$ parabola.
- Ábrázolja a két alakzatot közös koordináta-rendszerben!
 - Milyen szögben metszi egymást a két görbe?
 - Mekkora a két görbe által határolt véges tartományok területe?
 - Írja fel egyenlőtlenségek segítségével a függvénygörbék határolta véges tartományok egyikét!
970. Egy kutatócsoport a tengeri teknősök mozgását, vándorlását tanulmányozta úgy, hogy a nőstény teknősökre jeladókat erősítettek, és műhold segítségével követték őket.
- Az alábbi táblázatban egy teknős kiindulási és megérkezési helyének földrajzi koordinátái láthatók (fokokban). A rövidítések: Ész: északi szélesség; Nyh: nyugati hosszúság
- | | A teknős helyzete | |
|----------------------------|-------------------|------------|
| A teknős indulási helye | 28,018 Ész | 80,533 Nyh |
| A teknős megérkezési helye | 22,573 Ész | 77,510 Nyh |
- Határozza meg, hány kilométer utat tett meg a teknős!
(A Földet tekintsük $R = 6370$ km sugarú gömbnek!)

971. Bizonyítsa be, hogy bármely háromszögben a háromszög köré írt kör középpontjának az oldalaktól mért távolságösszege megegyezik a be- és köré írt kör sugarának összegével!
972. Egy háromszög területe T . Tetszőleges P belső pontján át húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal! A kapott három háromszög t_1, t_2, t_3 , a három paralelogramma T_1, T_2, T_3 területű.
- Igazolja, hogy $T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 = 8 \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$!
 - Igazolja, hogy $\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} + \sqrt{t_3} = \sqrt{T}$!
 - Mikor lesz a kapott paralelogrammák területösszege maximális?
973. Vegyük fel a térbeli koordináta-rendszerben azokat a rácspontokat, amelyek koordinátái a $3^x + 3^y + 3^z = 513$ egyenlet megoldásai!
- Milyen síkidomokat határoznak meg ezek a pontok?
 - Határozza meg a síkidomok területét!
974. Az ABC háromszögben (a szokásos jelölés szerint) $\beta < 90^\circ$. Szerkesszünk a köré írt körön olyan D pontot, hogy a kapott $ABCD$ négyszög érintőnégyszög legyen! Milyen határok között változik a kapott négyszög területe?
975. Az ABC háromszög oldalai a, b, c . Határozza meg a belső szögfelezők talppontjai által meghatározott háromszög területét!
976. Négy, egyenlő r sugarú gömb páronként érinti egymást. Mekkora a körük irható szabályos tetraéder térfogata?
977. Négy egyenlő r sugarú gömb páronként érinti egymást. Mekkora a közéjük irható szabályos tetraéder térfogata?
978. Adott egy négyzetalapú ferdehasáb négyzetalapjának 4 cm-es éle és oldalélének 10 cm hosszúsága. Az oldalél a négyzet síkjával 60° -os szöget zár be.
- Határozza meg a hasáb térfogatát!
 - Mekkora a hasáb felszínének szélsőértéke?
979. Egy tetraédert úgy készítünk el, hogy a 12 cm, 14 cm, 16 cm oldalú háromszöglapot a középvonalai mentén meghajtsuk.
- Bizonyítsa be, hogy a tetraéder minden oldala egybevágó háromszög!
 - Mekkora a tetraéder felszíne?
 - Hány fokos szöget zárnak be egymással a kitérő oldalélek?

980. Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Kössük össze a háromszög csúcsaival, és jelöljük a kapott háromszög súlypontját S_1 -gyel, S_2 -vel, S_3 -mal!
- Mennyi az ABC háromszög területe, ha $T_{S_1 S_2 S_3} = 1$?
 - Mekkora az ABC -vel és $S_1 S_2 S_3$ -mal egybevágó négy-négy háromszögből készített két tetraéder felszínének és térfogatának aránya?
 - Mi a feltétele a tetraéder létezésének?
981. Egy szabályos háromszög alakú síklap tömegközéppontja a háromszög súlypontja, ami a magasság egyharmadánál van. A tetraéder súlypontja a magassága egygyedénél van.
A háromszöget a magassága körül megforgatva egy forgáskúpot kapunk. Ennek a magasságának hányadrészében lesz a súlypontja?
982. Az $ABCD$ tetraéder D -ben összefutó élei páronként merőlegesek egymásra, s az általuk alkotott három háromszög területe T_1 , T_2 és T_3 . Mekkora a tetraéder felszíne és térfogata?
983. Szabályos tetraéder oldallapjaihoz tartozó testmagasságok felezőpontjain át fektessünk az oldallapokkal párhuzamos síkokat!
- Milyen testek keletkeznek?
 - Mekkora a keletkező testek és az eredeti tetraéder térfogatának aránya?
 - Ha a keletkezett egybevágó testeken is végrehajtjuk a síkokkal való vágást, mekkora a levágott testek és az eredeti tetraéder oldaléleinek aránya?
 - Ha a műveletet még háromszor elvégezzük, akkor hány darab testünk lesz?
 - Az eredeti tetraéder piros volt. A keletkezett testek be nem festett oldalait is szeretnénk pirosra festeni. Ehhez hányszor annyi festékre lesz szükség, mint amennyit az eredeti tetraéder felszínének befestésére használtunk fel?
984. Lehet-e akkora lyukat vágni egy tömör fakockába, hogy azon áttolható legyen egy valamivel nagyobb kocka?
985. A sík a és b egyenese 30° -os szöget zár be egymással, metszéspontjuk az O pont. Jelentse f függvény a sík pontjainak halmazán értelmezett a -ra való tükrözést, g pedig a b egyenesre való tükrözést.
- Milyen geometriai transzformáció az $f \circ g$ függvény?
 - Milyen geometriai transzformáció a $g \circ f$ függvény?
 - Milyen kapcsolat van $f \circ g$ és $g \circ f$ között?
986. Az f függvény értelmezési tartománya és képhalmaza is legyen a sík pontjainak halmaza, hozzárendelési szabálya pedig a következő.
Adott a síkon a t egyenes, amelynek pontjait az f transzformáció helyben hagyja. Tetszőleges, t -re nem illeszkedő P pont képe a t -re merőleges, P -re illeszkedő egyenes azon P' pontja, amelynek távolsága a t tengelytől éppen a P pont t tengelytől mért távolságának a reciproka, a P és P' pontokat a t tengely elválasztja.

a) Vegyen fel egy t tengelyt a papírlap síkjában, válasszon egy távolságegységet, és rajzolja meg egy háromszög képét!

b) Melyek az f transzformáció fixpontjai és fixegyenesei, illetve invariáns egyenesei?

(Vannak-e olyan pontok, amelyeket a transzformáció helyben hagy, olyan egyenesek, amelyeknek pontjait a transzformáció helyben hagyja, illetve olyan egyenesek, amelyeknek a pontjai ugyan nem fixpontok, de az egyenes képe önmaga?)

c) Vajon megváltoztatja vagy megtartja ez a transzformáció a körüljárás irányát?

987. Adott a síkon az egymással párhuzamos, egymástól 4 cm távolságban húzódó a és b egyenes. Jelentse f a sík pontjainak halmazán értelmezett azon függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya az a egyenesre való tükrözés, g függvény pedig legyen a sík pontjain értelmezett b egyenesre vonatkozó tükrözés.

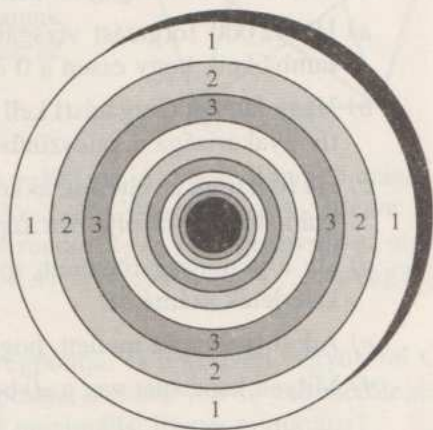
a) Milyen transzformáció az $f \circ g$ függvény?

b) Mi az $f \circ g$ függvény inverze?

988. Laci és Joli rendszeresen ugyanabba a gyorsétterembe jár ebédelni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy hétfőn találkozzanak, ha mindketten 12 és 13 óra között érnek az étterembe, és aki előbb érkezik, az 20 perc alatt megebédel, majd azonnal távozik?

989. A céllövöldében olyan táblára lövünk, amelyen a külső kör sugara 10 cm, a következő ennek 80%-a, majd az ezt követők sugara szintén 80%-a az öt megelőzőnek. A pontok értékei egytől kezdődően számtani sorozatot alkotva egyesével nőnek. Összesen 10 kör van a céltáblán (a tábla szélét beleértve).

A véletlenszerű lövéseknek mekkora a várható értéke, ha azok a céltáblát biztosan eltalálják?



990. Eszter és Anna kockázik. A játék során arra törekszenek, hogy minél nagyobb értéket dobjanak. A szabály szerint, ha a játékos:

– egyest dob, nem kap pontot, a másik játékos jön.

– egyestől különbözőt dob, választhat, hogy megálljon, és akkor a másik játékos következik, vagy pedig folytatja még egy dobással.

Ha valaki nem egyes dobás miatt hagyta abba a dobást, akkor a dobott pontokat össze kell adni, s az előző sorozathoz az összeget kell felírni.

(Például a dobások: 2, 5, 6, 4, 4, 1. Ekkor nem jár pont. Ha a dobások: 2, 5, 6, 4, 4 és megáll a játékos, akkor $2 + 5 + 6 + 4 + 4 = 21$ pontot kap.) Meddig szabad elmenni a dobásokban? (Mennyi összpontszámnál kell megállni?)

991. Egy nyolcszáz oldalas szótárban szeretnénk megbecsülni a szavak számát. Ehhez megszámloljuk öt tetszőlegesen kiválasztott oldalon a számukat: 29, 33, 33, 36, 31.

- Átlagosan hány szó lehet az oldalakon?
- Hány szavas lehet a szótár?
- Hány szavas lehet a szótár, ha figyelembe vesszük, hogy harminc olyan oldal van, ahol csak 1 és 10 közötti szó található (a szótárban ugyanis az új kezdőbetűvel új oldalt nyitnak)?
- Adja meg 95%-os pontossággal, hogy mennyi szó van a szótárban!
- A következő állítások közül melyiket fogadná el?
 - A szótárban 30 000 szó van.
 - Van olyan oldal, amelyen 60 szó található.
 - Nincs olyan oldal a szótárban, amelyen pontosan 32 szó van.

992. A nagy számok törvényének egyik alakja a következő egyenlőtlenség.

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \delta\right) > 1 - \frac{1}{4n\delta^2}$$

Egy kaszinóban a rulettasztalt ellenőrzik. A lehetséges 37 számból (0-tól 36-ig) a 0 előfordulásait vizsgálják, mert ilyenkor minden feltett pénz a kaszinóé.

- Ha 12 000 forgatást vizsgálnak, akkor 0,999 biztonsággal mekkora intervallumba kell, hogy essen a 0 előfordulásainak száma?
- Hány játékot (forgatást) kell ellenőrizni ahhoz, hogy 0,99 biztonsággal a 0 relatív gyakorisága a valószínűség közelébe 0,01 pontossággal essen?
- Ha rögzítjük az eltérést, akkor hogyan függ a biztonság (rizikó) a vizsgált esetek számától? Ábrázolja is a kapcsolatot!
- Ha a biztonság rögzített, mondjuk 0,95, akkor hogyan függ az eltérés (δ) a kísérletek számától?
- Adott biztonság mellett, hogyan függ a kísérletek száma (n) az eltéréstől (δ)?
- Milyen kapcsolat van a d)-ben és az e)-ben megadott függvények között?

993. Egy szabályosnak tekintett pénzérmével dobásokat végzünk. Mi a valószínűbb, hogy 1000 dobás esetén a relatív gyakoriság legfeljebb 0,05-dal tér el a valószínűségtől, vagy az, hogy 10 000 dobás esetén 0,005-dal tér el a relatív gyakoriság a valószínűségtől?

994. Egy kisvárosi kórházban az elmúlt negyedévben összesen 380 újszülött jött a világra. Ugyanezen idő alatt egy megyeszékhelyen 1872 gyermek született. Tegyük fel, hogy a fiúszületés esélye $\frac{1}{2}$.

Melyik a valószínűbb, hogy a kisvárosi kórházban a megszületett fiúk száma 180 és 200 közé esett, vagy az, hogy a megyeszékhelyen 886 és 986 között volt az újszülött fiúk száma?

995. Amikor Évi délután a fodrásznál karórájára néz, az pontosan 2 órát mutat. A tükörben maga előtt a falióra képét látja, amely 6 óra 40 percet mutat. Mint azt a fodrásztól megtudta, a falióra elromlott, s már napok óta áll. Amikor a fodrász elkészül Évi frizurájával, a lány azt látja, hogy a karóján és a falióra tükörképén a mutatók pontosan egyforma helyzetben vannak.

a) Mennyi ekkor a pontos idő?

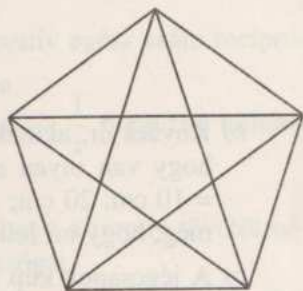
b) Ha a falióra csak hibás beállítás miatt mutatott volna rossz időt, de járt volna, akkor mennyi idő múlva kerültek volna a karóján és a falióra tükörképén a mutatók pontosan egyforma helyzetbe?



996. A szabályos ötszög átlóit megrajzolva belül egy ötszög keletkezik.

a) Mutassa meg, hogy ez az ötszög is szabályos!

b) Ha az eljárást elvileg végtelen sokszor megismételjük, és a kapott ötszögek oldalainak hosszát összeadjuk, akkor mekkora lesz ez az összeg?

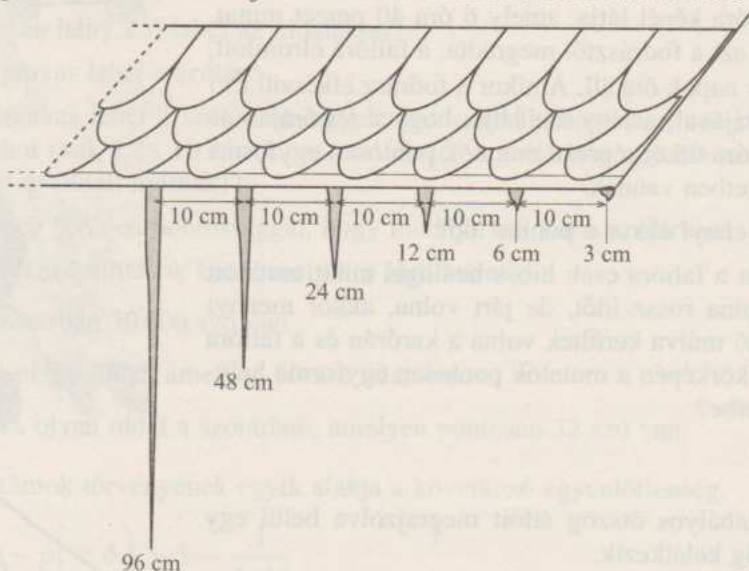


997. Az ABC háromszögben $a = 12$, $b = 6\sqrt{3}$ és $\gamma = 30^\circ$. Az A csúsból induló magasság talppontja A_1 , a B csúsból indulóé B_1 . Az A_1B_1C háromszög A_1 , illetve B_1 csúsból induló magasságvonalaának talppontja rendre A_2 és B_2 . Folytassuk az eljárást vég nélkül. Mekkora lesz az $AB + A_1B_1 + A_2B_2 + \dots + A_nB_n + \dots$ összeg?

998. Legyen A és B egy félkör átmérőjének két végpontja, és a köríven vegyük fel C és D pontokat. Legyen P a CD tetszőleges pontja, s ennek AB -re eső merőleges vetülete Q . Mikor lesz $QA \cdot QB - PC \cdot PD$ maximális, illetve minimális?

999. Tekintsük azokat a téglatesteket, amelyek felszíne és térfogata mérőszámának aránya öt. Van-e ezek között a téglatestek között minimális felszínű, és ha igen, melyik az?

1000. a) Jelöljük x -szel a jégcsapoknak a ház sarkától mért távolságát, y -nal pedig a jégcsapok hosszát! Ábrázolja koordináta-rendszerben az összetartozó értékeket!



- b) Kovács úr, akinek a hobbija a matematika, a jégcsapokat figyelve arra jött rá, hogy van olyan exponenciális függvény, aminek a helyettesítési értékei $x = 10$ cm; 20 cm; $\dots$; 50 cm esetén éppen a jégcsapok hosszát adja meg. Adja meg, hogy mi lehet ennek a függvénynek a hozzárendelési utasítása!
- c) A jégcsapok kúp alakúak, az alapkörök sugarai számtani sorozatot alkotnak, a legkisebb jégcsap sugara $0,25$ cm, a legnagyobbé $8,25$ cm.

Ha letörnénk a jégcsapokat, és egy vödörben megolvasztanánk, milyen magasan állna benne a víz? A vödör henger alakú, átmérője 40 cm.

1001. Az x , y , z valós számokról tudjuk, hogy $\log_y x$, $\log_z y$, és $\log_x z$ egy mértani sorozat három egymást követő eleme. Az x , y , z kielégíti a következő két egyenletet is.

$$2x^4 = y^4 + z^4$$

$$xyz = 8$$

Mennyi $x + y + z$ értéke?

1002. Oldja meg a következő egyenletet!

$$\log_{x+2002}(3x+40) \cdot \log_x \sqrt{x+2002} = (\lg^2 x + 1) \cdot \cos^2 x$$

1003. A következőkben az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ sorozatot vizsgáljuk.

- a) Bizonyítsa be, hogy az a_n sorozat monoton nő és felülről korlátos!
- b) Mit jelent az a)-ban bebizonyított két tény a sorozat határértéke szempontjából?
- c) Vajon mihez tart a sorozat?

Útmutatás: vizsgálja az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvénygörbe alatti terület és a fenti sorozat összege közötti kapcsolatot, valamint használja fel azt, hogy a fenti függvénynek egy lehetséges primitív függvénye az $x \mapsto \ln x$ függvény!

1004. Legyen adva az x_n sorozat a következő rekurzív formulával: $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, ha $n > 1$ és $x_1 = c$.

- Milyen c értékek esetén lesz x_3 nagyobb 0-nál?
- Bizonyítsa be, hogy ha $c > 1$, akkor x_n monoton sorozat!
- Lehet-e periodikus az x_n sorozat? Milyen c esetén?
- Keresse meg mindazokat a nem konstans számtani sorozatokat, amelyek első n tagjának összege éppen x_n !
- Mutassa meg, hogy ha $c = \frac{p}{q}$, ahol p és q is nagyobb mint 2, valamint p és q relatív prímek, akkor nem lehet periodikus a sorozat!

1005. Adjon meg egy olyan alsó és felső becslést az első n pozitív egész szám reciprokanak összegére, amelyek eltérése kisebb, mint 1!

Használja fel, hogy az $x \mapsto \ln x$ függvény deriváltja az $x \mapsto \frac{1}{x}$ függvény minden pozitív x -re!

1006. Valaki egy torony magasságát szeretné megmérni úgy, hogy a torony tövétől néhány méterrel odébb megy, s aztán leméri a torony látószögét.

- Milyen magas a torony, ha a torony tövétől 22 méter távolságban 45° -ot mér?
- Ha a szöget csak félfokos pontossággal tudta mérni, akkor milyen tartományba esik a torony magassága? (Tegyük fel, hogy a távolságmérés nagyon pontos!)
- Ha az előző esetben a szögmérés relatív hibája $\frac{0,5}{45} = 0,011\ 10$, azaz 1,1%-os, hány százalékos a magasságmérés hibája?
- Ha a szögmérést nem tudjuk pontosabbá tenni, akkor mikor pontosabb (kisebb hibájú) a toronymagasság-meghatározásunk: ha közelebb megyünk a torony lábához vagy ha inkább távolodunk tőle, és úgy mérjük le a szöget?

1007. a) Igazolja, hogy $(\sqrt{2} - 1)^6 = \frac{5\sqrt{2} - 7}{(\sqrt{2} + 1)^3}$!

- Számológéppel számolva egyenlő-e a két kifejezés?
- Mit gondol, a két kifejezés közül melyik van közelebb a „pontos értékhez”?

1008. Határozza meg a $K(-2; 1)$ középpontú öt egység sugarú kör és az $F\left(1; -\frac{11}{4}\right)$ fókuszú, $y = -\frac{13}{4}$ vezéregyenesű parabola metszéspontjait!

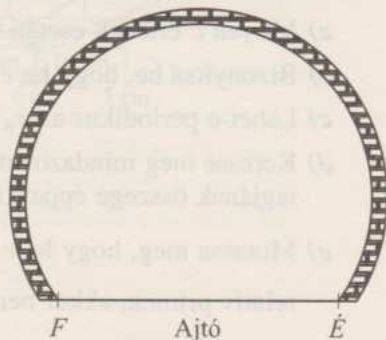
1009. Egy O középpontú körnek két sugara OA és OB . Az AB húr a kört két részre osztja, amelyek területaránya $3 : 1$ -hez.

a) Ha az AOB szög radiánban θ , akkor mi mondható ebben a $\theta - \sin \theta$ különbség értékéről?

b) Hogyan változik a $\theta - \sin \theta$ különbség a θ függvényében? Vázolja grafikonon!

1010. A múzeum körszelet alapterületű termében biztonsági rendszerként egy infravörös fényforrás működik. Az infravörös fénysugár vízszintesen az ajtó egyik sarkától (F), a falról visszaverődve jut el az ajtó másik sarkánál levő érzékelőig (E).

Hova tegyék a tükröt, hogy a fény a lehető leghosszabb utat tegye meg?



TARTALOMJEGYZÉK

1. Halmazok, logika, kombinatorika, gráfok	5
2. Algebra, számelmélet	17
3. Függvények, analízis	33
4. Geometria, koordináta-geometria, trigonometria	52
5. Statisztika és valószínűségyszámítás	70
6. Összetett feladatok	111
7. A követelményeken túlmutató feladatok	176

Kiadja a Műszaki Könyvkiadó Kft.
Felelős kiadó: Bérczi Sándor ügyvezető igazgató
Felelős szerkesztő: Bognár Edit
Műszaki vezető: Orgován Katalin
Műszaki szerkesztő: Trencsényi Ágnes
Terjedelem: 17,88 (A5) iv
E-mail: vevoszolg@muszakikiado.hu
Honlap: www.muszakikiado.hu
Nyomta és kötötte Oláh Nyomdaipari Kft.
Felelős vezető: Lajkó István ügyvezető igazgató

KÉSZÜLJÜNK AZ ÉRETTSÉGRE MATEMATIKÁBÓL EMELT SZINTEN

FELADATGYŰJTEMÉNY

Az első lépés a sikeres felvételihez a megfelelő segédkönyvek megválasztása.

A kétszintű érettségi első éve bebizonyította, hogy az új érettségi rendszerében elsősorban az emelt szinten megszerezhető többletpontok döntenek a sikeres felvételiéről. Bebizonyosodott, hogy abban az esetben is szükség van az így megszerzhető többletpontokra, ha a felsőoktatási intézmény ezt kötelezően nem írja elő.

Ez a három könyv a szakmailag legteljesebb és legnagyobb példányszámban vásárolt felkészítő segédkönyvsorozat matematikából. Ezekből a könyvekből eredményesen lehet felkészülni az érettségre, legyen az akár az írásbeli vagy a szóbeli, közép- vagy emelt szint. Erre garancia, hogy a könyvek szerzői részt vettek a kétszintű érettségi kidolgozásában és többen közülük az érettségi feladatlapok összeállításában is közreműködtek.

ISBN 963 16278 8 8



9 789631 162788



Műszaki Kiadó

Wolters Kluwer csoport

1033 Budapest, Szentendrei út 89 – 93.

Telefon: 437-2405, fax: 437-2404

E-mail: vevoszol@muszakikiado.hu

Honlap: www.muszakikiado.hu

MK-2788-8