

Kropog László – Sánta József

Matematika

Feladatgyűjtemény

Emelt szint

$$\binom{2^{(2^2+2)}}{2} + 2^2 = 2020$$

Tartalomjegyzék

1. Előszó.....	4
2. Halmazok	5
2.1. Halmazműveletek, részhalmazok	5
2.2. Halmazok számossága, logikai-szita	8
2.3. Vegyes feladatok	10
3. Logika	13
3.1. Szöveges feladatok	13
3.2. Igaz-Hamis.	17
3.3. Állítások megfordítása, illetve állítások tagadása	21
3.4. Logikai műveletek.....	22
3.5. Vegyes feladatok	24
4. Statisztika	29
4.1. Statisztikai jellemzők.....	29
4.2. Diagrammok.....	32
5. Számelmélet	36
5.1. Oszthatóság	36
5.2. Prímszámok, összetett számok	41
5.3. Vegyes feladatok	48
6. Algebra.....	52
6.1. Hatványozás, nevezetes azonosságok	52
6.2. Szorzattá alakítás.....	54
6.3. Polinomok	56
6.4. Gyökvonás.....	58
6.5. Logaritmus azonosságok	62
6.6. Vegyes feladatok	65
7. Első-és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek.....	68
7.1. Elsőfokú egyenletek	68
7.2. Másodfokú egyenletek	70
7.3. Paraméteres egyenletek	73
7.7. Egyenletrendszerek	88
7.8. Szöveges feladatok.....	93
7.9. Vegyes feladatok	95
8. Exponenciális és logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	103
8.1. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek	103

8.2. Logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek.....	106
8.3. Egyenletrendszerek	110
9. Függvények	117
9.1. Elemi függvények.....	117
9.2. Irracionális és magasabb fokú függvények	121
9.3. Exponenciális és logaritmus függvények	123
9.5 . Összetett és inverz függvények	130
9.6. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása	131
9.8. Függvények határértéke	139
9.10. Vegyes feladatok	145
10. Koordináta geometria.....	150
10.1. Vektorok, osztópontok	150
10.2. Egyenesek.....	153
10.3. Körök.....	155
10.4. Parabolák	157
10.5. Tartományok	158
11. Trigonometria.....	160
11.1. Szögfüggvények derékszögű háromszögben, szinusz-és koszinusz tétel.....	160
11.2. Addíciós-tételek alkalmazása	162
11.3 Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek	165
11.4 Vegyes feladatok	176
12. Síkgeometria	181
12.1. Háromszögek.....	181
12.2. Négyszögek	183
12.3. Sokszögek.....	184
12.4. Körös feladatok	185
12.5. Hasonlóság	187
12.6. Vegyes feladatok	189
13. Térgeometria	191
13.1. Hasábok, hengerek	191
13.2. Gúlák, kúpok	193
13.3. Csonkagúla, csonkakúp	195
13.4. Egymásba írt testek, gömbök.....	196
14. Sorozatok.....	198
14.1. Számsorozatok, rekurzív sorozatok.....	198
14.2. Számtani és mértani sorozatok	199

14.3. Kamatos kamat, hiteltörlesztés, járadékszámítás.....	203
14.4. Vegyes feladatok	206
15.Kombinatorika.....	210
15.1. Permutációk, variációk	210
15.2. Kombinációk	213
15.3. Binomiális-tétel, Pascal-háromszög	216
15.4. Skatulya-elv	216
15.5. Gráfok.....	217
15.6. Vegyes feladatok	219
16.Valószínűség számítás.....	222
16.1. Klasszikus modell.....	222
16.2. Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül	224
16.3. Geometriai valószínűség.....	226
16.4. Feltételes valószínűség	229
16.5. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték	230
16.6. Vegyes feladatok	231
17.Analízis	232
17.1. Sorozatok tulajdonságai, mértani sor.....	232
17.2. Függvények határértéke.....	236
17.3. Függvények deriválása, a derivált függvény alkalmazásai.....	237
17.4. Integrálás, és alkalmazásai	240
18.Bizonyítási módszerek	243
18.1. Direkt bizonyítás	243
18.2. Indirekt bizonyítás	245
18.3. Teljes indukciós bizonyítás	246

1. Előszó

Tisztelt olvasó! Ezt a feladatgyűjteményt a gimnáziumok matematika fakultáción tanuló diákok számára készítettük. A teljes tananyagot feldolgoztuk a 18 fejezetben. A könyv összesen 2053 feladatot tartalmaz 254 oldalon. Mivel sok feladat 2-5 részből áll, így több mint 4000 feladvánnyal lehet számolni. Minden feladathoz adunk megoldást, illetve végeredményt. Ez a rész 601 oldalt tartalmaz. Igyekeztünk a legegyszerűbb és a legrövidebb megoldást adni minden esetben.

Mindenkinek sikeres felkészülést kívánunk az emelt szintű érettségire!

Nyíregyháza 2020. 07.10.

Kropog László és Sánta József

2. Halmazok

2.1. Halmazműveletek, részhalmazok

2.1.1. Hány elemű az a halmaz, amelynek 1023 valódi részhalmaza van?

2.1.2. Legyen $H = \{12 \text{ pozitív osztói}\}$. Hány részhalmaza van H-nak?

2.1.3. Adjuk meg a következő halmazok összes részhalmazát!

a) $[-4, 4[\cap \overline{\mathbb{Z}}$ (Az alaphalmaz az egész számok halmaza)

b) $(\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}\} \setminus \mathbb{Q}^*) \cup \{\pi\}$

2.1.4. Adjuk meg a számhalmazok közötti következő műveletek eredményét! Alaphalmaz a valós számok halmaza.

a) $\overline{(N \cup Z) \cap Q^*}$

b) $\overline{(Q \setminus Z) \cup (Q^* \cup \overline{N})} \cap (Z \cap Q^*)$

2.1.5. Adjuk meg a számhalmazok közötti következő műveletek eredményét! Alaphalmaz a valós számok halmaza.

a) $(R \setminus Q^*) \cap (\overline{Z \setminus Q})$

b) $[Q \cup (N \cup \overline{R})] \cap [(Z \cup N) \setminus Q^*]$

2.1.6. Legyenek adottak a $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$ halmaz következő részhalmazai: $A = \{a, c, d, e, g, h, l\}$, $B = \{b, c, d, f, g, i, k\}$, $C = \{c, e, f, i, j, k, l\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat!

a) $\overline{(A \setminus B) \cap (C \cup B)}$

b) $(A \cup C) \setminus [(A \cup \overline{B}) \setminus (B \cap \overline{C})]$

2.1.7. Legyenek adottak a $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ halmaz következő részhalmazai: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$. Határozzuk meg a következő halmazokat!

a) $\overline{(A \cup B) \setminus (C \cup B)}$

b) $\overline{(B \cap C) \setminus [(A \cup \overline{C}) \cap (B \cup \overline{C})]}$

2.1.8. Legyen adott a $H=[-8,8]$ alaphalmaz, részhalmazai: $A=[-6,3[$, $B=]-2,4[$, $C=[1,8]$. Határozzuk meg a következő halmazokat!

a) $\overline{A \cap B \cap C}$

b) $(\overline{B \cap C}) \setminus (\overline{A \cup C})$

2.1.9. Legyen adott a $H=]-10,10]$ alaphalmaz, részhalmazai: $A=[-8,-1]$, $B=]-5,3[$, $C=[1,8[$. Határozzuk meg a következő halmazokat!

a) $\overline{A \cup B} \setminus (\overline{A \cap B}) \cup C$

b) $\overline{\overline{A \cup B}} \setminus \overline{A \cup B \cup C}$

2.1.10. Legyenek adottak a következő halmazok. $D=\{\text{egyjegyű prímszámok halmaza}\}$, $E=\{\text{egyjegyű pozitív páros számok halmaza}\}$, $F=\{\text{a hat két legnagyobb osztója}\}$. $G=\{\text{egyjegyű páratlan számok halmaza}\}$, $H=\{\text{a } 225 \text{ prímtényezősz felbontásában szereplő príme}\}$, $I=\{\text{egyjegyű pozitív páros számok halmaza}\}$. $J=\{\text{legnagyobb egyjegyű négyzetszám}\}$. $K=\{\text{legkisebb egyjegyű négyzetszám}\}$. $A=[D \cup E \cup J] \setminus F$. $B=G \setminus H$. $C=[I \cup \{3,7\}] \setminus K$. Az alaphalmaz $H = A \cup B \cup C$.

a) Állapítsuk meg az A,B,C halmaz elemeit!

b) Határozzuk meg $B \setminus (A \cup C)$, $(\overline{A \cap B}) \cup (\overline{A \cap C}) \cup (B \cap C)$ halmazokat!

2.1.11. Adottak a következő intervallumok! $A=]-1,3[$, $B=]2,4]$, $C=[1,3]$, $D=[0,2[$. Adjuk meg a következő műveletek eredményét! $A \cap C$, $A \setminus C$, $B \cap C$, $C \cup D$. Van-e olyan közöttük, amelyik részhalmaza egy másiknak? Vannak-e közöttük diszjunktak?

2.1.12. Az A halmaz jelölje a $3x + 9 > 0$ megoldását, a B halmaz pedig a $2x - 6 \leq -2$ a valós számok halmazán. Adjuk meg azt az intervallumot, ahol mindkét egyenlőtlenség teljesül, csak az egyik teljesül, valamelyik teljesül?

2.1.13. Hány elemű a P,Q és az R halmaz, illetve a P,Q,R halmazok közös része, ha a következőket tudjuk:

(i) $|P \cap Q \cap R| = |P \cap R| = 5$

(ii) $|Q| = |P| + 5$

(iii) $|R| = 12$

(iv) $2 \cdot |(P \cap Q) \setminus (Q \cap R)| = |P \setminus (Q \cup R)|$

(v) $2 \cdot |P \setminus Q| = |Q \setminus P|$

(vi) $|Q \cap R| = 8$

2.1.14. $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A \setminus B = \{2,4,6,8,10\}$, $A \setminus C = \{1,3,5,7,9\}$, Mivel egyenlő a $B \cap C$ illetve $B \cup C$?

2.1.15. A $H = \{1,2,3,4,5,6\}$ halmaz A, B, C részhalmazairól a következőket tudjuk: $A \cap B = \{5\}$, $A \setminus C = \{3,4,5\}$, $C \setminus B = \{1,2\}$, $C \cap (A \cup B) = \{2,6\}$. Határozzuk meg az A, B, C halmazokat!

2.1.16. Határozzuk meg az A, B, C halmazokat! $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, $A \setminus C = \{2,7\}$, $A \cap B = \{2,11\}$, $(C \cap B) \setminus A = \{3,4\}$, $(C \cup B) \setminus A = \{1,3,4,5,6,8\}$. Azt is tudjuk, hogy a B halmaznak csak két páratlan eleme van!

2.1.17. Határozzuk meg az A, B, C halmazokat! $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A \setminus B = \{8,9,10\}$, $A \cup B = \{1,2,3,6,7,8,9,10\}$. $A \cap B = \{1,2,3\}$, $A \cap B \cap C = \{1,3\}$, $A \cap C = \{1,3,8\}$, $B \setminus C = \{2,7\}$.

2.1.18. Legyen az $A \cup B \cup C = \{1,2,3,5,7,8,9,10\}$, $[(A \cup B) \cap C] \setminus (A \cap B \cap C) = \{2,7\}$. Tudjuk továbbá, hogy $B \setminus C = \{1,5\}$ és $A \cap B \cap C = A \cap B = \{10\}$.

a) Határozzuk meg a B halmazt!

b) A és C halmazra is írjuk fel az összes lehetséges megoldást!

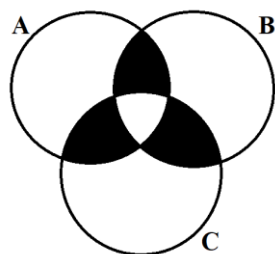
2.1.19. Határozzuk meg az A, B, C halmazokat! $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $B \setminus A = \{3,9\}$. $A \cap B = \{1,2,5,6,7\}$, $B \cap C = \{3,5,6,7\}$, $A \cap B \cap C = \{5,6,7\}$. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A \cap C = \{5,6,7,8\}$.

2.1.20. Határozzuk meg az A, B halmazokat! $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B \not\subset \{3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,4\}$, $|A| = |B|$.

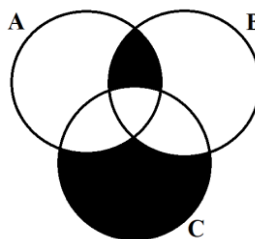
2.1.21. Határozzuk meg az A, B, C halmazokat! $A \setminus B = \{4,6,8\}$, $B \setminus C = \{2,5,9,10\}$, $C \setminus A = \{3,7,11\}$. $A \cap B \cap C = \{1\}$, $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, $A \cup C = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11\}$, és $|C| = 5$.

2.1.22. Határozzuk meg, hogy milyen halmazműveletek eredménye a besatírozott rész?

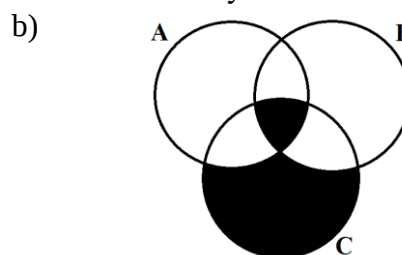
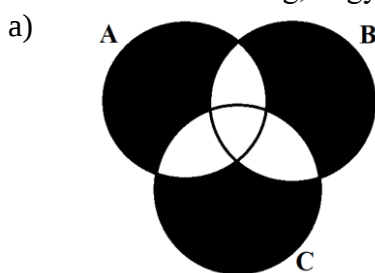
a)



b)



2.1.23. Határozzuk meg, hogy milyen halmazműveletek eredménye a besatírozott rész?



2.2. Halmazok számossága, logikai-szita

2.2.1. Egy 120 fős évfolyam 10%-a nem tagja sem matematika, sem számítástechnika szakkörnek. Matematika szakkörre kétszer annyian járnak, mint fizikára. Az utóbbi szakkörösök háromnegyed része mindkét szakkörre jár. Hány tagja van az egyes szakköröknek?

2.2.2. Egy taktikai értekezletre a fociedző meghívta a pályaedzőt és a kapusedzőt is. A résztvevő játékosok között volt négy kapus, 19-en játszottak már védőként, 22-en csatárt és 20-an középpályást. A taktikai repertoárt bővítette, hogy 10 fő már játszott hátvédet és középpályást is, 9 csatárt és hátvédet, 11-en csatárt és középpályást, és volt 4 igazi jolly joker, aki mindhárom poszton játszott már a mezőnyben. Hányan voltak az értekezleten?

2.2.3. Egy iskola egyik évfolyamán tavasszal 3 kirándulást szerveztek. Az első és második kiránduláson 23, az első és harmadik kiránduláson 22, a második és harmadik kiránduláson 24 tanuló vett részt. Mindhárom kirándulást 15 diák vette igénybe. Azon diákok közül, akik csak egy kirándulásra mentek, az elsőn háromszor annyian voltak, mint akik csak a másodikon, de 12-vel kevesebben, mint akik csak a harmadikon. Hány diák ment el az egyes kirándulásokra, ha nem volt olyan diák, aki egy kiránduláson sem vett részt, valamint az évfolyam létszáma 121 fő?

2.2.4. Egy osztályban 3 szakkör működik. Fizika és Kémia szakkörre 5-en, fizika és matematika szakkörre 4-en, matematika és kémia szakkörre 7-en járnak. Van 3 olyan tanuló, aki mindhárom szakkörre jár. Azon tanulók közül, akik csak 1 szakkörre járnak, a fizikások 1-el többen vannak, mint a csak kémiások, de feleannyian, mint a csak matekosok. Hány tanuló jár az egyes szakkörökre, ha az osztálylétszám 30, és 9 olyan tanuló van, aki egy szakkörre sem jár?

2.2.5. Egy részlegen dolgozók létszáma 30 fő. Az ebédet 3 kifőzdéből rendelik. Az „Itt eszel a legjobbat”-ból 14-en szoktak rendelni, a „Sose légy éhes”-ből 15-en, a „Pulykakakas”-ból pedig 5-en. Pontosan két konyhából 6-an szoktak rendelni. Hányan szoktak rendelni mindhárom kifőzdéből?

2.2.6. Egy utazási iroda 3 fővárosba (Bécs, Prága és Pozsony) szervez utakat. Az egyik hónapban 60 fő jelentkezett valamilyen útra. A jelentkezők 55%-a csak egy fővárost jelölte be úticélnak. Olyan nem volt, aki Prágára és Pozsonyra jelentkezett, de Bécsre nem. 15 fő jelölte meg Bécset és Pozsonyt, 21 fő Bécset és Pragát. Az egy útra jelentkezők közül Prágára pont feleannyian jelentkeztek, mint Bécsre. Csak Pozsonyra 3 fő jelentkezett. Hány fő jelölte meg az egyes városokat?

2.2.7. Péternek 30 kedvenc filmje van. Ezek közül 14-ben szerepelnek akcióhősök, 9-ben sportautók, 20-ban pedig meseszereplők. 5 filmben a meseszereplőknek sportautója van, háromban az akcióhősök sportautót használnak. Csak egy olyan film van, amiben az akcióhős meseszereplő sportautóval közlekedik. Hány olyan kedvenc filmje van Péternek, amiben meseszereplők vannak, de akcióhősök és sportautók nem? (Olyan kedvenc film, amiben se akcióhősök, se meseszereplők, se sportautók nincsenek, nincs.)

2.2.8. Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálat. Mind a 18 étterem nyújt legalább egyet az előző szolgáltatások közül. Ötben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálat. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem?

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt?

2.2.9. Egy brigád dolgozói az év folyamán három kiránduláson vettek részt. Az elsőt a brigád dolgozóinak 67.5%-a, a másodikon 70%, míg a harmadikon a 75%. Mindhárom kiránduláson 5 dolgozó vett részt, olyan, aki nem volt legalább két kiránduláson, nem volt. Hány dolgozója van a brigádnak? Hány dolgozó vett részt az egyes kirándulásokon?

2.2.10. Egy csoport tanulói az év folyamán három matematikaversenyen vettek részt. Az elsőt és a másodikon a tanulók 60%-a, a harmadikon 80%. Egy diák csak az első, három diák csak a harmadik versenyen vett részt. Olyan nem volt, aki csak a második versenyen vett volna részt. Mindhárom versenyen 4 diák vett részt, olyan tanuló nem volt, aki ne vett volna részt legalább egy versenyen. Hány diák van a csoportban? Hány olyan diák volt, aki részt vett az első vagy harmadik versenyen, de a másodikon nem?

2.2.11. Egy részleg dolgozói az év folyamán háromszor részesültek prémiumban. Nem volt olyan dolgozó, aki egyszer sem kapott volna prémiumot. 5 olyan dolgozó volt, aki az első és a második alkalommal kapott prémiumot. 4 olyan, aki a második és a harmadik, illetve három olyan, aki az első és a második alkalommal részesült ebben a juttatásban. Az első alkalommal prémiumban részesülők kétszer annyian voltak, mint a második alkalommal, de eggyel

kevesebben, mint a harmadik alkalommal. Hányan kaptak prémiumot mindhárom esetben, ha a részleg dolgozóinak létszáma 26?

2.2.12. Egy tánckör tagjai háromféle táncban szerepelnek. Minden tag, legalább egy táncban szerepel. Hat olyan tag van, aki tangózik és keringőzik. 5 olyan, keringőzik és palotást táncol, illetve négy olyan, aki tangózik és palotásban is részt vesz. A palotásban kétszer annyian vesznek részt mint a keringőben, és hárommal többen, mint a tangóban. Hányan táncolnak keringőt, tangót és palotást is, ha a tagok száma 35?

2.2.13. Egy 30 fős osztályban háromféle eszközön használják az internetet a tanulók. Minden tanuló legalább kétféle eszközön internetezik. A mobilt és laptopot használó tanulók száma megegyezik a tabletet használók számával. Mobilról 27-en neteznek. Laptopot és mobilt 15 – en használnak. Hányan használják mindhárom eszközt?

2.2.14. Egy 18 tagú brigád dolgozói háromféle kulturális tevékenységet folytatnak. Moziba (15 fő), színházba(8 fő) és koncertekre(7 fő) járnak, mindenki legfeljebb 2, és legalább 1 tevékenységet folytat a 18 tag közül. Olyan nincs, aki színházba és koncertre járna. Azok közül, akik csak egyik szórakozási tevékenységet folytatnak, a koncertre járók kétszer annyian vannak, mint a színházba járók. Hányan járnak moziba és színházba? Hányan járnak moziba és koncertre?

2.2.15. Egy kereskedelmi részleg dolgozói közül 22 fő rendelkezik egyetemi diplomával, 18 főiskolaival, és szintén 18 felsőfokú szakképesítéssel. Akiknek egyetemi diplomája van, azok között 8-nak nincs felsőfokú szakképesítése, és 7-nek nincs főiskolai diplomája. 12 olyan megkérdezett van, akinek főiskolai diploma és felsőfokú szakképesítés is van, és köztük 3 olyan van, akinek nincs egyetemi diplomája. Hányan rendelkeznek mindhárom képesítéssel, illetve hány főnek sincs egyik se, ha a részlegen 29-en dolgoznak?

2.3. Vegyes feladatok

2.3.1. Adjuk meg az összes olyan valós számok halmazán értelmezett harmadfokú egyenletet, melynek megoldáshalmaza megegyezik szintén a valós számok halmazán értelmezett $x^2=4x-3$ egyenlet megoldáshalmazával!

2.3.2. Adjuk meg az összes olyan valós számok halmazán értelmezett harmadfokú egyenletet, melynek megoldáshalmaza megegyezik szintén a valós számok halmazán értelmezett $x^2+5x=6$ egyenlet megoldáshalmazával!

2.3.3. Adott az $U = [0, 2\pi]$ alaphalmaz. Az A halmaz jelentse a $4^{\sin x} \geq 2^{\lg 10^{\sqrt{2}}}$ egyenlőtlenség valós megoldásait az U halmazon, a B halmaz jelentse a $4^{\cos x} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\lg 10}$ egyenlőtlenség valós megoldásait az U halmazon. Adjuk meg a következő műveletek eredményét: $A \cap B, A \setminus B, \overline{A \cup B}$!

2.3.4. Adott az $U = [0, \pi]$ alaphalmaz. Az A halmaz jelentse a $\lg \operatorname{tg} x \geq 0$ egyenlőtlenség valós megoldásait az U halmazon, a B halmaz jelentse a $\operatorname{ctg} x < \log_3 3^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ egyenlőtlenség valós megoldásait az U halmazon. Adjuk meg a következő műveletek eredményét: $A \cup B, \overline{B \setminus A}$!

2.3.5. Az A halmaz jelentse a $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 2\sqrt{2}$, a B halmaz pedig a $3 \cdot 9^{2-x} \leq \log_{x-3}(x-3)^{\sqrt{27}}$ egyenlőtlenség megoldását a valós számok halmazán. Adjuk meg a következő halmazműveletek eredményét! $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \overline{A}$

2.3.6. Az A halmaz jelentse a $\sqrt{x-2} \leq \sqrt{6-x}$, a B halmaz pedig a $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) \leq -3$ egyenlőtlenség megoldását a valós számok halmazán. Adjuk meg a $\overline{A^2}$ következő halmazműveletek eredményét! $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \overline{A}$

2.3.7. Az A halmaz jelentse a $\frac{2x-1}{x-2} \leq 1$, a B halmaz pedig a $|x-3| \leq 3x-1$ egyenlőtlenség megoldását a valós számok halmazán. Adjuk meg a következő halmazműveletek eredményét! $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, \overline{A}$

2.3.8. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, melyek (x, y) koordinátáira teljesül $|x| - |y| = 2$

2.3.9. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, melyek (x, y) koordinátáira teljesül $|x| - |y| \geq 4$

2.3.10. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, melyek (x, y) koordinátáira teljesül $|x| + |y| < 3$

2.3.11. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben azon pontok halmazát, melyek (x, y) koordinátáira teljesül $\|x\| - \|y\| = 2$

2.3.12. Legyen a H halmaz azon 8 jegyű számoknak a halmaza, amelyekben csak a 0,1,2 számok szerepelnek, de mindegyik legalább egyszer. Határozzuk meg az A halmaz számosságát!

3. Logika

3.1. Szöveges feladatok

3.1.1. Töltsük ki a következő lapot úgy, hogy igaz legyen az állítás.

Ezen a papírlapon az alábbi számjegyekből pontosan ennyi látható:

1-

2-

3-

4-

5-

6-

7-

8-

9-

0-

3.1.2. Egy papírlapon a következő öt állítás olvasható:

Ezen a lapon 1 állítás hamis.

Ezen a lapon 2 állítás hamis.

Ezen a lapon 3 állítás hamis.

Ezen a lapon 4 állítás hamis.

Ezen a lapon 5 állítás hamis.

Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

3.1.3. Egy papírlapon a következő öt állítás olvasható:

Ezen a lapon legfeljebb 1 állítás igaz.

Ezen a lapon legfeljebb 2 állítás igaz.

Ezen a lapon legfeljebb 3 állítás igaz.

Ezen a lapon legfeljebb 4 állítás igaz.

Ezen a lapon legfeljebb 5 állítás igaz.

Az állítások közül melyik igaz, melyik hamis?

3.1.4. A királyfi egy útelágazáshoz ér. Az egyik út a királynéhoz, a másik a sárkányhoz vezet. Az elágazásnál egy ikerpár ácsorog. Az egyikük mindig igazat mond, a másik mindig hazudik. Egy kérdést tehet fel a királyfi az egyik embernek. Mit kérdezzen, hogy oda találjon a királynéhoz, ha nem tudja melyik az igazmondó, illetve a hazudós?

3.1.5. Rendőrségi kihallgatáson van **A**, **B** és **C**.

A azt mondja: **B** hazudik.

B azt mondja: **C** hazudik.

C azt mondja: **A** és **B** is hazudik.

Ki mond igazat és ki hazudik?

3.1.6. Van három láda, amelyekben kettő golyó van (Fehér, Piros). Azt tudjuk, hogy egyikben sem olyan golyók vannak, amilyen rá van írva. A játékos belenyúlhat az egyik ládába, onnan egy golyót kivehet, és azt megnézi, hogy milyen színű. Ez alapján el kell döntenie, hogy melyik ládában milyen színű golyók vannak. El lehet ezt ilyen feltételek esetén dönteni?

$F - F$

$P - P$

$F - P$

3.1.7. Van 27 arany pénzérme, amelyek között van egy hamis. (Könnyebb, mint az igazi.) Egy kétkarú mérleggel szeretnénk megállapítani, hogy melyik a hamis. Legfeljebb mennyi mérésre van szükség, hogy egyértelműen el tudjuk dönteni melyik a hamis?

3.1.8. Egy fogadóba betér három vándor, hogy megaludjanak. Fejenként adnak 10 dollárt a szállásért. Később a fogadósnek eszébe jut, hogy csak 25 dollárba kerül a szállás. Az alkalmazottnak ad 5 dollárt, hogy adja vissza a vendégeknek. A fiú úgy dönt, hogy 2 dollárt eltesz a zsebébe és visszaad 1-1 dollárt a vendégeknek. Vagyis a vendégeknek 9 dollárba került a szállás. Kilenc szorozva hárommal, az huszonhét, a fiúnál van még kettő dollár. Ez összesen 29 dollár. Hova tűnt az 1 dollár?

3.1.9. Van két hordó. Az egyikben van 100 liter bor, a másikban 100 liter víz. A borból átöntünk 1 litert a vízbe, majd összekeverjük. Ezt követően ebből a keverékből 1 litert visszaöntünk a boros hordóba. Ekkor a borban van több víz, vagy a vízben van több bor?

3.1.10. Egy kollégiumban 20 lány lakik az alábbi elrendezésben:

2	3	2
3		3
2	3	2

A tanár minden este megszámolja, hogy minden folyosón 7 lány alszik-e.

1. Egyik délután 4 barátnő érkezik a kollégiumba, és szeretnének ott aludni. Lehetséges-e a 24 lányt úgy elszállásolni, hogy a tanár ne vegye észre őket?

2. Egy másik napon 4 kollégista lány megy vendégségbe és szeretnének ott aludni. Lehetséges-e a 16 lányt úgy elszállásolni, hogy a tanár ne vegye észre a hiányzást?

3.1.11. Öt különböző színű szomszédos házban öt különböző nemzetiségű ember lakik. Mindenkinek van egy kedvenc állata, egy dohányzási szokása és egy kedvenc itala.

1. Az angol piros házban lakik.
2. A spanyolnak kutyája van.
3. A fehér ház jobb oldalán álló zöld házban kávéat isznak.
4. A francia teát iszik.
5. A papagáj gazdája szivarozik.
6. A sárga ház lakója erős cigarettát szív.

7. A középső ház lakója tejet iszik.
8. A svéd balról az utolsó házban lakik.
9. A gyenge cigarettát szívó személy szomszédja majmot tart.
10. Az erős cigarettát szívó szomszédja macskát tart.
11. A pipás narancslevet iszik.
12. Az olasz nem dohányzik.
13. A svéd a kék ház mellett lakik.

Kié a zebra?

3.1.12. Létezik-e olyan tíz különböző számjegyből álló szám, amelynek kétszerese ugyancsak tíz különböző számjegyből áll?

3.1.13. Egy juhász megállapítja, hogy ha a juhainak számát a juhok számánál eggyel kevesebbel szorozza, akkor eredményül ugyanannyit kap, mintha a saját életkorát a juhok számánál kettővel kevesebbel szorozná és hozzáadna tizenötöt. Hány éves a juhász?

3.1.14. Létezik-e két olyan természetes szám, amelyek szorzatát megszorozva az összegükkel, az eredmény 29400?

3.1.15. Egy 8 literes edény tele van borral. Két egyenlő részre szeretnénk osztani, de csak egy 5 literes és egy 3 literes edényünk van. Egyik edény oldalán sincs mérőskála. Hogyan lehet elvégezni a kettéosztást, ha csak ezt a három edényt használhatjuk?

3.1.16. Hárman el akarnak osztani maguk között 21 hordót, amelyekben méz van. Ezek közül 7 tele van, 7 félig van, 7 pedig üres. Szét lehet-e osztani a hordókat úgy, hogy mindenkinek ugyanannyi hordó és ugyanannyi méz jusson? A hordók egyforma méretűek és a mézet nem lehet átönteni másik hordóba.

3.1.17. Hányféleképpen lehet egy 25 fabatka értékű árut kifizetni 2 és 3 fabatkás érmékkel?

3.1.18. Egy ember át akar vinni a folyón egy farkast, egy kecskét és egy káposztát. A csónakban az ember mellett csak a farkas vagy csak a kecske vagy csak a káposzta fér el. Az ember nélkül a farkas nem maradhat egy parton a kecskével, illetve a kecske nem maradhat a káposztával. Hogyan kell a szállítást megszervezni, hogy sikerüljön mind a hármat átvinni?

3.1.19. Három ember lovakat akart vásárolni egy ménesgazdától, aki a következőket mondta nekik: „Egyikötöknek eladom a fél ménest és még egy fél lovat, a következőnek a megmaradt lovak felét és még egy fél lovat, a harmadiknak pedig az eddig megmaradt lovak felét és még egy fél lovat. Így még nekem is marad öt lovam.” Melyik ember hány lovat vásárolt?

3.1.20. Megkérünk valakit, hogy gondoljon egy kétjegyű számra. Mondja el nekünk, hogy mennyi maradékot ad 3-mal, 5-tel és 7-tel osztva. Ekkor meg tudjuk mondani, hogy mi a gondolt szám. Hogyan találjuk ki a gondolt számot?

3.2. Igaz-Hamis.

3.2.1. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.		
2. Van olyan síkidom, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van.		
3. Minden rombusznak két szimmetriatengelye van.		
4. Van olyan konkáv négyszög, amelyik tengelyesen szimmetrikus.		
5. Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.		

3.2.2. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha egy sokszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.		
2. Ha egy sokszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.		
3. Van olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek szimmetria tengelye a négyszögnek pontosan egy csúcsán megy át.		
4. A szabályos sokszög bármely szimmetria tengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát.		

5. Minden szabályos sokszögnek van olyan átlója, amelynek egyenese szimmetria tengelye a sokszögnek.

3.2.3. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha egy négyszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor rombusz.		
2. Nincs olyan trapéz, amelyik középpontosan szimmetrikus.		
3. Van olyan deltoid, amelyik középpontosan szimmetrikus.		
4. Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus.		
5. A középpontosan szimmetrikus négyszögek mindegyike konvex.		

3.2.4. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan háromszög, amelyik forgás szimmetrikus.		
2. Ha egy síkidom forgás szimmetrikus, akkor végtelen sok olyan szög adható meg, amellyel az alakzat önmagába forgatható.		
3. Ha egy sokszög forgás szimmetrikus, akkor szabályos.		
4. Van olyan szabályos sokszög, amely 30° -os elforgatással önmagába vihető.		
5. Ha egy sokszög forgás szimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő		

3.2.5. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha az eltolásnak van fixpontja, akkor helybenhagyás.		
2. Az eltolásnak nincs invariáns egyenese.		

3. Van olyan háromszög, amelynek a helybenhagyástól különböző eltolással önmagába vihető át.

4. Van olyan alakzat, amelynek a helybenhagyástól különböző eltolással önmagába vihető át.

5. Két tengelyes tükrözés egymás utáni elvégzése egyetlen eltolással helyettesíthető.

3.2.6. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. A húrnégyszög átlója a négyszöget egy hegyesszögű és egy tompaszögű háromszögre bontja.		
2. Ha egy trapéz szárai egyenlő hosszúak, akkor húrtrapéz.		
3. A paralelogrammák közül csak a téglalap húrnégyszög.		
4. A rombuszok közül csak a négyzet húrnégyszög.		
5. A húrnégyszögben mindig van tompaszög.		

3.2.7. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha két egyenlő szárú háromszögben egy-egy szög megegyezik, akkor a két háromszög, hasonló.		
2. Ha két téglalapban az átlók ugyanakkora szöget zárnak be, akkor a téglalapok hasonlóak.		
3. Két rombusz hasonló, ha átlóik aránya megegyezik.		
4. Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik megegyeznek.		
5. Ha két szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, akkor a két sokszög hasonló.		

3.2.8. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Két szám legnagyobb közös osztója kisebb mindkét számnál.		
2. Két szám legkisebb közös többszöröse nem kisebb, mint a két szám legnagyobb közös osztója.		
3. Két szám legkisebb közös többszörösének osztója, a két szám legnagyobb közös osztója.		
4. Ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörösük a két szám szorzata.		
5. Két prímszám összege nem lehet prím.		

3.2.9. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfban 15 él van.		
2. Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.		
3. Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.		
4. Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a foksámok összege 11.		
5. Ha egy gráfban páratlan darab páratlan foksámú csúcs van, akkor az egyszeresen bejárható.		

3.2.10. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.		
2. Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.		

3. Ha egy gráf minden pontjának a fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.
4. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.
5. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.

3.3. Állítások megfordítása, illetve állítások tagadása

3.3.1. Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy az igaz-e.

1. Ha egy szám nullára végződik, akkor osztható öttel.
2. Ha egy háromszög minden szöge egyenlő, akkor minden oldala egyenlő.

3.3.2. Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy az igaz-e.

1. Ha egy négyszög téglalap, akkor minden szöge derékszög.
2. Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az téglalap.

3.3.3. Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy az igaz-e.

1. Ha egy háromszög derékszögű, akkor a két rövidebbik oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével.
2. Ha szombat van, akkor nem megyek iskolába.

3.3.4. Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy az igaz-e.

1. Ha két szám közül legalább az egyik nulla, akkor a két szám szorzata nulla.
2. Ha egy szám osztható négygyel, akkor osztható kettővel is.

3.3.5. Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy az igaz-e.

1. Két páratlan szám összege mindig páros.
2. Ha egy háromszög két szögének az összege 90° , akkor a háromszög derékszögű.

3.3.6. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását.

1. Nincs olyan szerelem, ami el nem múlik.

2. Minden lány szereti a csokoládét.

3.3.7. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását.

1. Van olyan fiú, aki nem szeret focizni.

2. Minden szám osztható önmagával.

3.3.8. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását.

1. Minden tehén tarka. 2. Van olyan prímszám, amelyik páros.

3.3.9. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását.

1. Minden asszony életében van egy pillanat, amikor azt teszi, amit nem szabad.

2. Minden férfi olyanokat mond, amit később megbán.

3.3.10. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását.

1. A 12. C osztályban angolt és németet tanuló diákok vannak.

2. Az ördög veri a feleségét vagy alszik.

3.4. Logikai műveletek

3.4.1. Írjunk a $(p \vee q) \wedge p$ logikai változókat jelölő betűk közé két olyan műveleti jelet, hogy az eredmény érték táblázata a következő legyen:

p	q	$(p \vee q) \wedge p$
i	i	i
i	h	i
h	i	h
h	h	h

3.4.2. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőség azonosság!

$$p \rightarrow q = \neg(p \wedge \neg q)$$

3.4.3. Igazoljuk érték táblázattal a de Morgan azonosságokat!

$$1. \neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$2. \neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

3.4.4. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőség azonosság!

$$\neg p \wedge \neg q = \neg(\neg p \rightarrow q)$$

3.4.5. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőség azonosság!

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) = p \leftrightarrow q$$

3.4.6. Bizonyítsuk be, hogy a következő egyenlőség azonosság!

$$p \wedge \neg q = \neg(p \rightarrow q)$$

3.4.7. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$p \wedge \neg q \wedge \neg r = h$$

3.4.8. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(\neg p \vee q) \wedge \neg r = i$$

3.4.9. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(p \wedge q) \rightarrow r = h$$

3.4.10. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg r = h$$

3.4.11. Legyen p, q logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q) = h$$

3.4.12. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge \neg r) = i$$

3.4.13. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$[(p \wedge i) \vee (\neg p \wedge h)] \leftrightarrow (q \wedge r) = h$$

3.4.14. A következő logikai egyenletek közül melyik azonosság?

1. $p \vee q = \neg p \wedge q$

2. $p \wedge i = p$

3. $p \vee q \vee i = i$

3.4.15. A következő logikai egyenletek közül melyik azonosság?

1. $p \wedge \neg q = \neg p \wedge q$

2. $\neg p \vee q = p \rightarrow q$

3. $\neg p \wedge q = p \leftrightarrow q$

3.4.16. A konjunkció, diszjunkció, implikáció és az ekvivalencia közül:

1. Melyik nem kommutatív?

2. Melyik nem asszociatív?

3.4.17. Fejezzük ki két logikai változó konjunkcióját a változókra alkalmazott negáció és diszjunkció segítségével.

3.4.18. Következik-e a $p \wedge q = i$ formulából, hogy $\neg p \vee q = i$?

3.4.19. Következik-e a $(p \rightarrow q) = h$ formulából, hogy $(p \wedge \neg q) = h$?

3.4.20. Mi mondható a $(p \rightarrow q) = (p \leftrightarrow q)$ esetén a $(q \rightarrow p)$ művelet eredményéről?

3.5. Vegyes feladatok

3.5.1. Van 81 arany pénzérme, amelyek között van egy hamis. (Könnyebb, mint az igazi.) Egy kétkarú mérleggel szeretnénk megállapítani, hogy melyik a hamis. Legfeljebb mennyi mérésre van szükség, hogy egyértelműen el tudjuk dönteni melyik a hamis?

3.5.2. Megszámozzuk a hét napjait, a hétfővel kezdve 1-től 7-ig. Megkérünk valakit, hogy gondoljon a hét valamelyik napjára, azután kétszerezze meg a gondolt nap sorszámát, majd ehhez adjon 5-öt, a kapott számot szorozza meg 5-tel, az ez után kapottat pedig 10-zel. Az eredményből meg lehet tudni, hogy a hét melyik napjára gondolt. Hogyan lehet kitalálni a gondolt számot?

3.5.3. Híres versenylovat akar venni egy ember. Sokallja az 1.000.000 Ft-os árat. Az eladó a következőt ajánlja neki: „A lovat ajándékba adom, csak a patkószeget kell kifizetni. Mindegyik patkóban 6 darab szeg van. Az első szegért 1 Ft-ot kérek, a másodikért 2 Ft-ot, a harmadikért 4 Ft-ot, és így tovább, minden szegért kétszer annyit, mint az előzőért.” Jobban jár ezzel az ajánlattal a vevő?

3.5.4. Egy embernek van három hordója: A, B, C . Az A hordó tele van borral, a B és C hordó üres. Ha az A hordóból áttöltünk a B hordóba úgy, hogy a B tele legyen, akkor az A hordó $\frac{2}{5}$ részéig marad bor. Ha az A hordóból a C hordót töltjük tele, akkor az A hordó $\frac{5}{9}$ részéig marad bor. Ahhoz viszont, hogy a B és a C hordót is tele töltsük, az A hordóban lévő mennyiséghez még 4 vödör borra van szükség. Hány vödör bor fér a hordókba?

3.5.5. Egy vödörben 5 liter víz van. Kiöntünk belőle 1 litert, és beleöntünk 1 liter gyümölcslét. Összekeverjük, kiöntünk belőle 1 litert, majd újra beleöntünk 1 liter gyümölcslét. Ezután megint összekeverjük, a keverékből kiöntünk 1 litert, és megint öntünk hozzá 1 liter gyümölcslét. Mennyi víz marad ezután a vödörben?

3.5.6. Egy hordóban 100 liter gyümölcslé van. Kiöntünk belőle 1 litert, és a helyébe öntünk 1 liter vizet. Jól összekeverjük, majd kiöntünk belőle 1 liter keveréket, és a helyébe öntünk 1 liter vizet. Ezt megint jól összekeverjük, megint kiöntünk 1 liter keveréket, és a helyébe öntünk 1 liter vizet, és így folytatjuk tovább. Elérhetjük-e azt, hogy végül 50 liter víz és 50 liter gyümölcslé legyen a hordóban?

3.5.7. Egy embernek négy hordója van: A, B, C, D . A C és a D hordó egyforma. Az A és a B hordó tele van borral. Ha az A -ból tele öntjük a C -t, akkor az A $\frac{1}{5}$ részéig marad bor. Ha a B -ből tele öntjük a D -t, akkor a B $\frac{1}{9}$ részéig marad bor. Ha a C és a D tele van borral, és ezekből akarjuk tele tölteni az A és a B hordót, akkor ehhez még 9 vödör bor szükséges. Hány vödör bor fér a hordókba?

3.5.8. A folyó partján áll három lovag. Mindegyikkel ott van a fegyverhordója is. Át akarnak kelni a túlsó partra, de csak olyan csónakjuk van, amelyikbe kettőnél több ember nem fér el. Egyik fegyverhordozó sem lehet más lovag társaságában olyankor, amikor a saját lovagja nincs ott. Át tudnak-e kelni a túlsó partra?

3.5.9. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetria tengelye van.		
2. Van olyan síkidom, amelynek végtelen sok szimmetria tengelye van.		
3. Minden rombusznak két szimmetria tengelye van.		
4. Van olyan konkáv négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus.		
5. Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.		

3.5.10. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan középpontosan szimmetrikus négyszög, amelyik konkáv.		
2. Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói egyenlők.		
3. Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor az középpontosan szimmetrikus.		
4. A középpontosan szimmetrikus négyszögben van két egyenlő nagyságú szög.		
5. Van olyan tengelyesen szimmetrikus sokszög, amelyik középpontosan szimmetrikus.		

3.5.11. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy melyik igaz, melyik hamis.

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha egy háromszög forgásszimmetrikus, akkor szabályos.		
2. Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor középpontosan is szimmetrikus.		
3. Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor forgásszimmetrikus is.		
4. Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus.		
5. Van olyan konkáv sokszög, amelyik forgásszimmetrikus.		

3.5.12. Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását és döntsük el, hogy az igaz-e.

1. Ha egy háromszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.
2. Ha egy négyszög paralelogramma, akkor középpontosan szimmetrikus.

3.5.13. Fogalmazzuk meg a következő állítások tagadását.

1. Ma este moziba megyek vagy olvasok.
2. Minden magyar egyetemistának van nyelvvizsgálója vagy autója.

3.5.14. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$p \wedge q \wedge \neg r = i$$

3.5.15. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(p \vee q) \wedge r = i$$

3.5.16. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r) = i$$

3.5.17. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(p \vee \neg q) \rightarrow r = i$$

3.5.18. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(\neg p \wedge q) \vee r = h$$

3.5.19. Legyen p, q, r logikai változó. Oldjuk meg a következő egyenletet.

$$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg r = h$$

3.5.20. A következő logikai egyenletek közül melyik azonosság?

1. $p \vee q = \neg p \rightarrow q$

2. $\neg p \wedge q = p \leftrightarrow q$

4. Statisztika

4.1. Statisztikai jellemzők

4.1.1. 5 számról a következőket tudjuk. A legkisebb és legnagyobb számtani közepe 60, mértani közepe 36. A három középső tag szórása 0. A medián megegyezik az 5 szám átlagával. Mekkora az 5 szám szórása, és melyik ez az 5 szám?

4.1.2. 6 pozitív egész számról a következőket tudjuk. Terjedelmük 9, a legkisebb és a legnagyobb mértani közepe, valamint módusza és mediánja is 6. A hat szám átlaga $\frac{19}{3}$. Mi lehet ez a 6 szám?

4.1.3. Egy érettségiző diák 5 jegyének átlaga 3.2, módusza elégséges. Határozzuk meg a jegyek szórását, és az átlagtól való abszolút eltérést!

4.1.4. Egy egyetemi vizsga %-os eredménye 3 részből tevődik össze. Az első rész eredményét 3-szoros, a másodikét négyszeres, a harmadikét ötszörös súlyozással számítják be. Egy hallgatónak az első rész 62%-ra, a második 55%-ra sikerült. Hány %-ra írja meg a harmadikat, ha a végső eredménye 64.25%?

4.1.5. Egy dolgozat %-os eredménye 4 részből tevődik össze. Az első rész eredményét 2-szeres, a másodikét háromszoros, a harmadikét négyszeres, a negyedikét ötszörös súlyozással számítják be. Egy hallgatónak az első rész 58%-ra, a második 52%-ra sikerült, a harmadik csak 47%-ra. Hány %-ra írja meg a negyediket, ha a végső eredménye 60%?

4.1.6. Egy középiskolai évfolyamon a 70 lány átlaga 3,8, a fiúké 3,6 lett évvégén. Az évfolyamon 20 kolis volt, az ő átlaguk 3.9 volt, a többieké 3,68. Hányan voltak az évfolyamon?

4.1.7. Egy egyetemen az első évfolyamos fiúk (40-en voltak) átlageredménye 75% lett, a lányoké 70%. A 30 fő kolis átlaga 72% lett, a nem kolisoké 71,4%. Hányan voltak az évfolyamon?

4.1.8. Öt adat közül négy 18,30,32,40. Mekkora az ötödik adat, ha tudjuk, hogy az 5 adat átlaga is szerepel az adatok között, illetve a medián nem egyenlő az (egyetlen) módusszal!

4.1.9. Hat adat közül öt 50,60,70,80,110. Mekkora a hatodik adat, ha tudjuk, hogy a 6 adat átlaga is szerepel az adatok között, illetve a medián nem egyenlő az (egyetlen) módusszal!

4.1.10. Egy dinnye árus standján a következő felirattal hirdeti dinnyéit: „Itt minden dinnye 7 kg (± 0.25 kg)”. Egy ellenőrzés során 8 véletlenszerűen kiválasztott dinnyének a súlya látható a következő táblázatban:

mérés	1	2	3	4	5	6	7	8
súly	7.1	6.7	7.3	6.8	7	6.8	7.1	7.2

Az árus nem kap büntetést ha a mérések szórása, és átlagtól való abszolútértéke sem haladja meg a 0.2 kg-ot. Kap-e büntetést az árus?

4.1.11. Egy kockával 5-ször dobunk, az egyetlen módusz a 3, a dobott számok átlaga 3.4. Milyen számokat dobtunk?

4.1.12. Egy kockával 5-ször dobunk, az egyetlen módusz a 2, a dobott számok átlaga 3.2. Milyen számokat dobtunk?

4.1.13. Egy csoportban 20 fő írt dolgozatot. A 20 dolgozat átlaga 3.85, (egyetlen) módusza 4. A dolgozatok között volt 6db 5-ös, 4db 4-es, 4db 3-as, 2 db 2-es. Mi lehetett a hiányzó 4 dolgozat?

4.1.14. Egy kézilabdacsapat egy adott mérkőzésén pályára lépett 10 játékosának eredményességét mutatja az alábbi táblázat

Játékos	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10
Dobási kísérletek	8	10	7	6	12	10	5	8	4	15
Dobószázalék	25%	30%	0%	50%	25%	70%	60%	75%	75%	40%

Hány pontot dobott ezen a meccsen ez a csapat. Mekkora a játékosok által dobott pontok szórása? Mekkora a csapat dobószázaléka?

4.1.15. A következő táblázatban kilenc mért adat látható.

Mért adat	84	93
db	3	6

a) Határozzuk meg a mért adatok átlagát és szórását!

b) Mekkora lehet a 10. adat, ha tudjuk, hogy pozitív egész szám, és a 10 adat szórása legfeljebb 6?

4.1.16. A következő táblázatban négy mért adat látható.

Mért adat	21	23	28
db	1	1	2

a) Határozzuk meg a mért adatok átlagát és szórását!

b) Mekkora lehet az 5. adat, ha tudjuk, hogy pozitív egész szám, és a 10 adat szórása legfeljebb 5?

4.1.17. Egy egészségügyi szűrővizsgálat alkalmával az egyik cégnél a 18-30 éves korosztályban 49 dolgozó közül 9-nél, a 31-50 évesek esetében 65 dolgozó közül 20 esetben, a 51-korosztályban pedig 24 dolgozó közül 15 esetben állapított meg rendellenességet.

a) Határozzuk meg minden korosztályban a rendellenességet tapasztaltak relatív gyakoriságát!

b) A felméréskor két dolgozó hiányzott, ők később vettek részt szűrésen. Milyen eredmény születhetett az ő szűrésükkor, ha a teljes létszámra vonatkozóan a rendellenességet diagnosztizáltak relatív gyakorisága $\frac{1}{3}$ lett?

4.1.18. Egy dolgozatnál 3 hiányzó volt, a részt vettek eredményei a következők voltak:

Jegy	1	2	3	4	5
db	2	1	6	7	2

a) Határozzuk meg az egyes érdemjegyek relatív gyakoriságát, az adatsokaság mediánját, átlagát, szórását!

b) Hányas lehetett a hiányzó 3 dolgozat, ha azok kijavítása után a medián 4, az átlag

$$\frac{23}{7}?$$

4.1.19. Egy 100 elemből álló adatsokaságban minden adat eleme a $\{0,1,2,3\}$ halmaznak.

a) Legfeljebb hány hármas lehet benne, ha az átlag 0,25

b) Lehet-e az adatok mediánja 1, ha az átlaguk 2.1?

c) Lehet-e az adatok egyetlen módusza 2, ha az átlag 0.95?

4.1.20. Egy 50 elemből álló adatsokaságban minden adat eleme a $\{0,1,2\}$ halmaznak.

a) Legfeljebb hány kettes lehet benne, ha az átlag 0,4

b) Lehet-e az adatok mediánja 1, ha az átlaguk 1.2?

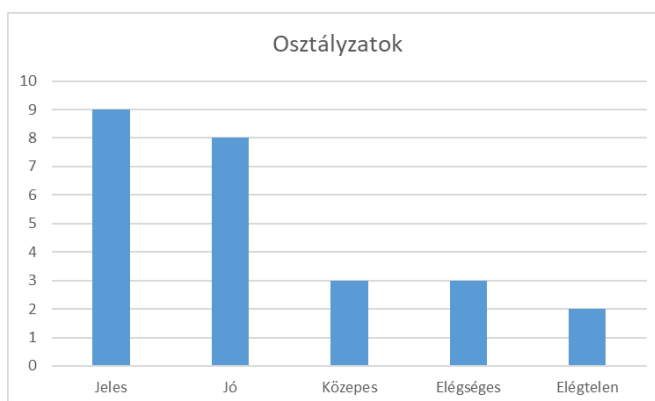
c) Lehet-e az adatok egyetlen módusza 1, ha az átlag 0.45?

4.1.21. Egy középiskolai évfolyamon az az 'A' osztály tanulójának a súlyátalaga 59.5kg, a 'B' osztály tanulójának a súlyátalaga 56kg, a 'C' osztály tanulójának a súlyátalaga 58.5 kg. Az 'A' és 'B' osztály tanulójának a súlyátalaga 57.5kg, az 'A' és 'C' osztályosoké 59,2 kg, a 'B' és 'C' osztályosoké 58kg. Határozzuk meg a teljes évfolyam tanulójának súlyátalagát!

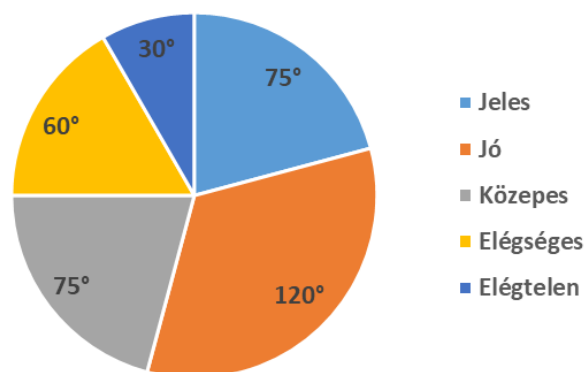
4.1.22. Egy cég dolgozói 3 kiránduláson vettek részt, mindenki volt mindhárom alkalommal. Akik az első kiránduláson részt vettek, magasságainak az átlaga 172cm. Akik a másodikon vettek részt, a magasságátalaguk 170.5cm, akik a harmadikon, azoké 169.5cm. Akik az első és másodikon vettek részt 171 cm, akik az első és harmadikon 170cm. Határozzuk meg a teljes cég dolgozójának átlagmagasságát!

4.2. Diagrammok

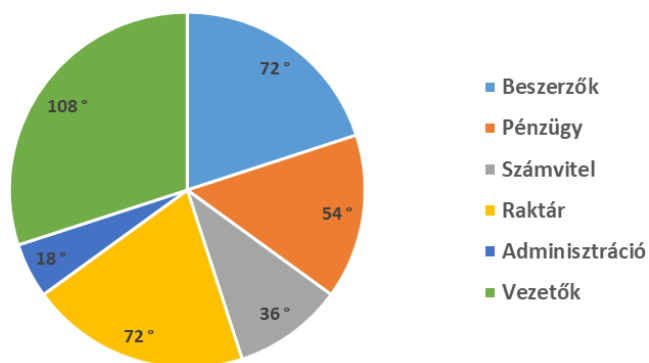
4.2.1 Egy osztály matematika dolgozatánál a kapott érdemjegyeket a következő oszlopdiagram szemlélteti. Állapítsuk meg a jegyek móduszát, mediánját, szórását, átlagos abszolút eltérést is! Mikor lesz nagyobb a szórás? Ha a mindkét hiányzó dolgozata elégséges, vagy mindkettőé ötös? Miért?



4.2.2 Egy 26 fős csoport matematika dolgozatánál ketten hiányoztak. A többiek eredményeinek eloszlását a következő kördiagram szemlélteti. a) Határozzuk meg az érdemjegyek szórását és átlagtól való abszolút eltérését! b) Határozzuk meg a hiányzók dolgozatának érdemjegyeit, ha tudjuk, hogy az ő pótdolgozatuk kijavítása után a csoportátlag 3.5 lett!

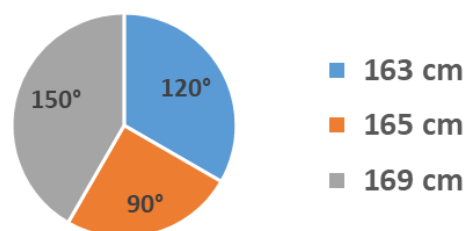


4.2.3 Egy cég dolgozói az évvégi 10 millió forintos prémiumból a kördiagrammon látható arányban (középponti szögekkel megadva) részesültek. a) Ábrázoljuk oszlopdiagrammon, hogy az egyes részlegek mennyit kaptak a prémiumból! b) Az egyes részlegek létszámát a következő táblázat tartalmazza. Ez alapján töltsük ki a hiányzó sort, illetve adjuk meg a teljes dolgozói állományhoz, az egyénenként kapott prémium szórását 1000 Ft-ra kerekítve!



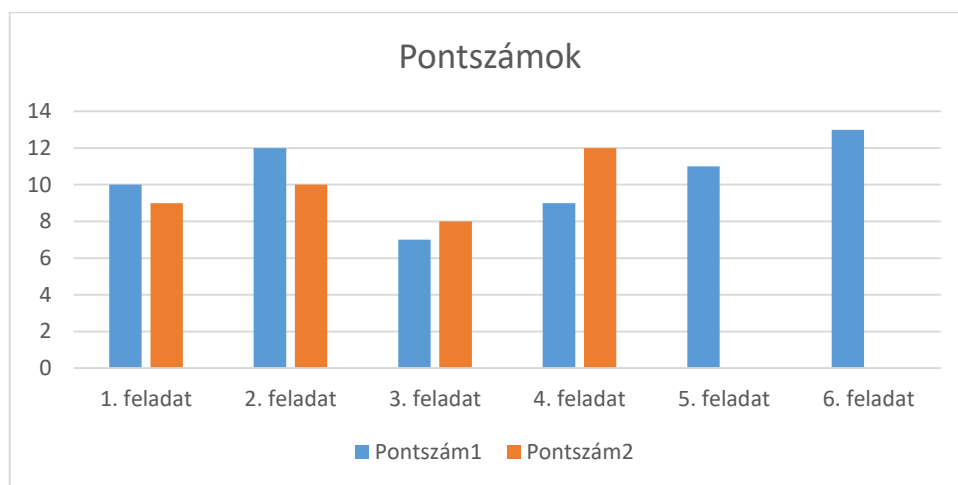
Egység	Beszerzők	Pénzügy	Számvitel	Raktár	Adminisztráció	Vezetők
Létszám	8	7	8	12	10	5
Egy dolgozó prémiuma						

4.2.4. Egy osztályba 30 fő jár. A lányok magasságainak eloszlását és a hozzájuk tartozó középponti szöget a következő kördiagramm szemlélteti. Határozzuk meg a lányok magasságainak átlagát és szórását! Mennyi a magasságok osztályátlaga, ha a fiúk magasságának átlaga 172 cm?

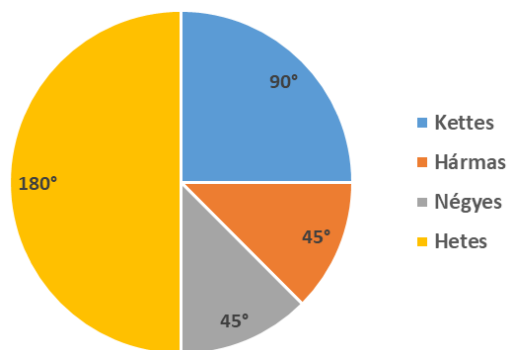


4.2.5. Egy 6 feladatból álló dolgozat megírásakor két diák pontszámait látjuk az oszlopdiagrammon (pontszám1, és pontszám2). Határozzuk meg az első diák pontszámainak

átlagát és szórását! Mi lehetett a második diák utolsó két feladatára kapott pontszáma, ha az ő pontszámainak átlaga $\bar{x} = \frac{67}{6}$ és egy feladatra kapható maximális pontszám 15?



4.2.6. Egy kilencelemű pozitív egészekből álló mintában 8 adat eloszlását, és a hozzájuk tartozó középponti szöget a következő kördiagramm szemlélteti. Mi lehet a hiányzó adat, ha a mediánjuk, átlaguk és móduszuk (nem feltétlenül ebben a sorrendben) egy szigorúan növekvő számtani sorozat elemei?



4.2.7. Egy hételemű pozitív egészekből álló mintában van 3 db hármás, 1-1 négyes, hatos, és 11-es. Mi lehet a hiányzóhetedik adat, ha a 7 adat mediánja, átlaga és módusza (nem feltétlenül ebben a sorrendben) egy szigorúan növekvő számtani sorozat elemei?

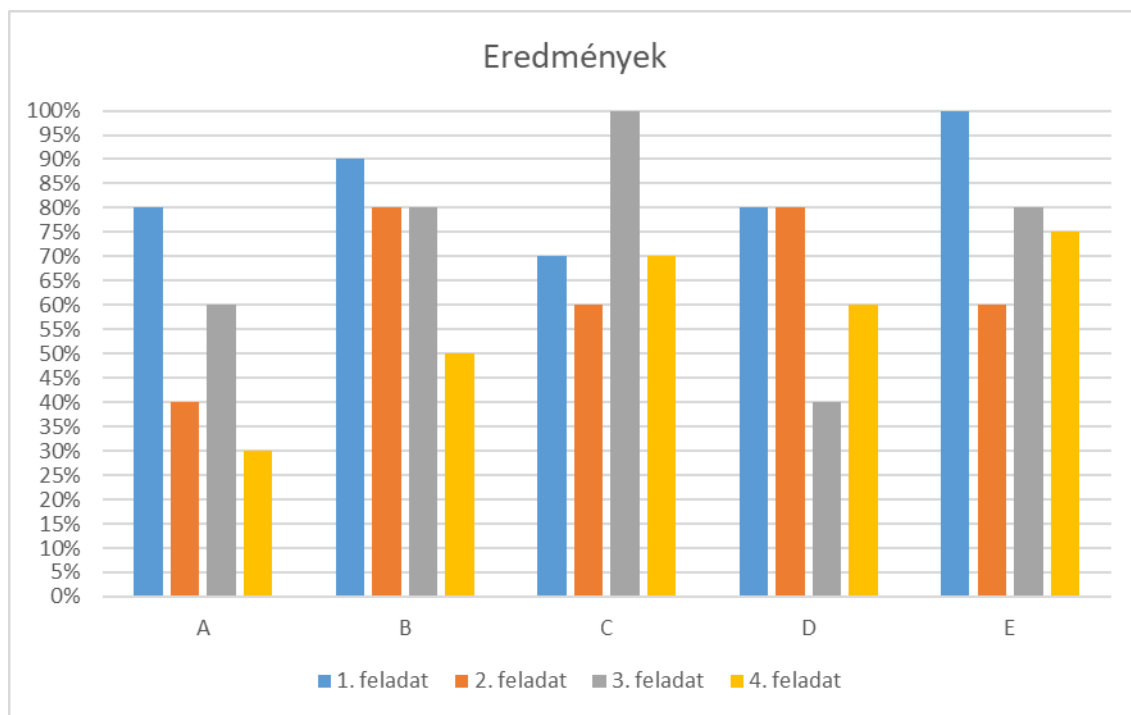
4.2.8. Az alábbi táblázat egy diák napi jellemzőinek adatait tartalmazza

Tevékenység	Százalékos arány	Kördiagrammban az ehhez a tevékenységhez tartozó középponti szög
Alvás	30%	
Iskola, tanulás	50%	
Pihenés, szórakozás		
Házi munka		18°

Töltsük ki a táblázat hiányzó adatait! Ábrázoljuk kördiagrammon a tevékenységek eloszlását! Ennek a diáknak a testvérénél az alvás aránya ugyanennyi, de a tanulás és a házi munka aránya

össességében 5%-al több úgy, hogy az előbbihez tartozó középponti szög 2° -al nagyobb mértékben nőtt, mint az utóbbihoz tartozó. Állapítsuk meg az új adatokat!

4.2.9. Egy matematika versenyen egy adott osztályból 5 fő vett részt: A, B, C, D, E. Az %-os eredményeit a következő oszlopdiagram mutatja:



Például az 'A' versenyző az első feladatban 80%-os eredményt ért el. Az egyes feladatok elérhető maximális pontjairól a következőket tudjuk: Az összegük 60, a mediánjuk megegyezik a móduszukkal és ezek átlagával, a maximumuk pedig kétszer akkora, mint a minimum. A feladatonkénti maximum pontok egy monoton növekvő számsort alkotnak. Hány pontot érték el a versenyzők összesen, ábrázoljuk ezek versenyzőnkénti eloszlását kördiagrammon! Állapítsuk meg az összpontszámaik átlagtól való abszolút eltérését!

5. Számelmélet

5.1. Oszthatóság

5.1.1. Melyik az a legkisebb hétjegyű szám, amelyik osztható 12-vel és csupa 0 és 2 számjegyekből áll?

5.1.2. Melyik az a legkisebb hatjegyű szám, amelyik osztható 18-cal és csupa 0 és 3 számjegyekből áll?

5.1.3. Melyik az a legkisebb hétjegyű szám, amelyik osztható 15-tel és csupa 0 és 4 számjegyekből áll?

5.1.4. Melyik az a legkisebb szám, amelyik osztható 45-tel és csupa 0 és 7 számjegyekből áll?

5.1.5. Melyik az a hatjegyű szám, melyet az 1,2,3,4,5,6 számjegyek egyszeri felhasználásával készítünk a következő módon: Az első két számjegyből álló szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló szám osztható 3-mal, és így tovább, és maga a szám osztható 6-tal?

5.1.6. Melyik az a legkisebb kilencjegyű szám, melyben az első két számjegyből álló szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló szám osztható 3-mal, és így tovább, és maga a szám osztható 9-cel?

5.1.7. Melyik az a kilencjegyű szám, melyet az 1,2,3,4,5,6,7,8,9 számjegyek egyszeri felhasználásával készítünk a következő módon: Az első két számjegyből álló szám osztható 2-vel, az első három számjegyből álló szám osztható 3-mal, és így tovább, és maga a szám osztható 9-cel?

5.1.8. Melyik az a kilencjegyű szám, melyet az 1,2,3,4,5,6,7,8,9 számjegyek egyszeri felhasználásával készítünk és osztható 99-cel?

5.1.9. Melyik az a legkisebb 28-cal osztható pozitív szám, amely 28-ra végződik és a számjegyek összege 28?

5.1.10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi oszthatóságok egyetlen n természetes szám esetén sem teljesülnek!

a, $n + 5$ osztója $n^2 + 10n + 23$ kifejezésnek

b, 121 osztója $n^2 + 3n + 5$ kifejezésnek.

5.1.11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetszőleges háromjegyű számot a szám után írunk, akkor az így kapott hatjegyű szám osztható 7-tel, 11-gyel és 13-mal is!

5.1.12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 27-tel osztható háromjegyű szám első számjegyét áttesszük a végére, akkor az így kapott háromjegyű szám is osztható 27-tel!

5.1.13. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 41-gyel osztható ötjegyű szám első számjegyét áttesszük a végére, akkor az így kapott ötjegyű szám is osztható 41-gyel!

5.1.14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 7-tel osztható hatjegyű szám utolsó számjegyét áttesszük elsőnek, akkor az így kapott hatjegyű szám is osztható 7-tel!

5.1.15. Bizonyítsuk be, hogy ha 13 osztója $(2a + b)$ -nek és $(5a - 4b)$ -nek, akkor osztója $(a - 6b)$ -nek is!

5.1.16. Bizonyítsuk be, hogy ha 7 osztója $(100a + b)$ -nek, akkor osztója $(a + 4b)$ -nek is!

5.1.17. Bizonyítsuk be, hogy ha 11 osztója $(3a + 4b)$ -nek, akkor osztója $(a + 5b)$ -nek is!

5.1.18. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre az alábbi törtek egészek lesznek!

1.

$$\frac{n+7}{n-5}$$

2.

$$\frac{2n-2}{n+3}$$

3.

$$\frac{n^2+5}{n+1}$$

5.1.19. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre az alábbi törtet lehet egyszerűsíteni!

$$\frac{n+13}{n-7}$$

5.1.20. Bizonyítsuk be, hogy a következő törtet nem lehet egyetlen n egész szám esetén sem egyszerűsíteni!

1.

$$\frac{3n + 1}{5n + 2}$$

2.

$$\frac{15n + 2}{10n + 1}$$

3.

$$\frac{6n + 4}{8n + 5}$$

5.1.21. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre az alábbi kifejezéseknek van 1-nél nagyobb közös osztójuk! Mi lehet ez a közös osztó?

1. $(7n + 1)$ és $(8n + 3)$

2. $(8n + 7)$ és $(5n + 6)$

3. $(n + 7)$ és $(2n + 3)$

5.1.22. Bizonyítsuk be, hogy ha n 5-tel nem osztható egész szám, akkor $n^2 + 1$ vagy $n^2 - 1$ osztható 5-tel!

5.1.23. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul!

5.1.24. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan négyzetszám, melyet 7-tel osztva 3-at ad maradékul!

5.1.25. Határozzuk meg, hogy egy négyzetszám milyen maradékot adhat 3-mal, 4-gyel, 5-tel osztva!

5.1.26. Bizonyítsuk be, hogy bármely egész szám négyzetét 16-tal osztva, a maradék mindig négyzetszám!

5.1.27. Határozzuk meg, hogy egy tízes számrendszerbeli szám mikor osztható 37-tel!

5.1.28. Bizonyítsuk be, hogy ha az $\overline{abc}$ háromjegyű pozitív egész szám osztható 37-tel, akkor $\overline{bca}$ és $\overline{cab}$ számok is oszthatóak 37-tel!

5.1.29. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan 24 darab egymást követő természetes szám, amelyek összege osztható 24-gyel!

5.1.30. Határozzuk meg, hogy milyen n természetes szám esetén lesz n darab egymást követő természetes szám összege osztható n -nel!

5.1.31. Bizonyítsuk be, hogy három egyenlő súlyú csoportba tudjuk osztani a 11 darab, egyenként 1,2,3,...,11 egység súlyú tárgyakat!

5.1.32. Adott n darab tárgy, melyek súlya 1,2,..., n egység. Milyen n esetén lehet három egyenlő súlyú csoportba osztani ezeket?

5.1.33. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre teljesülnek az alábbi oszthatóságok:

1. A 9 osztója a $11^n + 7^n$ kifejezésnek.
2. A 16 osztója a $17^n + n$ kifejezésnek.
3. A 120 osztója a $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n$ kifejezésnek.
4. A 3 osztója a $2n^3 + 2n^2 + 1$ kifejezésnek.
5. A 6 osztója a $1^n + 2^n + 3^n$ kifejezésnek.
6. A 48 osztója a $n^3 + 3n^2 - n - 3$ kifejezésnek.
7. A 121 osztója a $n^2 + 3n + 5$ kifejezésnek.

5.1.34. Milyen n egész szám esetén lesznek a következő kifejezések egész számok?

1.

$$\frac{3n - 9}{n + 3}$$

2.

$$\frac{3n^2 + 6n + 10}{n + 2}$$

5.1.35. Milyen n természetes szám esetén lesz a következő kifejezés természetes szám?

$$\frac{n^2 + 14n + 40}{n^2 + 10n + 24}$$

5.1.36. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 3 osztója a $2 \cdot 7^n + 1$ kifejezésnek.

5.1.37. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 4 osztója a $7^n + 3^{n+1}$ kifejezésnek.

5.1.38. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 4 osztója a $3 \cdot 17^{2n} + 25^n$ kifejezésnek.

5.1.39. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

Az 5 osztója a $4 \cdot 6^n + 5^n - 4$ kifejezésnek.

5.1.40. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

Az 5 osztója a $17^{4n+1} + 3 \cdot 9^{2n}$ kifejezésnek.

5.1.41. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 6 osztója az $n^3 - n$ kifejezésnek.

5.1.42. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 6 osztója az $n(2n + 1)(7n + 1)$ kifejezésnek.

5.1.43. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 7 osztója a $2^{5n+2} + 3 \cdot 5^{2n}$ kifejezésnek.

5.1.44. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 7 osztója az $5 \cdot 9^{n-1} + 2^{4n-3}$ kifejezésnek.

5.1.45. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 8 osztója az $3^{2n} + 7$ kifejezésnek.

5.1.46. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 9 osztója az $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ kifejezésnek.

5.1.47. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 11 osztója a $2^{2n-1} \cdot 3^{2n} + 5^{2n+1}$ kifejezésnek.

5.1.48. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 13 osztója a $7 \cdot 5^{2n} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n+1}$ kifejezésnek.

5.1.49. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 17 osztója a $7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$ kifejezésnek.

5.1.50. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 17 osztója a $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ kifejezésnek.

5.1.51. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 19 osztója az $5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ kifejezésnek.

5.1.52. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 19 osztója az $2^{6n-1} + 5^n \cdot 3^{2n+2}$ kifejezésnek.

5.1.53. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 19 osztója az $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ kifejezésnek.

5.1.54. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 64 osztója a $3^{2n+1} + 40n - 67$ kifejezésnek.

5.2. Prímszámok, összetett számok

5.2.1. Határozzuk meg azokat az x egész számokat, melyekre

$$x^2 + 28x + 889 = p^2, \text{ ahol } p \text{ prímszám!}$$

5.2.2. Határozzuk meg azokat az x egész számokat, melyekre a $2x^2 - x - 36 = p^2$, ahol p prímszám!

5.2.3. Határozzuk meg a $2x + 3y + 6z = 90$ egyenlet megoldását, ahol x, y, z prímszámok!

5.2.4. Határozzuk meg az $n^p = p^n$ egyenlet megoldását, ahol n természetes szám, p prímszám!

5.2.5. Határozzuk meg azokat az x, y, z természetes számokat, amelyekre teljesül a következő egyenlőség:

$$2^x + 5^y = 19^z !$$

5.2.6. Határozzuk meg, hogy milyen p és q prímszámokra és n természetes számra teljesül az alábbi egyenlőség!

$$\sqrt[n]{p+q} = p-q$$

5.2.7. Határozzuk meg, hogy az n milyen értéke esetén lesz az $n, n+4$, és $n+14$ is prímszám?

5.2.8. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $p^3 + p^2 + 11p + 2$ is prímszám!

5.2.9. Határozzuk meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre $p^q + q^p$ szintén prímszám!

5.2.10. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, amelyekre a $p^2 + 8$ is prímszám!

5.2.11. Határozzuk meg azokat az a egész számokat, melyekre $a^4 + 4$ prímszám lesz!

5.2.12. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre a $p^2 + 2$ is prímszám!

5.2.13. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre a

$$p = n^3 - 7n^2 + 14n - 6 \text{ prímszám lesz!}$$

5.2.14. Határozzuk meg azokat a p és q prímszámokat, amelyekre $p+q$ és $p^2 + q^2 - q$ szintén prímszámok!

5.2.15. Határozzuk meg, hogy hányféleképpen lehet felbontani az $\frac{1}{pq}$ törtet két különböző természetes szám reciprokának összegére, ahol p és q különböző prímszámok?

5.2.16. Határozzuk meg, hogy mennyi különböző prímszámot lehet úgy megadni, hogy közülük bármely három összege is prímszám legyen?

5.2.17. Határozzuk meg a p, q, r prímszámokat, melyekről tudjuk, hogy $pqr = 5(p+q+r) !$

5.2.18. Határozzuk meg, hogy az $1,2,3,\dots,9$ számjegyek egyszeri felhasználásával a prímszámokat úgy, hogy e prímszámok összege, valamint ezen belül az egyjegyű prímszámok összege a lehető legkisebb legyen!

5.2.19. Határozzuk meg egy $\overline{xyxyxy}$ alakú tízes számrendszerbeli szám legnagyobb prímosztóját!

5.2.20. Határozzuk meg, hogy az $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot 2n$ szorzat prímtenyezős felbontásában a 2 hányadik hatványon szerepel!

5.2.21. Bizonyítsuk be, hogy minden $3 < p$ prímszám valamelyik szomszédja osztható 6-tal!

5.2.22. Bizonyítsuk be, hogy ha egy prímszámot 30-cal osztunk, akkor a maradék prímszám vagy 1 lesz!

5.2.23. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a természetes szám van, amelyre egy tetszőleges n természetes szám esetén $b = n^4 + a$ szám nem prímszám!

5.2.24. Bizonyítsuk be, hogy ha a,b,c,d olyan természetes számok, amelyekre $a \cdot b = c \cdot d$, akkor sem $a + b + c + d$, sem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ nem lesz prímszám!

5.2.25. Bizonyítsuk be, hogy ha p, q és r, s számpárok ikerprímek, ahol $3 < p, q, r, s$, akkor $p \cdot r - q \cdot s$ osztható 12-vel!

5.2.26. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n - 1$ prímszám, ahol n természetes szám, akkor n is prímszám! Az állítás megfordítása igaz-e?

5.2.27. Bizonyítsuk be, hogy a $3 < p$ prímszám négyzete 24-gyel osztva 1 maradékot ad!

5.2.28. Bizonyítsuk be, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímek összege osztható 12-vel!

5.2.29. Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{a^3+b^3}{2}$ prímszám, akkor $3a^2 - 6a + 4$ és $3b^2 - 6b + 4$ is az, ahol a és b természetes számok!

5.2.30. Bizonyítsuk be, hogy különböző prímszámok reciprokainak összege nem lehet egész szám, sem egy egész szám reciproka!

5.2.31. Bizonyítsuk be, hogy ha $5 < p$ prímszám, akkor a 360 osztója a

$$p^4 - 5p^2 + 4 \text{ számnak!}$$

5.2.32. Bizonyítsuk be, hogy minden $3 < p$ prímszám felírható

$6n + 1$ vagy $6n - 1$ alakban, ahol $n = 1, 2, \dots$!

5.2.33. Bizonyítsuk be, hogy minden $2 < p$ prímszám csak egyféleképpen írható fel két négyzetszám különbségeként!

5.2.34. Bizonyítsuk be, hogy ha $n - 1$ és $n + 1$ prímszámok, akkor

az $n, n - 12, n + 12$ számok egyike osztható 30 -cal!

5.2.35. Bizonyítsuk be, hogy két páratlan prímszám négyzetének különbsége osztható 24-gyel!

5.2.36. Bizonyítsuk be, hogy két iker prímszám összege osztható 12-vel, ha a prímszámok 3-nál nagyobbak!

5.2.37. Bizonyítsuk be, hogy $7 < p$ esetén a p és $p + 2$ iker prímszámokkal szomszédos három szám szorzata osztható 240-nel!

5.2.38. Bizonyítsuk be, hogy minden 3-nál nagyobb prímszám négyzete 12-vel osztva 1 maradékot ad!

5.2.39. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan prímszámot találhatunk úgy, hogy bármely kettő különbsége osztható egy tetszőlegesen megadott k számmal!

5.2.40. Bizonyítsuk be, hogy ha p, q, r egész számok páronként relatív prímek, akkor az

$A = p \cdot q + q \cdot r + p \cdot r$ és $B = p \cdot q \cdot r$ is relatív prímek! Igaz-e az állítás megfordítása?

5.2.41. Adott 1 és $(2n - 1)^2$ között n darab páronként relatív prím. Bizonyítsuk be, hogy a megadott számok között van prímszám!

5.2.42. Bizonyítsuk be, hogy tíz egymás utáni egész szám között mindig van olyan, amelyik a másik kilenchez relatív prím!

5.2.43. Legyen n páratlan szám! Bizonyítsuk be, hogy ahány n -hez relatív prímszám van az n -nél kisebb számok között, ugyanannyi n -hez relatív prímszám van a $2n$ -nél kisebbek között! (Erdős Pál feladata.)

5.2.44. Legyenek az a, b, c számok páronként relatív prímszámok! Bizonyítsuk be, hogy az

$a \cdot b \cdot c$ és $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$ is relatív prímszámok! Igaz-e a tétel megfordítása?

5.2.45. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c három egymást követő természetes szám, akkor

$b^2 - a^2$ és $c^2 - b^2$ relatív prímszámok!

5.2.46. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b különböző egész számok, akkor végtelen sok olyan n természetes szám létezik, amelyre $(a + n)$ és $(b + n)$ relatív prímelek!

5.2.47. Bizonyítsuk be, hogy ha a és b relatív prímszámok, akkor a következő törtet nem lehet egyszerűsíteni!

$$\frac{a+b}{a \cdot b} \quad \text{és} \quad \frac{a-b}{a \cdot b}$$

5.2.48. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések nem lehetnek két szomszédos szám szorzata egyetlen n természetes szám esetén sem!

1. $1! + 2! + \dots + 200!$

2. $3^{99} + 1$

3. $300! + 4$

4. $3n^3 + 2n^2 + n + 1$

5. $4n^2 + 1$

5.2.49. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések minden páratlan természetes n számra két szomszédos természetes szám szorzata!

1.

$$\frac{n^2 - 1}{4}$$

2.

$$\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{4}$$

5.2.50. Bizonyítsuk be, hogy ha n két egymást követő természetes szám szorzata, akkor $9n + 2$ is az!

5.2.51. Határozzuk meg az összes olyan n természetes számot, amelynek tízes számrendszerben felírt alakjában a számjegyek szorzata $n^2 - 10n - 22$!

5.2.52. Határozzuk meg, hogy az $(n + 1)(n + 2) \cdots (2n)$ szorzat prímtényezős felbontásában a 2 hányadik hatványon fordul elő!

5.2.53. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések nem lehetnek négyzetszámok!

1. $1 + 11 + 11^2 + 11^3 + 11^4 + 11^5 + 11^6 + 11^7$

2. $200! + 3$

3. $1! + 2! + 3! + \cdots + 50!$

4. $10^{20} + 5$

5. Az 1,2,3,4,5,6 számjegyek valamilyen sorrendjéből felírt hatjegyű szám.

6. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 56^2$

7. $11 \cdots 1$, ahol 200 darab 1-es szerepel.

8. $44 \cdots 4$, ahol 100 darab 4-es szerepel.

9. 33 darab 1-es és tetszőleges darab 0-val felírt szám.

10. 300 darab 6-os és tetszőleges darab 0-val felírt szám.

5.2.54. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések nem lehetnek négyzetszámok!

1. Az $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű számok.

2. Az $\overline{abcabc}$ alakú hatjegyű számok.

3. Az $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ alakú háromjegyű számok összege.

4. Kettő egymást követő pozitív egész szám szorzata.

5. Három egymást követő pozitív egész szám szorzata.

6. Négy egymást követő pozitív egész szám szorzata.

7. Két páratlan négyzetszám összege.

8. Három egymást követő négyzetszám összege.

9. Négy egymást követő négyzetszám összege.

10. Öt egymást követő négyzetszám összege.

5.2.55. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi kifejezések nem lehetnek négyzetszámok!

1. Egy négyzetszám és valamelyik osztójának az összege.

2. Ha x, y pozitív egész számok, akkor $x^2 + y$ és $y^2 + x$ számok.

3. Az $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$, ahol n pozitív egész szám.

4. A $2^n + 3^n$, ahol n pozitív egész szám.

5.2.56. Határozzuk meg azokat az n pozitív egész számokat, melyekre az $n^2 + n + 41$ négyzetszám lesz!

5.2.57. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan természetes szám van, amelyik nem állítható elő két négyzetszám összegeként!

5.2.58. Bizonyítsuk be, hogy 10 bármely pozitív egész kitevőjű hatványa előállítható két négyzetszám összegeként!

5.2.59. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c pozitív egész számok olyanok, hogy $a \cdot b$ és $b \cdot c$ is négyzetszám, akkor az $a \cdot c$ is négyzetszám!

5.2.60. Bizonyítsuk be, hogy 12 egymást követő pozitív egész szám négyzetének összege nem osztható ezen 12 szám összegével!

5.2.61. Határozzuk meg, hogy milyen n pozitív egész számok esetén lesznek az alábbi kifejezések négyzetszámok!

1. $n^2 - n + 2$

2. $n^3 - n + 2$

3. $n^4 - n + 2$

4. $n^5 - n + 2$

5.2.62. Bizonyítsuk be, hogy ha egy természetes szám négyzete 6-ra végződik, akkor a tízesek helyén páratlan szám áll!

5.2.63. Határozzuk meg az alábbi szám utolsó két számjegyét, ahol n pozitív egész szám!

$$A = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{4n}$$

5.2.64. Bizonyítsuk be, hogy minden szám ötödik hatványában az utolsó számjegy megegyezik az eredeti szám utolsó számjegyével!

5.2.65. Bizonyítsuk be, hogy az m és az m^{4n+1} szám utolsó számjegye megegyezik, ahol m és n pozitív egész szám!

5.3. Vegyes feladatok

5.3.1. Bizonyítsuk be, hogy az $A = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$, (ahol $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ pozitív egész számok, a $p_1, p_2, \dots, p_k$ prímszámok) szám pozitív osztóinak száma:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$$

5.3.2. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelynek pontosan ennyi osztója van:

a, 10

b, 12

c, 20

5.3.3. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy A egész szám osztóinak száma páratlan, illetve páros legyen.

5.3.4. Bizonyítsuk be, hogy egy A szám pozitív osztóinak száma nem nagyobb, mint a szám négyzetgyökének kétszerese!

5.3.5. Bizonyítsuk be, hogy 7-nek, illetve 8-nak is van olyan többszöröse, amelyik csak 0 és 1 számjegyekből áll!

5.3.6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n természetes számnak van olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyekből áll!

5.3.7. Határozzuk meg, hogy milyen n természetes szám esetén lesz a következő kifejezés egész szám!

$$\frac{64^n + 16 \cdot 8^n + 63}{8^{n+1} + 56}$$

5.3.8. Bizonyítsuk be, hogy ha $3 < p$ prímszám, akkor $8p + 1$ nem lehet négyzetszám!

5.3.9. Bizonyítsuk be, hogy az $A = 0,23571113171923 \dots$ szám irracionális! (Tizedes jegyeknek a prímszámokat írtuk növekvő sorrendben.)

5.3.10. Bizonyítsuk be, hogy $\binom{n}{p} - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ osztható p -vel, ahol p prímszám!

5.3.11. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n - 1$ számnak legalább n darab különböző prím osztója van, ha az $a_1, a_2, a_3, \dots$ sorozatot a következő módon definiáljuk:

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n^2, \quad (\text{ahol } n = 1, 2, \dots).$$

5.3.12. Bizonyítsuk be, hogy a p_n sorozatnak nem eleme az 5, ha a sorozatot a következő módon definiáljuk:

$p_1 = 2$, p_{n+1} az $1 + p_1 p_2 \dots p_n$ szám legnagyobb prímosztója!

5.3.13. Bizonyítsuk be, hogy bármely 4-nél nagyobb tizenkettő szomszédos egész szám között legalább nyolc összetett szám!

5.3.14. Bizonyítsuk be, hogy az $A = \sqrt{2249 \dots 910 \dots 09} + 3$, (Ahol a 224 után $(k-2)$ darab 9-es, az 1 után k darab 0 szerepel, és k nagyobb, vagy egyenlő 2.) számnak a prímtényezői: 2, 3, 5!

5.3.15. Bizonyítsuk be, hogy ha $p \neq q$ prímszámok, akkor $\sqrt{p}$ és $\sqrt{p \cdot q}$ irracionális számok!

5.3.16. Bizonyítsuk be, hogy minden p prímszám esetén $\sqrt{p^2 + 1}$ és $\sqrt{p^2 - 1}$ irracionális számok!

5.3.17. Bizonyítsuk be, hogy ha $2^n + 1$ prímszám, akkor $n = 2^l$ alakú!

5.3.18. Bizonyítsuk be, hogy $2^n - 1$ és $2^n + 1$ nem lehet egyszerre prímszám, ha

$2 < n$ természetes szám!

5.3.19. Legyen p és q 2-nél nagyobb prímszámok! Bizonyítsuk be, hogy ha $2^{pq} - 2$ osztható a pq szorzattal, akkor $2^p - 2$ és $2^q - 2$ is osztható a pq szorzattal!

5.3.20. Legyen p 2-nél nagyobb prímszám! Bizonyítsuk be, hogy $\frac{2}{p}$ csakis egyféleképpen írható fel a $\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ alakban, ahol x és y egymástól különböző pozitív egész számok!

5.3.21. Bizonyítsuk be, hogy ha az $x^2 + ax + 1 = b$ egyenlet gyökei egész számok, és $b \neq 1$, akkor $a^2 + b^2$ nem lehet prímszám!

5.3.22. Bizonyítsuk be, hogy ha egy N összetett szám legkisebb prímosztója nagyobb a szám köbgyökénél, akkor az N szám két prímszám szorzata!

5.3.23. Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 7-nél nagyobb prímszámok, akkor a

$$(p^2 - 1) \cdot (p^2 - 1) \cdot (p^6 - q^6) \text{ kifejezés osztható } 290304\text{-gyel!}$$

5.3.24. Bizonyítsuk be, hogy bármely két egymást követő egész szám relatív prím!

5.3.25. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor az alábbi kifejezések relatív prímelek:

$$(2^n - 1; 2^n + 1) = 1$$

5.3.26. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész szám, akkor az alábbi kifejezések relatív prímelek:

$$(2^{2n} + 1; 2^n + 1) = 1$$

5.3.27. Bizonyítsuk be, hogy ha $(a; b) = 1$, akkor $11a + 2b$ és $18a + 5b$ legnagyobb közös osztója 19 vagy 1!

5.3.28. Bizonyítsuk be, hogy az a, b pozitív egész számok legkisebb közös többszörösének és legnagyobb közös osztójának szorzata a két szám szorzatával egyenlő!

5.3.29. Bizonyítsuk be, hogy az a, b egész számok legkisebb közös többszöröse kifejezhető az a és b számok lineáris kombinációjaként! Vagyis felírható $ax + by$ alakban, ahol x, y egész számok.

5.3.30. Keressünk olyan a és b pozitív egész számokat, amelyeknek a legkisebb közös többszöröse a két szám összegével egyenlő.

5.3.31. Határozzuk meg az a és b természetes számokat és p prímszámokat úgy, hogy teljesüljön a következő egyenlőség:

$$[a; b] + (a; b) = a + b + p$$

5.3.32. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget, ahol a, b, c pozitív egészek:

$$\frac{[a; b] + (b; c)}{b} + \frac{[b; c] + (c; a)}{c} + \frac{[c; a] + (a; b)}{a} \geq 6$$

6. Algebra

6.1. Hatványozás, nevezetes azonosságok

6.1.1. Írjuk fel a következő kifejezést úgy, hogy ne legyen benne tört.

$$\frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

6.1.2. Végezzük el a következő műveleteket.

$$(x^{-1} + y^{-1})^{-2} : (x + y)^{-2}$$

6.1.3. Végezzük el a következő műveleteket.

$$(x^{-2} - a^{-2})(a^{-1} - x^{-1})^{-1}$$

6.1.4. Végezzük el a következő műveleteket.

$$\left(x^{\frac{3}{5}} + 1\right)^2 - \left(x^{\frac{2}{5}} + 1\right)\left(x^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{2}{5}} + 1\right)$$

6.1.5. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}} \cdot x^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{y^{-1}y^{\frac{2}{3}}}$$

6.1.6. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left[(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a})^{-1} + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a})^{-1}\right]^{-2} \cdot \frac{4\sqrt{x} + 4\sqrt{a}}{x - a}, \text{ ahol } x \neq a$$

6.1.7. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}\right) \cdot \frac{ab^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}}, \text{ ahol } a \neq b$$

6.1.8. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left(\frac{4x - 9x^{-1}}{2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}}} + \frac{x - 4 + 3x^{-1}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^2, \text{ ahol } x \neq 1 \text{ és } x \neq \frac{3}{2}$$

6.1.9. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} \cdot (a^{-1} + b^{-1}) + \frac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)^3} \cdot \left(a^{-\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{2}}\right)$$

6.1.10. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y} + \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}y}\right) \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x - y} - \frac{2y}{x - y}, \text{ ahol } x \neq y$$

6.1.11. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left(8a^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x^{-\frac{1}{3}} \cdot a \cdot \sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

6.1.12. Végezzük el a következő műveleteket.

$$\frac{a - x}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{1,5} - x^{1,5}}{a - x}, \text{ ahol } a \neq x$$

6.1.13. Végezzük el a következő műveleteket.

$$(b + b^{-2})[(b^2 + 1)b^{-2} - b^{-1}]^{-1}$$

6.1.14. Végezzük el a következő műveleteket.

$$(a^{-1}b^2 - a^2b^{-1}) : (a^{-3} - b^{-3})$$

6.1.15. Írjuk fel a következő kifejezést úgy, hogy ne legyen benne tört.

$$\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

6.1.16. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket.

$$1. (a - b + c)^2 \quad 2. (x + 2y + z)^2$$

6.1.17. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket.

$$1. \left(ax - b + \frac{1}{2}\right)^2 \quad 2. (2a - 3b - 4)^2$$

6.1.18. Írjuk fel a következő polinomokat háromtagú kifejezés négyzeteként.

$$1. c^4 + 2c^3 + 3c^2 + 2c + 1$$

$$2. 4x^4 + 12x^3 + 17x^2 + 12x + 4$$

$$3. a^4 - 4a^3 + 10a^2 - 12a + 9$$

6.1.19. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. (2a + 3b)^3 \quad 2. \left(\frac{2}{3}x - 3y\right)^3$$

6.1.20. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. (4a^3 + 5b^2)^3 \quad 2. \left(\frac{1}{2}xy + \frac{x^2y}{3}\right)^3 \quad 3. \left(0,2a^2b - \frac{5}{3}ab^2\right)^3 \quad 4. (x^n - 1)^3$$

6.2. Szorzattá alakítás

6.2.1. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. 3ax - 4by - 4ay + 3bx$$

$$2. 10a^2 + 21xy - 14ax - 15ay$$

6.2.2. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. x^2 + 5x + 6 \quad 2. x^2 - 6x + 8 \quad 3. x^2 - x - 12$$

6.2.3. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. 25(a - b)^2 - 16 \quad 2. \frac{4}{9}(x - y)^2 - 81$$

6.2.4. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. (x - 2y)^2 - 4(x + y)^2 \quad 2. 16(x - y)^2 - 25(x + y)^2$$

6.2.5. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad 25y^4 - 10y^2x + x^2 \quad 2. \quad -4x^4 + 2yx^2 - y^2$$

6.2.6. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad a^3 - 8 + 6a^2 - 12a \quad 2. \quad a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

6.2.7. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad a^6 - b^6 \quad 2. \quad (a + b)^3 - (a - b)^3$$

6.2.8. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad a^8 + a^4 + 1 \quad 2. \quad x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

6.2.9. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad x^3 + 8x^2 + 17x + 10 \quad 2. \quad x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$$

6.2.10. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x \quad 2. \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

6.2.11. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2) \quad 2. \quad (ad + ac + bc)(a + b + c) - abc$$

6.2.12. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 \quad 2. \quad x^4 + x^3 + x + 1$$

6.2.13. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad x^2 - 2xy + y^2 - 4 \quad 2. \quad 4a^2 - 20ab + 25b^2 - 36$$

6.2.14. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad a^4 + a^2b^2 + b^4 \quad 2. \quad a^3 - 3a + 2 \quad 3. \quad a^3 + 3a^2 - 4$$

6.2.15. Bizonyítsuk be, hogy a következő kifejezés értéke minden egész szám esetén páratlan szám lesz.

$$\frac{80x}{4x - 10} : \left(\frac{2x + 5}{2x - 5} - \frac{2x - 5}{2x + 5} \right)$$

6.2.16. Egy háromtagú összeg tagjai a következők: Két szomszédos egész szám négyzete és szorzatuk négyzete. Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg mindig négyzetszám lesz.

6.2.17. Legyen $x + y + z = 0$. Bizonyítsuk be, hogy teljesül a következő egyenlőség.

$$x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = 0$$

6.3. Polinomok

6.3.1. Végezzük el a következő polinomok osztását.

1. $(x^2 - 2x - 15) : (x - 5)$

2. $(6x^2 + 5x - 6) : (2x + 3)$

3. $(12x^2 + x - 20) : (4x - 5)$

6.3.2. Végezzük el a következő polinomok osztását.

1. $(15x^4 - x^3 - x^2 + 41x - 70) : (3x^2 - 2x + 7)$

2. $(4a^4 - 24a^2b^2 - 14a^3b - 54b^4) : (a^2 - 3ab - 9b^2)$

3. $(17x^2 - 6x^4 + 5x^3 - 23x + 7) : (7 - 3x^2 - 2x)$

6.3.3. Alakítsuk szorzattá a következő polinomokat.

1. $x^4 + x^2 + 1$ 2. $x^8 + x^4 + 1$

6.3.4. Alakítsuk szorzattá a következő polinomokat.

1. $x^3 + 8x^2 + 17x + 10$ 2. $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5$

6.3.5. Alakítsuk szorzattá a következő polinomokat.

1. $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$ 2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

6.3.6. Alakítsuk szorzattá a következő polinomokat.

1. $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2)$

2. $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2$

3. $(ad + ac + bc)(a + b + c) - abc$

6.3.7. Legyen $x + y + z = 0$. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget.

$$x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = 0$$

6.3.8. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket.

$$1. \frac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}{x^2 - y^2 + z^2 + 2xz} \quad 2. \frac{a^3 - a^2 - a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1}$$

6.3.9. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket.

$$1. \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + c^2 - b^2 + 2ac} \quad 2. \frac{a^3 - a^2b + ab^2}{a^3 + b^3}$$

6.3.10. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket.

$$1. \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \quad 2. \frac{x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x}{2x - x^2}$$

6.3.11. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törtekkel.

$$1. \frac{4a^2 - 3a + 5}{a^3 - 1} - \frac{1 - 2a}{a^2 + a + 1} + \frac{6}{1 - a}$$

$$2. \frac{1}{a - b} - \frac{3ab}{a^3 - b^3} - \frac{b - a}{a^2 + ab + b^2}$$

6.3.12. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\frac{1}{a(a - b)(a - c)} + \frac{1}{b(b - a)(b - c)} + \frac{1}{c(c - a)(c - b)}$$

6.3.13. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\frac{a + b}{(b - c)(c - a)} + \frac{b + c}{(c - a)(a - b)} + \frac{a + c}{(a - b)(b - c)}$$

6.3.14. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\frac{(a - b)^2}{(c - a)(c - b)} + \frac{(b - c)^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{(c - a)^2}{(b - c)(b - a)}$$

6.3.15. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\left(\frac{a^2 - ab}{a^2b + b^3} - \frac{2a^2}{b^3 - ab^2 + a^2b - a^3} \right) \cdot \left(1 - \frac{b-1}{a} - \frac{b}{a^2} \right)$$

6.3.16. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} + \frac{4a}{a^2-1} \right) \cdot \left(\frac{2a}{a+1} + \frac{2}{a-1} - \frac{4a}{a^2-1} \right)$$

6.3.17. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\left(\frac{2ab}{4a^2 - 9b^2} + \frac{b}{3b - 2a} \right) : \left(1 - \frac{2a - 3b}{2a + 3b} \right)$$

6.3.18. Bizonyítsuk be, hogy ha két tört összege 1, akkor a törtek különbsége egyenlő a négyzeteik különbségével.

6.3.19. Legyen n pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a következő kifejezés értéke minden n esetén pozitív egész szám lesz.

$$\left(\frac{9}{n^2} + \frac{n}{3} \right) : \left(\frac{3}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right)$$

6.4. Gyökvonás

6.4.1. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

$$1. \sqrt{\frac{3x^3 - 3x^2y}{3(x-y)^3}} \qquad 2. \sqrt{\frac{16a^4 - 96a^3}{98a^3 - 49a^2}}$$

6.4.2. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

$$1. \sqrt{\frac{x^4y^2 + x^4z^2}{y^4z^2 + z^2x^4}} \qquad 2. \sqrt{\frac{x - xy + z - zy}{1 - 3y + 3y^2 - y^3}}$$

6.4.3. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

$$1. \sqrt{\frac{18a}{a^2 - 2ab + b^2}} - \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{8a^3}{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}} + \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{450a}{a^2 + 2ab + b^2}}, \text{ ahol } a \geq 0, |a| \neq |b|$$

$$2. \quad \frac{4x}{a+x} \cdot \sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}} - 2a \cdot \sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}} + 3a \cdot \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} - 3x \cdot \sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}, \text{ ahol } 0 < x < a$$

6.4.4. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}} : \sqrt{x + \frac{1}{x}} \quad 2. \quad (x\sqrt{y} - y\sqrt{x}) : \sqrt{xy}$$

6.4.5. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

$$1. \quad (\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3} - xy) : \sqrt{xy} \quad 2. \quad \left(\sqrt{\frac{x}{2}} - \sqrt{x}\right) : x\sqrt{x}$$

6.4.6. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{\frac{a-ax+b-bx}{1-4x+4x^2-x^3}} \quad 2. \quad \sqrt{\frac{4a^2x^2+4b^2x^2-8abx^2}{a^2y^2+b^2y^2-2aby^2}}$$

6.4.7. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{a+b} - \sqrt{a^2-b^2} \quad 2. \quad a+b - \sqrt{a^2-b^2}$$

6.4.8. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{a^3-b^3} + \sqrt{a-b} \quad 2. \quad \sqrt{ax} - \sqrt{by} + \sqrt{bx} - \sqrt{ay}$$

6.4.9. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad a + \sqrt{a} - a^2 - \sqrt{a^3} \quad 2. \quad a^2 + a + 1 \quad 3. \quad a - \sqrt{a} - 6$$

6.4.10. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. \quad \left(\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 \quad 2. \quad \left(\sqrt{2+2\sqrt{3}} - \sqrt{2-2\sqrt{3}}\right)^2$$

6.4.11. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. \quad (\sqrt{12} + \sqrt{3} + 1)^2 \quad 2. \quad (3\sqrt{15} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{10})^2$$

6.4.12. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. (\sqrt{3} - 1)^3 \quad 2. (\sqrt{5} + \sqrt{3})^3 \quad 3. (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^3$$

6.4.13. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. \left(\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2(x-y)^4}} \right)^3 \quad 2. \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y}} + \sqrt{\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y}} \right)^2$$

6.4.14. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. (a\sqrt{b} - b\sqrt{a})^3 \quad 2. \left(\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{a}{b}} \right)^3$$

6.4.15. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket, ahol $0 \leq a, b$ és $b \leq a^2$.

$$1. \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a + \sqrt{b}}$$

$$2. \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}} = \sqrt{a - \sqrt{b}}$$

6.4.16. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket.

$$1. \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = 1 + 2\sqrt{2} \quad 2. \sqrt{17 - 4\sqrt{15}} = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \quad 3. \sqrt{5(9 - 4\sqrt{5})} = 5 - 2\sqrt{5}$$

6.4.17. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget.

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

6.4.18. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, ahol $x \neq 2$ és $0 < x$.

$$\frac{\sqrt{2x} - \frac{2x}{x + \sqrt{2x}}}{\frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}} = x$$

6.4.19. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, ahol $x \neq y, x \neq 0, y \neq 0$.

$$\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y} \right) = 1$$

6.4.20. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, ahol $0 < b < a$ és $x = \sqrt{ab}$.

$$\frac{\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

6.4.21. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} \qquad 2. \quad \sqrt{2^3\sqrt{2^4\sqrt{2}}}$$

6.4.22. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{a^3\sqrt{a^2\sqrt{a^3}}} \qquad 2. \quad \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}$$

6.4.23. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \qquad 2. \quad \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{3}$$

6.4.24. Írjuk fel egyetlen gyökjellel a következő kifejezéseket.

$$1. \quad \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{a}} \qquad 2. \quad \sqrt[4]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[6]{x}$$

6.4.25. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét.

$$1. \quad \frac{x}{\sqrt[4]{x}} \qquad 2. \quad \frac{2a}{\sqrt[4]{a^3}} \qquad 3. \quad \frac{a}{\sqrt[5]{a}}$$

6.4.26. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét.

$$1. \quad \frac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \qquad 2. \quad \frac{a+1}{\sqrt[3]{a}+1} \qquad 3. \quad \frac{a-1}{\sqrt[4]{a}-1}$$

6.4.27. Gyöktelenítsük a következő törtek nevezőjét.

$$1. \quad \frac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}} \quad 2. \quad \frac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}} \quad 3. \quad \frac{a+1}{\sqrt[5]{a+1}}$$

6.4.28. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\left(\sqrt[3]{8a^9 - 8a^6b^3} - a \cdot \sqrt[3]{a^6 - a^3b^3} + b \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3} - 1} \right) : \sqrt[3]{a^2 + ab + b^2}$$

6.4.29. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést, ahol $0 < a$ és $0 \leq b$.

$$a^3 \cdot \left[\frac{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 + (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2}{a + \sqrt{ab}} \right]^5 \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a}}$$

6.4.30. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést, ahol $0 < a$ és $0 < b$.

$$\left[\frac{(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}} - \sqrt[3]{ab}\sqrt{a})^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}} + 4 \right] \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}$$

6.5. Logaritmus azonosságok

6.5.1. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét.

$$1. \quad 7^{\log_{\sqrt{7}} 5 + \log_{49} 9} \quad 2. \quad 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \lg 9 - \lg 2} \quad 3. \quad \frac{\lg 5 + \lg 2}{\lg 6} \cdot (\lg 9 + 2 \lg 2)$$

6.5.2. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét.

$$1. \quad 8^{\log_{\sqrt{8}} 5 + \log_{64} 9} \quad 2. \quad 4^{2 + \log_{16} 9} + 36^{1 - \log_6 2} + 10^{-\lg 2}$$

6.5.3. Határozzuk meg a következő kifejezések pontos értékét.

$$1. \quad \frac{\log_2 48}{\log_6 2} - \frac{\log_2 3}{\log_{96} 2} \quad 2. \quad \frac{\log_3 45}{\log_{135} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{1215} 3}$$

6.5.4. Döntsük el, hogy melyik kifejezés a nagyobb.

$$1. \quad 100^{2 \lg 2} \quad 2. \quad \sqrt{10^{2 + 0,5 \lg 16}}$$

6.5.5. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést.

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3n]{\sqrt[3n-1]{\dots \sqrt[9]{\sqrt[3]{3}}}}$$

6.5.6. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1, \text{ ahol } a, b, c > 0 \text{ és } a, b, c \neq 1$$

6.5.7. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\frac{\log_a c}{\log_{ab} c} = 1 + \log_a b, \text{ ahol } a, b, c > 0 \text{ és } a, c \neq 1 \text{ és } ab \neq 1$$

6.5.8. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = 10 \cdot \log_b a, \text{ ahol } a, b > 0 \text{ és } a, b \neq 1$$

6.5.9. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = \log_b a, \text{ ahol } a > 1 \text{ és } b > 1$$

6.5.10. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\log_{bn} an = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}, \text{ ahol } a, b > 0, b \neq 1 \text{ és } bn \neq 1$$

6.5.11. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\log_{a^n b} a^{n+1} = \frac{(n+1) \log_b a}{1 + n \cdot \log_b a}, \text{ ahol } a, b > 0, b \neq 1 \text{ és } a^n b \neq 1$$

6.5.12. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\log_{b^{n+1}} ab^n = \frac{n + \log_b a}{n + 1}, \text{ ahol } a, b > 0, b \neq 1 \text{ és } n \neq -1$$

6.5.13. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$m^{\log_a n} = n^{\log_a m}, \text{ ahol } a > 0, a \neq 1, n > 0 \text{ és } m > 0$$

6.5.14. Bizonyítsuk be a következő azonosságot.

$$\log_{a^k} a^n = \frac{n}{k}, \text{ ahol } a > 0, a \neq 1, k \neq 0$$

6.5.15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b , az átfogója c , akkor igaz a következő egyenlőség.

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \cdot \log_{b+c} a, \text{ ahol } b + c \neq 1 \text{ és } c - b \neq 1$$

6.5.16. Bizonyítsuk be, hogy ha $a^2 + b^2 = 7ab$, akkor igaz a következő egyenlőség.

$$\lg \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b), \text{ ahol } a > 0 \text{ és } b > 0$$

6.5.17. Fejezzük ki a $\lg 15$ értékét a p és q segítségével, ha $\lg 75 = p$ és $\lg 45 = q$.

6.5.18. Fejezzük ki a $\lg 40$ értékét a p segítségével, ha $\lg 20 = p$.

6.5.19. Fejezzük ki a $\lg 540$ értékét a p és q segítségével, ha $\lg 3 = p$ és $\lg 5 = q$.

6.5.20. Fejezzük ki a $\log_6 \sqrt{150}$ értékét a p segítségével, ha $\log_6 5 = p$.

6.5.21. Fejezzük ki a $\log_6 54$ értékét a p segítségével, ha $\log_6 18 = p$.

6.5.22. Fejezzük ki a $\log_3 \sqrt[3]{24}$ értékét a p segítségével, ha $\log_3 2 = p$.

6.5.23. Fejezzük ki a $\log_a \frac{a^5}{\sqrt{b}}$ értékét a p segítségével, ha $\log_{\frac{a}{b}} a = p$.

6.5.24. Az $\log_a x = p, \log_b x = q$ és $\log_{abc} x = \frac{p+q}{2}$. Fejezzük ki a $\log_c x$ értékét p és q segítségével.

6.5.25. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:

$$\log_{2+\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3}) = -1$$

6.6. Vegyes feladatok

6.6.1. Írjuk fel a következő kifejezést úgy, hogy ne legyen benne tört.

$$\frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^3}}$$

6.6.2. Végezzük el a következő műveleteket.

1. $ab(a^{-1} + b^{-1})(b^2 - a^2)^{-1}$

2. $(ab^{-1} - a^{-1}b)(a^{-1} - b^{-1})^{-1}$

6.6.3. Végezzük el a következő műveleteket.

$$\frac{5x^{\frac{1}{2}} - 1}{3x - 3} + \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{2x^{\frac{1}{2}} + 2} - \frac{x^{\frac{1}{2}} + 1}{3x^{\frac{1}{2}} - 3}, \text{ ahol } x \neq 1$$

6.6.4. Végezzük el a következő négyzetre emeléseket.

1. $(2x - y - z)^2$ 2. $(-3a + 5b - c)^2$

6.6.5. Végezzük el a következő hatványozásokat.

1. $(a^2 + b^2)^3$ 2. $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^3$

6.6.6. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

1. $12a^2 - 6ab + 3b^2 - 6ab$

2. $x - x^3 + x^2 - x^4$

6.6.7. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

1. $\frac{16}{49}(a + b)^2 - 25$

2. $4(3x + 5y)^2 - 16(2x - y)^2$

6.6.8. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

1. $25x^4 + y^4 - 10x^2y^2$

2. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

6.6.9. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

1. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$

2. $2x^3 + x^2 - 4x + 12$

6.6.10. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

1. $a^6 - a^4 + 4a^3 + 4a^2$

2. $16x^2 - 8xy + y^2 - 49$

6.6.11. Végezzük el a következő polinomok osztását.

1. $(x^3 - 6x^2 - 5x + 30) : (2x + 3)$

2. $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x + 1)$

3. $(6x^3 + x^2 - 29x + 21) : (2x - 3)$

6.6.12. Alakítsuk szorzattá a következő polinomokat.

1. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ 2. $2x^3 + x^2 - 4x + 12$

6.6.13. Egyszerűsítsük a következő algebrai törteket.

1. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 8x + 7}$ 2. $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$

6.6.14. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törtekkel.

1. $1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1 + x}$ 2. $\frac{x^2 - 2ax}{a + x} + a + x$

6.6.15. Végezzük el a kijelölt műveleteket az alábbi algebrai törttel.

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)} - \frac{1}{(b-c)(a-c)} - \frac{1}{(c-a)(b-a)}$$

6.6.16. Végezzük el a következő hatványozásokat.

$$1. \quad (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \quad 2. \quad (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \quad 3. \quad (1 + \sqrt{a} + a)^2$$

6.6.17. Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket.

$$1. \quad a + 4b + 4\sqrt{ab} \quad 2. \quad x^2 + x - 2\sqrt{x^3} \quad 3. \quad p^2q + pq^2 + 2\sqrt{p^3q^3}$$

6.6.18. Egyszerűsítsük a következő törteket.

$$1. \quad \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{x + y + 2\sqrt{xy}} \quad 2. \quad \frac{\sqrt{px} - \sqrt{qy} - \sqrt{qx} + \sqrt{py}}{p + q - 2\sqrt{pq}}$$

6.6.19. Végezzük el a következő szorzásokat.

$$1. \quad (\sqrt{2} - \sqrt[4]{3})(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}) \quad 2. \quad (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^7})(\sqrt{x^3} + \sqrt[6]{x}) \quad 3. \quad \frac{x+y}{x-y} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x^2 - y^2)^4}{(x+y)^8}}$$

6.6.20. Bizonyítsuk be, hogy a következő kifejezés értéke egész szám.

$$\sqrt[3]{1 - 27 \cdot \sqrt[3]{26} + 9 \cdot \sqrt[3]{26^2} + \sqrt[3]{26}}$$

6.6.21. Fejezzük ki a $\lg 6$ értékét a és b segítségével, ha $\lg 48 = a$ és $\lg 72 = b$.

6.6.22. Fejezzük ki a $\lg 8$ értékét p segítségével, ha $\lg 5 = p$.

6.6.23. Fejezzük ki a $\log_{xy}(\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[3]{y})$ értékét p segítségével, ha $\log_{xy} x = p$. A feltétel, hogy

$$x > 0, y > 0, xy \neq 1.$$

6.6.24. Fejezzük ki a $\log_6 27$ értékét p segítségével, ha $\log_6 2 = p$.

6.6.25. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget:

$$\log_{3+2\sqrt{2}}(3 - 2\sqrt{2}) + \log_{3-2\sqrt{2}}(3 + 2\sqrt{2}) = -2$$

7. Első-és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

7.1. Elsőfokú egyenletek

7.1.1. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$$

7.1.2. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$6(x + 1)^2 + 2(x - 1)(x^2 + x + 1) - 2(x + 1)^3 = 32$$

7.1.3. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$5x(x - 3)^2 - 5(x - 1)^3 + 15(x + 2)(x - 2) = 5$$

7.1.4. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$(x + 2)^3 - x(3x + 1)^2 + (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 42$$

7.1.5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x - 4}{x + 4} - \frac{x + 4}{x - 4} + \frac{16x}{x^2 - 16} = 0$$

7.1.6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{x}{x^2 - 2x} + \frac{x - 4}{x^2 + 2x} = 0$$

7.1.7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{5x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{x + 1}{3x^2 + 9x} + \frac{3}{x} = \frac{2}{x + 3}$$

7.1.8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x + 1}{2 - 2x^2} - \frac{2x - 1}{x^2 - 1} + \frac{6}{x + 1} + \frac{1}{2 - 2x} = 0$$

7.1.9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{3}{1 - x^2} = \frac{2}{1 + 2x + x^2} - \frac{5}{1 - 2x + x^2}$$

7.1.10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{3}{4x^2 + 20x + 25} + \frac{4}{4x^2 + 4x + 1} = \frac{7}{4x^2 + 12x + 5}$$

7.1.11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{2x - 7}{2x^2 - 4x + 2} + \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} - \frac{1}{3 - 3x} = \frac{2}{x - 1}$$

7.1.12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(3x + 1)(x + 1) = 7(x + 1)$$

7.1.13. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x(x^2 - 1)(x + 2)(x + 3)}{x(x + 3)(x + 4)} = 0$$

7.1.14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{12x - 9}{3x - 2} + \frac{6x - 5}{2 - 3x} = 2x - 2$$

7.1.15. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{12x - 9}{3x - 2} + \frac{6x - 5}{2 - 3x} = 3x$$

7.1.16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = 2x + 4$$

7.1.17. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$3x + \frac{1}{x - 3} = x^2 + \frac{1}{x - 3}$$

7.1.18. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x - 1)^3 + 2 = x^3 + 3x - 2$$

7.1.19. Oldjuk meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán.

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = \frac{1}{2}$$

7.1.20. Oldjuk meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán.

$$\frac{17}{6}x - \frac{2}{3} = \frac{20}{6} + \frac{2x - y}{3} + \frac{x}{6}$$

7.1.21. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$\frac{\frac{x}{2} - \frac{2x-1}{3}}{\frac{x}{3} + \frac{3x-1}{2}} = \frac{2}{3}$$

7.1.22. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x} + 1$$

7.1.23. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$3 - \frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{x}}$$

7.1.24. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2 + 23x + 61}{x^2 + x - 30}$$

7.1.25. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x+2)^3 - (x-2)^3 = 12(x^2 - x) - 8$$

7.2. Másodfokú egyenletek

7.2.1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x-3)^3 + 2x(5x+1) = x^3 - (2x-1)^2 - 26$$

7.2.2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{14}{x^2 - 9} + \frac{1}{3 - x} + \frac{4 - x}{x + 3} = \frac{7}{3 + x}$$

7.2.3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{6 - x}{3x^2 - 12} - \frac{1}{x - 2} = 1 - \frac{1}{2 - x}$$

7.2.4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{1}{2(1 - x)} + \frac{5}{4x^2 + 4x + 4} = \frac{3x}{x^3 - 1}$$

7.2.5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x}{x - 10} - \frac{8}{x - 6} = \frac{4x}{x^2 - 16x + 60}$$

7.2.6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x}{x + 3} - \frac{2}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{4x}{x^2 + 4x + 3}$$

7.2.7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{6}{x^2 - 9} + \frac{13 - x}{3 + x} = \frac{3}{x + 3} - \frac{2}{3 - x}$$

7.2.8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x^2 - x + 16}{x^2 + x + 1} + \frac{36 + x}{x^3 - 1} = \frac{-x - 6}{1 - x}$$

7.2.9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{3}{x - 2} + \frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x - 4} = \frac{4}{x - 1}$$

7.2.10. Egyszerűsítsük a következő törtet.

$$\frac{2x^2 - 9x + 10}{2x^2 + x - 15}$$

7.2.11. Egyszerűsítsük a következő törtet.

$$\frac{2x^2 + 7x + 6}{12 + 5x - 2x^2}$$

7.2.12. Egyszerűsítsük a következő törtet.

$$\frac{6x^2 + 5x - 4}{3x^2 + 19x + 20}$$

7.2.13. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 + 2x)^2 + (x + 1)^2 = 13$$

7.2.14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 - 4x)^2 + 2x^2 - 3 = 8x - 1$$

7.2.15. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 1) = 45$$

7.2.16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 1} - x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0$$

7.2.17. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$3x^2 + 5x = 7 - \frac{2x^2 + x + 17}{3}$$

7.2.18. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $2 \leq x \leq 10$.

$$2x^2 + x = 10 - y^2$$

7.2.19. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 + 2x + y^2 = 4y - 5$$

7.2.20. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 + 3x + \sqrt{x - 3} = 18$$

7.2.21. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 + 4x + 3\sqrt{x-1} = 5 - y^2$$

7.2.22. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$3x^2 + 2x + 2\sqrt{x-2} - 4 = 12y - 2y^2 - 6$$

7.2.23. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$x^2 + 4x + \sqrt{x^2 + 6x + 1} + 6 = 2 - y^2$$

7.2.24. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x-5} + \sqrt{9-2x} = (2x+3y-1)^2 + 2x - y + 3$$

7.2.25. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} + x^2 - 2x - 4 = 0$$

7.2.26. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + y^2 - 4y + x^2 - 1 = 0$$

7.2.27. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\sqrt{-x^2 + 11x - 24} + x^2 + 3x + y^2 - 6y = 9$$

7.3. Paraméteres egyenletek

Elsőfokú egyenletek

7.3.1. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $b \neq 0, a \neq b$!

$$\frac{6b+7a}{6b} - \frac{3ax}{2b^2} = 1 - \frac{ax}{b^2-ab}$$

7.3.2. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $a \neq \pm b$!

$$\frac{ax-b}{a+b} + \frac{bx+a}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

7.3.3. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$!

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$$

7.3.4. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{c+3x}{4c^2+6cd} - \frac{c-2x}{9d^2-6cd} = \frac{2c+x}{4c^2-9d^2}$$

7.3.5. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{x-1}{n-1} + \frac{2n^2(1-x)}{n^4-1} = \frac{2x-1}{1-n^4} - \frac{1-x}{1+n}$$

7.3.6. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{3ab+1}{a} \cdot x = \frac{3ab}{a+1} + \frac{(2a+1)x}{a(a+1)^2} + \frac{a^2}{(a+1)^3}$$

7.3.7. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{3abc}{a+b} + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} + \frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}$$

7.3.8. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{x+m}{a+b} - \frac{ax}{(a+b)^2} = \frac{am}{a^2-b^2} - \frac{b^2x}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$$

7.3.9. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $x \neq 0, m \neq 0, m \neq x$!

$$\frac{m}{x} + \frac{x}{m} + \frac{m(x-m)}{x(x+m)} - \frac{x(x+m)}{m(x-m)} = \frac{mx}{m^2-x^2} - 2$$

7.3.10. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{a^2+x}{b^2-x} - \frac{a^2-x}{b^2+x} = \frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}$$

7.3.11. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{an}{a-x} + \frac{(a+n)(anx+nx^2+x^3)}{x^3-nx^2-ax^2-a^2n} = \frac{ax}{n+x} + \frac{nx^2}{x^2-a^2}$$

7.3.12. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\left(\frac{a+1}{ax+1} + \frac{x+1}{x+a^{-1}} - 1\right) : \left[\frac{a+1}{(x+a^{-1})a} - \frac{a(x+1)}{ax+1} + 1\right] = \frac{x}{2}$$

7.3.13. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2} - \frac{a-x}{ax-x^2-a^2} = \frac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}$$

7.3.14. Milyen egész m esetén lesz a következő egyenlet megoldása egész szám?

$$m^2(x-1) = 2m(2x-1) - 4x$$

7.3.15. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ha a valós paraméter!

$$\frac{x}{2a+x} - \frac{2a+x}{x-2a} = \frac{16a^2}{4a^2-x^2}$$

Másodfokú egyenletek

7.3.16. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $n \neq 0$!

$$\frac{x^2+1}{n^2x-2n} - \frac{1}{2-nx} = \frac{x}{n}$$

7.3.17. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $a \neq 0, a \neq x, x \neq 2a$!

$$\frac{a-x^2}{(a-x)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^3-ax(2a-x)}$$

7.3.18. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $a \neq x$!

$$1 - \frac{2b}{x-a} = \frac{a^2-b^2}{a^2+x^2-2ax}$$

7.3.19. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $n \neq 0, x \neq 0$!

$$\frac{1}{2n+nx} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2(n+3)}{x^3-4x}$$

7.3.20. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $n \neq 2a, x \neq 0$!

$$\frac{a+x-2n}{2a-n} - \frac{a-2n}{x} = 1$$

7.3.21. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $n \neq 1, x \neq 0$!

$$\frac{a}{nx - x} - \frac{a - 1}{x^2 - 2nx^2 + n^2x^2} = 1$$

7.3.22. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $x \neq a, x \neq 0, a \neq -b$!

$$\frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2}{x^2 + a^2 - 2ax} = \frac{5}{9x^2}$$

7.3.23. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $x \neq \pm 1, a \neq b$!

$$\frac{x + x^2}{1 - x^2} : \frac{1 - a^2}{(1 + ax)^2 - (a + x)^2} = \frac{ab}{(b - a)^2}$$

7.3.24. Az $x^2 + bx + 12 = 0$ egyenlet két gyökének különbsége 1. Határozzuk meg a b értékét!

7.3.25. Az $5x^2 - bx + 1 = 0$ egyenlet két gyökének különbsége 1. Határozzuk meg a b értékét!

7.3.26. Az $x^2 - 3ax + a^2 = 0$ egyenlet két gyökének négyzetösszege $\frac{7}{4}$. Határozzuk meg az a értékét!

7.3.27. Határozzuk meg az $x^2 + px + q = 0$ egyenletben p és q értékét úgy, hogy az egyenlet két gyöke is p és q legyen!

7.3.28. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2 . Írjuk fel azt a másodfokú egyenletet, melynek gyökei:

$$\frac{x_1}{x_2} \text{ és } \frac{x_2}{x_1}$$

7.3.29. Az $x^2 + 2bx\sqrt{b^2 - 3} + 4 = 0$ egyenlet gyökei egyenlők. Határozzuk meg b értékét!

7.3.30. Milyen határok között mozoghat az m szám értéke, ha azt akarjuk, hogy az

$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ egyenlet mindkét gyökére teljesüljön az alábbi egyenlőtlenség:

$$-2 < x_1, x_2 < 4$$

7.3.31. Az $x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \text{ és } x_2 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$$

Határozzuk meg a és b értékét!

7.3.32. Az $(5a - 1)x^2 + (5a - 2)x - 7a - 2 = 0$ egyenletnek egy valós gyöke van. Határozzuk meg a értékét!

7.3.33. Az $x^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$ egyenletben milyen valós p esetén lesz a gyökök négyzetösszege minimális?

7.3.34. Az $x^2 + (2p + 1)x + \frac{3}{2}p^2 - 2p - 4 = 0$ egyenletben milyen valós p esetén lesz a gyökök négyzetösszege minimális?

7.3.35. A $(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0$ egyenletben milyen valós k esetén lesz az egyik gyök a másik gyök kétszerese?

7.4. Abszolútértékes egyenletek

Elsőfokú egyenletek

7.4.1. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$\left| \frac{3x - 2}{x - 1} \right| = 2$$

7.4.2. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$\left| \frac{3|x| - 2}{|x| - 1} \right| = 2$$

7.4.3. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$\left| \frac{3|x| + 2}{|x| - 1} \right| = 3$$

7.4.4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|2x - 1| + |3x + 2| + |x| = 3$$

7.4.5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$$

7.4.6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left| \frac{2 - 3|x|}{1 + |x|} \right| = 1$$

7.4.7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x - 2| + |x - 3| + |2x - 8| = 9$$

7.4.8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|4x - 1| - |2x - 3| + |x - 2| = 0$$

7.4.9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4$$

7.4.10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x - 2| + |x - 3| + 2|x - 8| = 9$$

7.4.11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x - 2| + |x - 4| + |2x - 6| = 2$$

7.4.12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$||x| - 1| = 4 + x$$

7.4.13. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$||x| - 2| = 1$$

7.4.14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$||x + 2| - 3| = 1$$

7.4.15. . Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\left| 2 - |1 - |x|| \right| = 1$$

Másodfokú egyenletek

7.4.16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 3x + 2| = 3x - x^2 - 2$$

7.4.17. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|2x + 3| - 1 = |2x^2 - x - 1|$$

7.4.18. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 2x - 3| = |2x - 5| + 1$$

7.4.19. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$|x^2 - 2x - 3| = |x^2 - 2x + 5|$$

7.4.20. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán.

$$|x^2 - 1| = -|x| + 1$$

7.4.21. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 6x + 8| = \frac{3}{2}$$

7.5. Irracionális egyenletek

7.5.1. Miért nem lehet megoldani az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán?

$$a, \quad \sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = x-4$$

$$b, \quad \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2} = 2$$

7.5.2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2-9} + \sqrt{x^2-16} + \sqrt{x^2-25} = 7$$

7.5.3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{(2x+3)\sqrt{2x+3}} = \sqrt{6-x\sqrt{6-x}}$$

7.5.4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{3-x} = x^2 - 5x + 7$$

7.5.5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} = x^2 - x + 2$$

7.5.6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$$

7.5.7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{2x + 17 - 8\sqrt{2x + 1}} + \sqrt{5 + 2x + 4\sqrt{2x + 1}} = 8$$

7.5.8. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \geq 0$!

$$10\sqrt{x} + \sqrt{2x - 5\sqrt{x} + 6} = 4x + 6$$

7.5.9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{11 + x + 6\sqrt{x + 2}} + \sqrt{6 + x - 4\sqrt{x + 2}} = 7$$

7.5.10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \geq 3a$!

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x-2a} = \sqrt{x-3a}$$

7.5.11. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \geq -1$!

$$\sqrt{17 + x - 8\sqrt{x + 1}} + \sqrt{5 + x - 4\sqrt{x + 1}} = 6$$

7.5.12. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 + 24}} = x + 1$$

7.5.13. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0$!

$$\frac{3+x}{3x} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{x}} \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{2}{x^2}}$$

7.5.14. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x > 3$!

$$\frac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x + 3} = \frac{7}{\sqrt{x - 3}}$$

7.5.15. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0$!

$$\frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}$$

7.5.16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0$!

$$\frac{2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{x}$$

7.5.17. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \geq 0$!

$$\sqrt{2\sqrt{7} + \sqrt{x}} - \sqrt{2\sqrt{7} - \sqrt{x}} = \sqrt[4]{28}$$

7.5.18. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x > 0$!

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

7.5.19. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0$!

$$\frac{\sqrt{27+x} + \sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x} - \sqrt{27-x}} = \frac{27}{x}$$

7.5.20. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}$$

7.5.21. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \geq 0$!

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x-8$$

7.5.22. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ahol $x \geq 0$!

$$\frac{2-x}{2-\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2-x}{2}}$$

7.5.23. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7$$

7.5.24. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{3x^2 + 5x - 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$$

7.5.25. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt{x^2 + 4x + 8} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{2(x^2 + 4x + 6)}$$

7.5.26. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{10 + 2x}} = -\sqrt[3]{\sqrt{15 - 2x} - 9}$$

7.5.27. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

7.6. Egyenlőtlenségek

Elsőfokú egyenlőtlenségek

7.6.1. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{2x+3}{3x+2} \leq 2$$

7.6.2. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3x + 1}{2x - 5} > 2$$

7.6.3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3(1 - 4x)}{2x + 1} \geq -9$$

7.6.4. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{x + 4}{2x + 3} \leq -2$$

7.6.5. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3}{x - 1} < \frac{2}{2x + 5}$$

7.6.6. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{2} < \frac{x + 1}{x - 2}$$

7.6.7. Határozzuk meg azt a legnagyobb egész számot, amelyik igazá teszi a következő egyenlőtlenséget.

$$\frac{2x + 1}{3} - \frac{3x - 1}{2} > 1$$

7.6.8. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyik igazá teszi a következő egyenlőtlenséget.

$$\frac{x - 1}{x - 2} < \frac{x + 3}{x}$$

7.6.9. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{3 - 5x}{2x - 5} < -3$$

7.6.10. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{4x + 6}{7x - 2} \leq 1$$

Elsőfokú Abszolútértékes egyenlőtlenségek

7.6.11. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{1}{|x| - 3} < \frac{1}{2}$$

7.6.12. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{|x - 1|}{x + 2} < 1$$

7.6.13. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{2}{|x - 2|} > \left| \frac{-3}{2x - 1} \right|$$

7.6.14. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x - 2| < \frac{x - 1}{2}$$

7.6.15. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$2|x + 1| > x + 4$$

7.6.16. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x + 2| > |x|$$

7.6.17. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x - 2| \leq |x + 4|$$

7.6.18. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|2x - 3| - |3x + 7| > 0$$

7.6.19. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x - 1| + |2 - x| > 3 + x$$

7.6.20. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x + 2| + |x + 1| + |x - 4| > 9$$

Elsőfokú paraméteres egyenlőtlenségek

7.6.21. Oldjuk meg a következő paraméteres egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$x - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) < \frac{2(x+1)}{3a}, \text{ ahol } a \neq 0$$

7.6.22. Oldjuk meg a következő paraméteres egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$a(x-3) > x-5$$

7.6.23. Oldjuk meg a következő paraméteres egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{x+1}{3a} + \frac{2x-3}{2} > \frac{3x+1}{6a}, \text{ ahol } a \neq 0$$

7.6.24. Oldjuk meg a következő paraméteres egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ha a gyöke: 1. Pozitív, 2. Zérus, 3. Negatív, 4. Egész szám.

$$2(x-a) = \frac{4x-9a}{5} + 1$$

7.6.25. Oldjuk meg a következő paraméteres egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ha a gyöke: 1. Nagyobb hétnél, 2. Egész szám.

$$3(x-2a) + 4(x-a) = 5x$$

Másodfokú egyenlőtlenségek

7.6.26. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{x-2}{x+2} \geq \frac{2x-3}{4x-1}$$

7.6.27. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{2}{x-3} > \frac{x}{1-x}$$

7.6.28. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{1}{x-1} - 3 < \frac{2}{x-3}$$

7.6.29. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{(8-x)(-x+5)}{x^2-5x+6} < 0$$

7.6.30. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+8} > 0$$

7.6.31. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget és adjuk meg a legkisebb egész számot, amelyik igazgá teszi.

$$\frac{x-5}{x^2+5x-14} > 0$$

7.6.32. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget és adjuk meg azt a legnagyobb egész számot, amelyik igazgá teszi.

$$\frac{x+4}{x^2-9} - \frac{2}{x+3} < \frac{4x}{-3x-x^2}$$

7.6.33. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$(3x-1)(4-x)(2x-3)^2 > 0$$

7.6.34. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget és adjuk meg azt a legnagyobb egész számot, amelyik igazgá teszi.

$$(x+1)(x-3)^2(x-5)(x-4)^2(x-2) < 0$$

7.6.35. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{2}{2x+1} > x^2 - \frac{5}{2}x + 2$$

Másodfokú Abszolútértékes egyenlőtlenségek

7.6.36. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x^2-2x| < x$$

7.6.37. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$$

7.6.38. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 3x| < -x + 2$$

7.6.39. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 3x + 2| < 3x - x^2 - 2$$

7.6.40. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$$

7.6.41. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8$$

7.6.42. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\left| \frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

7.6.43. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\left| \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 3x + 2} \right| < 3$$

Másodfokú paraméteres egyenlőtlenségek

7.6.44. Milyen valós p paraméter esetén teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$px^2 + 12x - 5 < 0$$

7.6.45. Milyen valós p paraméter esetén teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$-2 < \frac{x^2 + px - 2}{-x^2 + x - 1} < 3$$

7.6.46. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol a, b pozitív valós szám és $b < a$.

$$x^2 - 4a^2 - 12ab - 9b^2 < 0$$

7.6.47. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol a, b pozitív valós szám és.

$$(x + a)(x - b) + (x + b)(x - a) < 2a^2 + 2b^2$$

7.6.48. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol a, b pozitív valós szám és $b < a$.

$$\frac{(a - x)(x - b)}{ax - b} < 0$$

7.6.49. Van-e olyan p valós paraméter, amelyre a következő egyenlőtlenségnek nincs valós megoldása?

$$(p + 3)x^2 - 5x - 4 < 0$$

7.6.50. Milyen p valós paraméter esetén teljesül minden valós számra a következő egyenlőtlenség?

$$x^2 + 2(p + 1)x + 9p - 5 > 0$$

7.7. Egyenletrendszerek

Elsőfokú egyenletrendszerek

7.7.1. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 3y + 1 - \frac{3(x - 5y)}{4} = x - \frac{27y + 22}{8} \\ x + 3 - \frac{5x - 9y}{6} = 3y - \frac{3 - 5x}{9} \end{cases}$$

7.7.2. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{2(3x - y)}{5} = \frac{3y - 10x}{3} + 2x + 1 \\ \frac{4x - 3y}{3} + \frac{8x - 3y}{2} = y + 1 \end{cases}$$

7.7.3. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 0,5 - y = \left\{ \frac{1}{2} [x - 3(y - 0,4)] + 1,4 \right\} \cdot 0,75 \\ 2 \left[1 - \frac{1 - 2(x - y)}{5} \right] - 1,4 = 3(2x + 3) \end{cases}$$

7.7.4. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 2 - \frac{x + 2y}{5} = 7x - 5y + 4 \\ 7x - 5y + 4 = -\frac{1}{3} [5 + 3(x - 3) - y] \end{cases}$$

7.7.5. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{y + 2} = 1 \\ \frac{25}{x - 5} + \frac{3}{y + 2} = 2 \end{cases}$$

7.7.6. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{11}{2x - 3y} + \frac{18}{3x - 2y} = 13 \\ \frac{27}{3x - 2y} + \frac{2}{3y - 2x} = 1 \end{cases}$$

7.7.7. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{4}{2x + y + 1} + \frac{1}{2 - 2x + y} = 7 \\ \frac{4}{2x + y + 1} + \frac{1}{2x - y - 2} = -3 \end{cases}$$

7.7.8. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + 2y = 9 \\ y - 3z = -5 \\ 5z - x = 14 \end{cases}$$

7.7.9. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 2z = -2 \\ 2y + 3z = -3 \end{cases}$$

7.7.10. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + y - z = 11 \\ x - y + z = 1 \\ y + z - x = 5 \end{cases}$$

7.7.11. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + \frac{y}{4} + z = -6 \\ \frac{x}{5} + y - z = 1 \\ y - \frac{z}{6} - x = 6 \end{cases}$$

7.7.12. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

7.7.13. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{6}{x+y} + \frac{5}{y+3z} = 2 \\ \frac{15}{x+y} - \frac{4}{x-2z} = \frac{1}{2} \\ \frac{10}{y+3z} - \frac{7}{x-2z} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

7.7.14. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$$

Másodfokú egyenletrendszerek

7.7.15. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2yz = 100 \\ 2xy - z^2 = 100 \end{cases}$$

7.7.16. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x^2 + 10y + 41 = 0 \\ y^2 - 2z - 23 = 0 \\ z^2 - 6x + 17 = 0 \end{cases}$$

7.7.17. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x^2 - yz = y - x \\ y^2 - zx = z - y \\ z^2 - xy = x - z \end{cases}$$

7.7.18. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x^2 - xy - xz + z^2 = 0 \\ x^2 - xz - yz + 3y^2 = 2 \\ y^2 + xy + yz - z^2 = 2 \end{cases}$$

7.7.19. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \frac{2x^2}{1+x^2} = y \\ \frac{2y^2}{1+y^2} = z \\ \frac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$$

7.7.20. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$$

7.7.21. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ 2xy = y \end{cases}$$

7.7.22. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x(x - 2y) + \sqrt{x^2 - 2xy + 5} = 1 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

7.7.23. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{x - 2y + 3} = 4(1 + y) \\ x^2 + 2y^2 - xy = 46 \end{cases}$$

7.7.24. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1000 \\ 4y^2 + z(z + 2x) = 2x(2y - x) \end{cases}$$

7.7.25. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{2x + y}{y - 1}} + \sqrt{\frac{3x - 9}{7y}} = 2\sqrt{3} \\ x(x - 2y) = 3y^2 \end{cases}$$

7.7.26. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0, y \neq 0$!

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \\ xy - 2(x + y) + 4 = 0 \end{cases}$$

7.7.27. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0, y \neq 0$!

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} + x + y = \frac{203}{xy} \\ x(x + 1) + y(y + 1) = 36 \end{cases}$$

7.7.28. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2y - 3} = 2x - 1 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

7.7.29. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán, ahol $x \neq 1, y \neq 1$!

$$\begin{cases} \frac{1 + \frac{x + 1}{y - 1}}{1 + \frac{y + 1}{x - 1}} = \frac{1}{3} \\ x^2 + 2y^2 - 4x - 3y - 2xy = 0 \end{cases}$$

7.8. Szöveges feladatok

7.8.1. A 850-et osszuk két részre úgy, hogy az első rész 8%-nak és a második rész 24%-nak az összege 850-nek a 12%-a legyen.

7.8.2. Egy osztályban a tanulók 30%-nak volt félévkor jelese matematikából. Ha 4-gyel kevesebb jeles lett volna, akkor ötször annyi tanulónak lett volna jelestől különböző osztályzata, mint ahány jeles lett volna. Mennyi az osztály létszáma?

7.8.3. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 12. Ha a jegyeket fordított sorrendben írjuk, akkor az eredeti szám és az új szám különbsége egy pozitív szám négyzete. Melyik az eredeti szám?

7.8.4. Egy apa és fia életkorának összege 50 év. Öt év múlva az apa háromszor annyi idős lesz, mint a fia. Hány év múlva lesz a fiú feleannyi idős, mint az apa?

7.8.5. András és Béla együtt 70 évesek. András ma kétszer annyi idős, mint Béla volt akkor, amikor András Annyi idős volt, mint most Béla. Hány éves Béla?

7.8.6. Van két arany-ezüst ötvözet. Az elsőben 2:3, a másodikban 3:7 a fémek aránya. Mennyit kell venni a két ötvözetből, hogy 80 kg olyan ötvözetet kapjunk, amelyben az arany-ezüst aránya 5:11?

7.8.7. Az óra mutatói 6 órakor egy egyenesbe esnek, és ellentétes irányba mutatnak. Mikor következik be ez a helyzet 6 óra után, illetve 6 óra előtt?

7.8.8. Az óra mutatói 12 órakor fedik egymást. Hány órakor fogják legközelebb ismét fedni egymást?

7.8.9. Mikor találkozik, és mikor merőleges egymásra az óra két mutatója 3 óra után?

7.8.10. Két vízcsapot egyszerre kinyitva $\frac{2}{3}$ óra alatt töltenek meg egy medencét. Az általuk szolgáltatott vízmennyiség aránya 3:4. Mikor telik meg a medence, ha az első csapot 6 órakor, a másodikat 6 óra 25 perckor nyitják meg?

7.8.11. András és Béla sakkoznak. Andrásnak 6 másodperccel kevesebb, Bélának 10 másodperccel több időre van szüksége ahhoz, hogy saját figuráit felállítsa a táblára, mint amennyi időre akkor lenne szükség, ha az összes sakkfigurát közösen raknák fel. Mennyi idő alatt rakják fel egyedül a saját figuráikat?

7.8.12. Egy túrázó öt órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, azután megfordult és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 kilométert tett meg óránként. Mekkora utat járt be?

7.8.13. Egy motorcsónak és egy evezős csónak ugyanakkor, azonos irányban elindul. A motorcsónak 15 km megtétele után visszafordul, és a visszafordulás helyétől 9 km-re találkozik az evezőssel. Határozzuk meg a motorcsónak sebességét, ha az evezőse 4 km/h.

7.8.14. Egy 36 literes edény tele van alkohollal. Az edényből kiöntünk valamennyi folyadékot és a helyére vizet öntünk. Összekeverés után ismét kiöntünk ugyanannyi folyadékot, mint először. Az edényben 25 liter alkoholmaradt. Mennyi alkoholt öntöttünk ki először és mennyit másodszer?

7.8.15. Egy brigád egy bizonyos munkát 15 nap alatt végezne el. Ha a brigádnak 4-gyel kevesebb tagja lenne, és napi 2 órával többet dolgoznának, a munka 16 napig tartana. A munkát 8 nap alatt akarják befejezni, ezért 4 új tagot vesznek fel, és napi 4 órával többet dolgoznak. Hány tagú volt eredetileg a brigád, és hány órát dolgoztak volna naponta?

7.8.16. Három cső együtt 2,5 óra alatt tölt meg egy medencét. Mennyi idő alatt telik meg a medence az egyes csöveken külön-külön, ha egyedül a második csövön át kétszer annyi, egyedül a harmadik csövön 5 órával hosszabb idő alatt telik meg, mint az elsőn?

7.8.17. Egy munka elvégzéséhez három gépet használtak. Ezt a munkát az első és a második gép együtt 7,2 nap alatt, az első és a harmadik gép együtt 9 nap alatt, a második és harmadik gép pedig 12 nap alatt végezné el. Hány nap alatt végeznék el a gépek a munkát külön-külön? Miután a gépek 3 napig dolgoztak a munkán, a második gépet máshova vitték. Hány napig kellett még dolgoznia az első és a harmadik gépnek a hátralévő munkán?

7.8.18. Egy személyvonatot 6 percig feltartóztatták. Hogy a késést behozza, egy 20 km-es szakaszon az eredeti sebességét 10 km/h-val megnövelte. Mekkora volt az eredeti sebessége?

7.8.19. Egy 50 méter hosszú katonai menetoszlop végéről az elejére szalad egy futár, majd azonnal visszatér az oszlop végére. Közben az oszlop 120 méter utat tesz meg. Mekkora utat tett meg a futár?

7.8.20. Két folyóparti város távolsága 240 km. Ezt az utat a hajó oda-vissza 25 óra alatt teszi meg. Mekkora sebességgel haladna ez a hajó álló vízben, ha a folyó 4 km/h sebességgel folyik?

7.9. Vegyes feladatok

Elsőfokú egyenletek

7.9.1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{x}{x^2 - 2x} - \frac{4}{x^2 + 2x} = 0$$

7.9.2. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{x+2}{x+6} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) = \frac{2x}{3}$$

7.9.3. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$5x(x-3)^2 - 5(x-1)^3 + 15(x+2)(x-2) = 5$$

7.9.4. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{\frac{x}{2} - 2}{x-1} + \frac{\frac{x}{2} + 2}{x+1} = 1$$

7.9.5. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{9x-5}{3x+1} + \frac{12x+1}{2-6x} = \frac{9-108x+36x^2}{4(9x^2-1)}$$

Másodfokú egyenletek

7.9.6. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x-1}{x^3+1}$$

7.9.7. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{9x^2-18x}{x^2-9} + \frac{6x}{3+x} - \frac{3+x}{3-x} = \frac{6(3x-3)}{x^2-9}$$

7.9.8. Egyszerűsítsük a következő törtet.

$$\frac{x^2 - 9x + 14}{2x^2 - 2x - 4}$$

7.9.9. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x^2 + x + 3)(x^2 + x + 1) = 15$$

7.9.10. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán.

$$\frac{3}{x^2 + 3x - 3} - 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

Paraméteres egyenlet

7.9.11. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $a \neq 0, a \neq -x, a \neq -2x$!

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0$$

7.9.12. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $x \neq \pm b$!

$$\frac{2x}{x+b} - \frac{x}{b-x} = \frac{b^2}{4(x^2 - b^2)}$$

7.9.13. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $a \neq x$!

$$1 - \frac{2a}{x-a} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + x^2 - 2ax}$$

7.9.14. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $b \neq 0, c \neq 0, a \neq 2b$!

$$\frac{x^2}{ab - 2b^2} = \frac{a-b}{ac^2 - 2bc^2} + \frac{x}{bc}$$

7.9.15. Oldjuk meg a következő egyenletet, ahol $x \neq \pm a$!

$$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2 - a^2)}$$

7.9.16. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán, ha a valós paraméter!

$$\frac{2(a-1) - 4ax}{a^2 - 1} = \frac{(1-3a)x}{a^2 - a} + \frac{1-a}{a^2 + a}$$

7.9.17. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán, ha az a paraméter pozitív egész szám!

$$2 = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{a}} - \frac{\frac{1}{2a}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2a}}$$

7.9.18. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán, ha az a paraméter pozitív egész szám!

$$\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{x}} - \frac{\frac{x}{a}}{2\left(\frac{x}{a} + 1\right)} = 0$$

7.9.19. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán, ha az a paraméter pozitív egész szám!

$$\left(\frac{x+8a}{x-8a} - \frac{x+12a}{x-12a}\right) : \left(\frac{x+4a}{x-8a} + \frac{4a-x}{x-12a}\right) = \frac{2}{3}$$

7.9.20. Oldjuk meg a következő egyenletet az egész számok halmazán, ahol a egész paraméter!

$$x(a+4) + a(x+2) = 2$$

Abszolútértékes egyenlet

7.9.21. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$|3 - 2|x|| = |2 - x| - 3$$

7.9.22. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$\left| \left| |x| - 2 \right| - 1 \right| - 2 = 2$$

7.9.23. Oldjuk meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán.

$$||3x - 1| - |2x + 1|| = 1$$

7.9.24. A p valós paraméter mely értékeire lesz kettőnél több gyöke a valós számok halmazán a következő egyenletnek?

$$|2x + 3| + |2x - 3| = px + 6$$

Irracionális egyenlet

7.9.25. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$x = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}}$$

7.9.26. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{\sqrt{1 + a^{-2}x^2} - xa^{-1}}{\sqrt{1 + a^{-2}x^2} + xa^{-1}} = \frac{1}{4}$$

7.9.27. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{\sqrt{1 + a^2x^2} - ax}{\sqrt{1 + a^2x^2} + ax} = \frac{1}{c^2}$$

7.9.28. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x + c + \sqrt{x^2 - c^2}}{x + c - \sqrt{x^2 - c^2}} = \frac{9(x + c)}{8c}$$

7.9.29. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{(a - x)\sqrt{a - x} + (x - b)\sqrt{x - b}}{\sqrt{a - x} + \sqrt{x - b}} = a - b$$

7.9.30. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} = 3$$

7.9.31. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} = 20$$

7.9.32. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\frac{x \cdot \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$$

Elsőfokú egyenlőtlenség

7.9.33. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán.

$$\left| \frac{2}{x-13} \right| > \frac{8}{9}$$

7.9.34. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x-1| + |x+2| - |x-3| > 4$$

7.9.35. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$||2x-1|-3| > 2$$

7.9.36. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget az egész számok halmazán.

$$\left| \frac{1}{x-15} \right| > \frac{4}{9}$$

7.9.37. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1$$

Másodfokú egyenlőtlenség

7.9.38. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$|x^2 - 4x| < 5$$

7.9.39. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán, ahol p pozitív valós paraméter.

$$(p+x)(2x+p) + (x-p)(p-2x) > (p+2x)^2 - p^2$$

7.9.40. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$$

7.9.41. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} > 0$$

7.9.42. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x + 8} > 0$$

Elsőfokú egyenletrendszer

7.9.43. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - u = 5 \\ y - 2z + 3u - x = 0 \\ z - 2u + 3x - y = 0 \\ u - 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

7.9.44. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 6x - 2y - 3z = 25 \\ 3y + z - 2v = 20 \\ 4x - 3y - 2u = 13 \\ x - 2v + u = 4 \\ 2y + v = 17 \end{cases}$$

7.9.45. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12 \\ x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

7.9.46. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán a Gauss módszerrel!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

7.9.47. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán a Gauss módszerrel!

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - 7x_2 + 13x_3 + 12x_4 = 22 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 10 \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 6x_4 = 18 \end{cases}$$

7.9.48. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán a Gauss módszerrel!

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 4x_1 - x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 18 \end{cases}$$

Másodfokú egyenletrendszer

7.9.49. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} x(x - 2y) + \sqrt{x^2 - 2xy + 5} = 1 \\ x - 4y = -3 \end{cases}$$

7.9.50. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0, y \neq 0$!

$$\begin{cases} \frac{x}{2y} + y = -2 \\ \frac{y}{x} - 2y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

7.9.51. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha annak csak egy valós számpár megoldása van!

$$\begin{cases} 4x + \sqrt{y^2 - 4x + 2} = y^2 - 4 \\ x + y = 2a - 1 \end{cases}$$

7.9.52. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán, ahol $x \neq 0, y \neq 0$!

$$\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{y+1}{3} = 4 \\ \frac{5}{y} + \frac{x+3}{5} = 2 \end{cases}$$

7.9.53. Oldjuk meg az egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{cases} 2x^2 + y + \sqrt{2x^2 + y} = 72 \\ 2x^2 - y - \sqrt{2x^2 - y} = 30 \end{cases}$$

Szöveges feladatok

7.9.54. Mekkora szöget zár be az óra kis-és nagymutatója 9 óra 20 perckor?

7.9.55. Milyen időpontokban fedik egymást az óra kis-és nagymutatója?

7.9.56. Egy vizsgán 20 kérdésre kell válaszolni. Az értékelésnél minden jó válasz 5 pontot ér, minden rossz válasz esetén 2 pontot levonnak. Ha nem válaszol a vizsgázó a kérdésre, akkor arra 0 pontot kap. Az egyik vizsgázó 48 pontot kapott. Mennyi jó választ adott a kérdésekre?

7.9.57. Több testvér osztozik az örökségen. A végrendelet szerint A kap 20000 Ft-t és a maradék tized részét, B kap 40000 Ft-t és a maradék tized részét, és így tovább. Az osztozkodás után kiderült, hogy a testvérek mindegyike egyenlő összeget kapott. Hányan voltak a testvérek? Mennyi pénzt kaptak fejenként? Mennyi volt az örökség?

7.9.58. Két gyalogos egyszerre indul A-ból B-be. Az első, aki óránként 2 km-rel többet tesz meg, éppen egy órával hamarabb ér céljához. Hány kilométert tesznek meg óránként, ha B 24 km-re van A-tól?

7.9.59. Az A városból reggel 5 órakor tehervonat indul B városba, amely A-tól 1080 km távolságra van. 8 órakor B-ből gyorsvonat indul A-ba. A gyorsvonat sebessége 15 km/h-val nagyobb, mint a tehervonaté. Félúton találkoznak. Hány órákor történik ez?

7.9.60. Egy 120 m hosszú körpályán két korcsolyázó azonos irányban halad, és 20 percenként találkoznak. Az egyik korcsolyázó a kört 1 perccel hamarabb fűtja le, mint a másik. Mennyi a két sportoló sebessége?

7.9.61. Az A és B kerékpárosok a C, illetve D városból indultak el egymással szemben. Amikor találkoztak, kiderült, hogy A 6 km-rel többet tett meg, mint B. Ha mindketten ugyanazzal a sebességgel folytatják tovább az útjukat, akkor A a D városba 4,5 órával, B a C városba 8 órával a találkozás után fog megérkezni. Milyen távol van C és D város?

8. Exponenciális és logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

8.1. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

8.1.1.

$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{9x - 81} = 0$$

8.1.2.

$$3^{x^2-1} \cdot 5^{x-3} = 5,4$$

8.1.3.

$$\sqrt[3]{9^{x+1}} = (3 \cdot 27^x)^{x+1}$$

8.1.4.

$$\sqrt{9^x - 8 \cdot 3^x} = 3^{x+1} - 24$$

8.1.5.

$$\frac{3 \cdot 2^x - 1}{2^{x+1} - 1} + \frac{2 \cdot 2^x - 1}{3 \cdot 2^x - 1} = \frac{5}{2}$$

8.1.6.

$$4^x - 3 \cdot 2^x + \frac{16}{2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 4} = 6$$

8.1.7.

$$\frac{3^x}{3^{\sqrt{x-2}}} - \frac{3^{3+\sqrt{x-2}}}{3^x} = 6$$

8.1.8.

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

8.1.9.

$$2^x + \sqrt{2^{x+2} \cdot 5^x} = 3 \cdot 5^x$$

8.1.10.

$$4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$$

8.1.11.

$$3^{2x} - \sqrt{9^x + 1} - 2 \cdot 3^x = 7$$

8.1.12.

$$\sqrt{4^{-x} - 2^{3-x} + 16} + \sqrt{4^{-x} + 2^{3-x} + 16} = 8$$

8.1.13.

$$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$$

8.1.14.

$$0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$$

8.1.15.

$$0,5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = 64^{-1}$$

8.1.16.

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$$

8.1.17.

$$\left[2 \cdot (2^{\sqrt{x}+3})^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$$

8.1.18.

$$3 \cdot \sqrt[x]{81} - 10 \cdot \sqrt[x]{9} + 3 = 0$$

8.1.19.

$$3^{x-2} - 3^{x-1} + 2 \cdot 3^x = 4^x - 2 \cdot 4^{x-1} + 8 \cdot 4^{x-2}$$

8.1.20.

$$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

8.1.21.

$$8 + 7 \cdot 2^x - 4^x \geq 0$$

8.1.22.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4-x}{x+5}} \leq 1$$

8.1.23.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x-1}{x+3}} > 8$$

8.1.24.

$$\frac{27}{3^{|x-4|}} \geq 9^x$$

8.1.25.

$$\frac{3^x - 9}{2^x - 1} \leq 0$$

8.1.26.

$$3^{2x^2+2x-12} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-2}{x+3}}$$

8.1.27.

$$\sqrt{3^x + 55} \geq 1 - 3^x$$

8.1.28.

$$(x^2 - x + 1)^{x-2} > 1$$

8.1.29.

$$(x - 4)^{x^2 - 7x + 4} \geq \frac{1}{x^2 - 8x + 16}$$

8.2. Logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

8.2.1.

$$(\log_4 4x)^2 - \log_4 \frac{x}{4} = 8$$

8.2.2.

$$\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$$

8.2.3.

$$2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 + 1 - 2x) = \frac{4}{3}$$

8.2.4.

$$8(\log_4 \sqrt{x})^2 - 5 \log_4 16x + 12 = 0$$

8.2.5.

$$6^{\log_{\frac{1}{6}}(x-3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_4(x^2+5x+12)}$$

8.2.6.

$$4(\log_{x+1}(x^2 - 1))^2 = 9 \log_{x+1}(x - 1)^2$$

8.2.7.

$$\log_{8x} 64 + 3 \log_{2x} 8 = 11$$

8.2.8.

$$\log_{3x} 81 + \log_{(x^3)} 9 = \frac{8}{3}$$

8.2.9.

$$\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$$

8.2.10.

$$\log_x(x^x) - \log_{(x^x)} x = \frac{8}{x}$$

8.2.11.

$$x^{\log_3 x} = 27\sqrt{x}$$

8.2.12.

$$x^{\log_2 x} = \frac{x^3}{4}$$

8.2.13.

$$\sqrt[3]{x^{-3+\log_2(2x^2)}} = \frac{x^2}{4}$$

8.2.14.

$$6(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = (x^2)^{\log_3 x} - 6075$$

8.2.15.

$$\log_4\{2 \cdot \log_3[1 + \log_2(1 + 3 \cdot \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$$

8.2.16.

$$\log_a y + \log_a(y + 5) + \log_a 0,02 = 0$$

8.2.17.

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$$

8.2.18.

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}$$

8.2.19.

$$3 \cdot \log_{x \cdot a^2} x + \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x = 2$$

8.2.20.

$$\log_4(x + 12) \cdot \log_x 2 = 1$$

8.2.21.

$$\log_x(5x^2) \cdot (\log_5 x)^2 = 1$$

8.2.22.

$$1 + \log 2x - \log(1 - 3x) = 0$$

8.2.23.

$$6 \cdot \log_x 2 + \log_2 x = \log_2 32$$

8.2.24.

$$3 \cdot \sqrt{\log x} + 2 \cdot \log \sqrt{\frac{1}{x}} = 2$$

8.2.25.

$$\log_x \sqrt{x} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{4}$$

8.2.26.

$$2 \cdot (\log 2 - 1) + \log(5^{\sqrt{x}} + 1) = \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$$

8.2.27.

$$\log(x + \sqrt{3}) = -\log(x - \sqrt{3})$$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

8.2.28.

$$\log_{0,2}(2x - 1) \geq -1$$

8.2.29.

$$\log_{\frac{1}{2}}(6x + 18) \geq -4$$

8.2.30.

$$\sqrt{x^2 - 3x} \cdot \log_{0,1}(x + 2) < 0$$

8.2.31.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 3x + 1$$

8.2.32.

$$\log_{\frac{1}{2}} 3x + \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) - 1$$

8.2.33.

$$\log_3 \left(\frac{1}{x^2} \right) + 3 \log_x \left(\frac{1}{9} \right) \geq -8$$

8.2.34.

$$2 \log_x \left(\frac{1}{4} \right) + \log_4 \left(\frac{1}{x} \right) \leq -3$$

8.2.35.

$$\log_2 x \leq \sqrt{4 \left((\log_2 x)^2 - \frac{1}{\log_x 2} \right) + 1} \leq \log_2 x^2$$

8.2.36.

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3 - 2x}{1 - x}} > 1$$

8.2.37.

$$\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \leq 2$$

8.2.38.

$$\log_x(5x - 2x^2 - 2) < 1$$

8.3. Egyenletrendszerek

8.3.1. Oldjuk meg a pozitív valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \log_2(xy^3) = 1 \\ \log_2(x^2y) = -3 \end{cases}$$

Oldjuk meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletrendszereket:

8.3.2.

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}} = 32 \cdot 8^{\frac{y}{x}} \\ 3^{\frac{y}{x}} = 3 \cdot 9^{\frac{1-y}{x}} \end{cases}$$

8.3.3.

$$\begin{cases} 9^{-1} \cdot 9^{\frac{x}{y}} - 27 \cdot 27^{\frac{y}{x}} = 0 \\ \log(x-2) - \log(2-y) = 0 \end{cases}$$

8.3.4.

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2 \\ \log_3(2y-x) = 0 \end{cases}$$

8.3.5.

$$\begin{cases} \log_2(2x+y) - \log_2(x-1,5y) = 2 \\ \log_3(x+y) + \log_3(x-y) = 2 + \log_3 5 \end{cases}$$

8.3.6.

$$\begin{cases} x^2 - x + 7^{\log_{49}(x^2-y+3)} = 9 \\ \log_{x^2} y + \log_{y^2} x = 1 \end{cases}$$

8.3.7.

$$\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 \sqrt{x}} = 6 \\ \log_2(xy) = 3 \end{cases}$$

8.3.8.

$$\begin{cases} \log_2 \frac{x^2}{y} - \log_2 \frac{y^2}{x} = 3 \\ x^{\log_2 y} + y^{\log_{\frac{x}{2}} y} = 39 \end{cases}$$

8.3.9.

$$\begin{cases} \log_x(xy) + \log_y\left(\frac{1}{x^2 y^2}\right) = 0 \\ x^{\log_3 y} = \frac{1}{81} \end{cases}$$

8.3.10.

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2 \\ \log_b x - \log_b y = 4 \end{cases}$$

8.3.11.

$$\begin{cases} \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13 \\ \log(x + y) - \log(x - y) = 3 \log 2 \end{cases}$$

8.3.12.

$$\begin{cases} \log_{xy}(x - y) = 1 \\ \log_{xy}(x + y) = 0 \end{cases}$$

8.3.13.

$$\begin{cases} \log_a\left(1 + \frac{x}{y}\right) = 2 - \log_a y \\ \log_b x + \log_b y = 4 \end{cases}$$

8.3.14.

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y + \log_a 4 = 2 + \log_a 9 \\ x + y - 5a = 0 \end{cases}$$

8.3.15.

$$\begin{cases} \log x + \log y = \log a \\ 2(\log x - \log y) = \log b \end{cases}$$

8.3.16.

$$\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x + \log_b y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

8.3.17.

$$\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = \frac{3}{2} \\ \log_{b^2} x - \log_{b^2} y = 0 \end{cases}$$

8.3.18.

$$\begin{cases} \log_a x - \log_{\frac{1}{a}} y = 2 \\ \log_{\frac{1}{b}} x + \log_a y = 1 \end{cases}$$

8.3.19.

$$\begin{cases} 8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1} \\ 5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}} \end{cases}$$

8.3.20.

$$\begin{cases} {}^{x-y}\sqrt{x+y} = 2\sqrt{3} \\ (x+y) \cdot 2^{y-x} = 3 \end{cases}$$

8.3.21.

$$\begin{cases} {}^y\sqrt{4^x} = 32 \cdot {}^x\sqrt{8^y} \\ {}^y\sqrt{3^x} = 3 \cdot {}^y\sqrt{9^{1-y}} \end{cases}$$

8.3.22.

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{x-y+2} - 12 \cdot 2^{x+y} = 37 \\ 12 \cdot 2^{x-y} - 10 \cdot 2^{x+y+1} = 19 \end{cases}$$

8.4. Vegyes feladatok

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

8.4.1.

$$\log_4(12 \cdot 2^x + 1) = \log_9 \frac{1}{3^x}$$

8.4.2.

$$\log_5 \left(5^{\frac{1}{x}} + 125 \right) = 1 + \frac{1}{2x} + \log_5 6$$

8.4.3.

$$\left| \log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} \right| = \log_2 \frac{x}{4x^2 - 4x + 1}$$

8.4.4.

$$x^2 \cdot \log_6 \sqrt{5x^2 - 2x - 3} - x \cdot \log_{\frac{1}{6}}(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$$

8.4.5.

$$x^{\log_3(x-1)} + 2 \cdot (x-1)^{\log_3 x} = 3x^2$$

8.4.6.

$$3^{x-1} + 3^{1-x} = 1 - \cos(\pi x)$$

8.4.7.

$$\log_2(2x^2 + 18) - \log_2(6x) = 6x - x^2 - 8$$

8.4.8. A p valós paraméter mely értékeire valósak és különbözőek a következő egyenlet megoldásai:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - px + \frac{p}{2} - \frac{3}{2}} = (\sqrt{8})^{p-1}$$

8.4.9. Milyen x, y valós számpárookra teljesül az alábbi egyenlet

$$2^{x+y} + 36^x - 6 = \sqrt{2^{y+1} \cdot 3^x - 9^x - 2^{2y}}$$

8.4.10. Milyen m paraméter érték esetén lesz pontosan egy megoldása a következő egyenletnek?

$$4 \cdot 9^x + m^2 = 4m \cdot 3^x + 16$$

8.4.11. Milyen p paraméter esetén van megoldása az alábbi egyenletnek?

$$4^{\sin x} - (p + 3) \cdot 2^{\sin x} - p - 4 = 0$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszereket!

8.4.12.

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 4 \end{cases}$$

8.4.13.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \log_{\sqrt{x}} \sqrt{a} + \log_{\sqrt{y}} \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

8.4.14.

$$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

8.4.15.

$$\begin{cases} \sqrt[10]{2^x} \cdot \sqrt[5]{2^y} = \sqrt[3]{128} \\ \log(x + y) = \log 40 - \log(x - y) \end{cases}$$

8.4.16.

$$\begin{cases} 9^{-1} \cdot \sqrt[3]{9^x} - 27 \cdot \sqrt[3]{27^y} = 0 \\ \log(x - 1) - \log(1 - y) = 0 \end{cases}$$

8.4.17.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y - \log(4 - \sqrt{x}) = 0 \\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}} - 125 \cdot 5^{\sqrt{y}} = 0 \end{cases}$$

8.4.18.

$$\begin{cases} 2^{\sqrt{x+y}} = 8 \\ \log x + \log y = 1 + \log 2 \end{cases}$$

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket!

8.4.19.

$$x^{\frac{\log x + 7}{4}} = 10^{\log x + 1}$$

8.4.20.

$$\log\left(\frac{1}{4} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1\right) - 1 = \log\left(\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2\right) - 2 \log 2$$

8.4.21.

$$2(\log 2 - 1) + \log(5^{\sqrt{x}} + 1) = \log(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$$

8.4.22.

$$5^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - 5^{\log x - 1}$$

8.4.23.

$$x^{2 \cdot (\log x)^3 - \frac{3}{2} \cdot \log x} = \sqrt{10}$$

8.4.24.

$$\log\left(64 \cdot \sqrt[24]{2^{x^2 - 40x}}\right) = 0$$

8.4.25.

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$$

8.4.26.

$$\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

8.4.27.

$$2 \cdot \log 2 + \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \cdot \log 3 - \log(\sqrt[x]{3} + 27) = 0$$

8.4.28.

$$\log(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}) - 2 = \frac{1}{4} \cdot \log 16 - \sqrt{x+0,25} \cdot \log 4$$

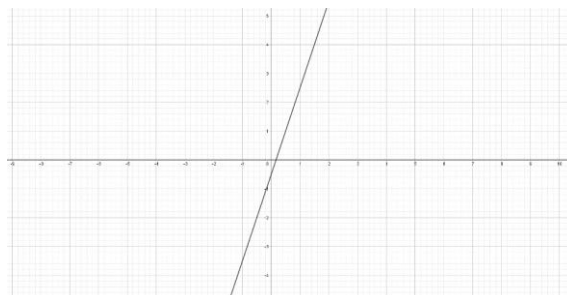
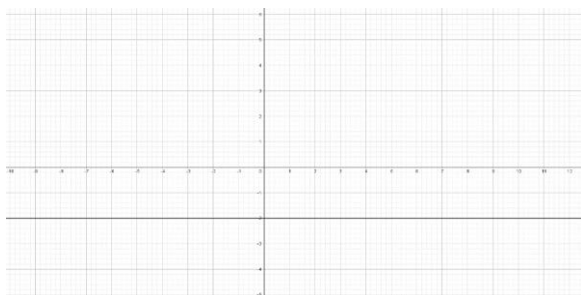
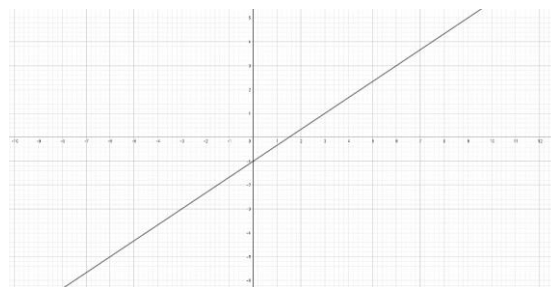
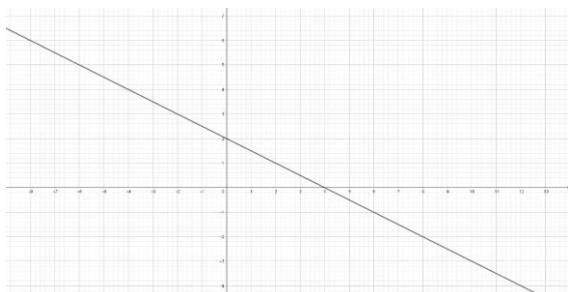
8.4.29.

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{3+\log x} = 30000$$

9. Függvények

9.1. Elemi függvények

9.1.1 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.1.2 Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket.

1. $f(x) = (2x - 1)(3 + x) - 2(x + 1)(x - 1)$

2. $f(x) = \frac{5x^3 + 10x}{x^2 + 2}$

3. $f(x) = \frac{6x-2}{5} + 3x - 4$

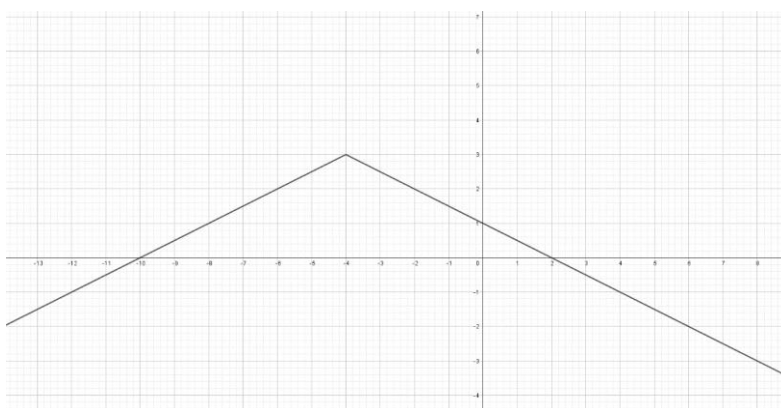
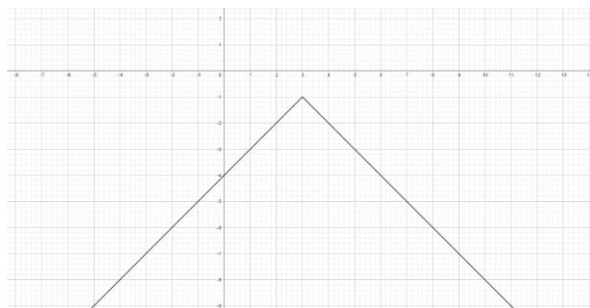
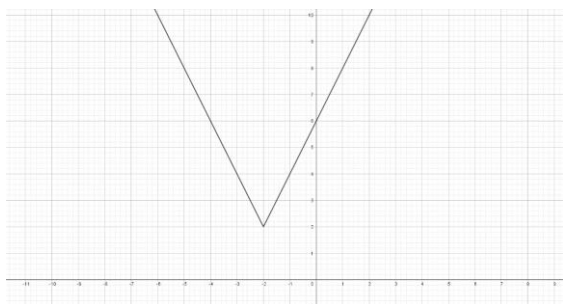
9.1.3 Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket.

1. $f(x) = \begin{cases} x - 5, & \text{ha } x \geq 2 \\ 3 - 2x, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x, & \text{ha } x > 6 \\ 2, & \text{ha } -6 \leq x \leq 6 \\ -\frac{1}{3}x, & \text{ha } x < -6 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & \text{ha } x \leq 0 \\ 3, & \text{ha } 0 < x < 4 \\ 11 - 2x, & \text{ha } x \geq 4 \end{cases}$

9.1.4 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.1.5 Ábrázoljuk a következő abszolútértékes függvényeket.

$$1. f(x) = |x^2 - 4| - 2 \quad 2. f(x) = ||1 - x^2| - 2| \quad 3. f(x) = ||x^2 - 6x + 9| - 4|$$

9.1.6 Ábrázoljuk a következő abszolútértékes függvényeket.

$$1. f(x) = 2x + |2x| \quad 2. f(x) = x|x| - 1 \quad 3. f(x) = x^2 - x|x| \quad 4. f(x) = \frac{|x|}{x}$$

9.1.7 Ábrázoljuk a következő abszolútértékes függvényeket.

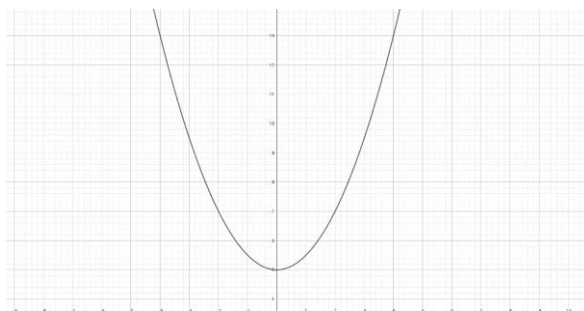
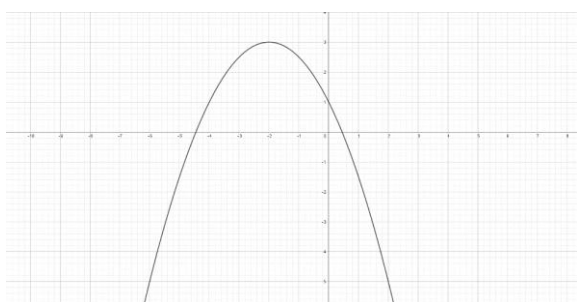
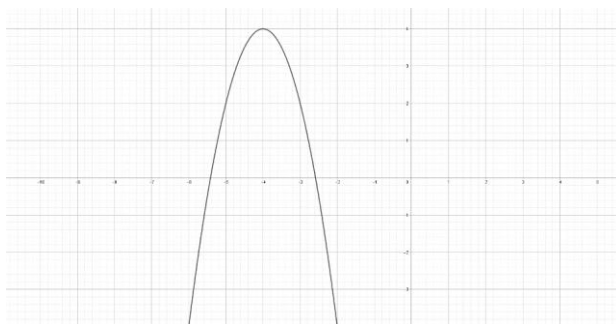
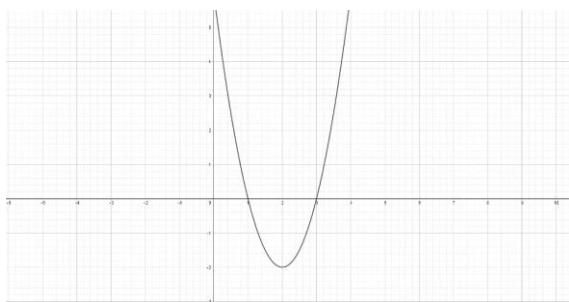
$$1. f(x) = |x| + |x + 4| \quad 2. f(x) = |x + 1| - |x - 3|$$

$$3. f(x) = -|x + 2| - |x + 3| \quad 4. f(x) = |2x - 1| + |4 - 3x|$$

9.1.8 Ábrázoljuk a következő abszolútértékes függvényeket.

$$1. f(x) = ||x| - 3| - 1| \quad 2. f(x) = |||3x + 2| - 2| + 1| - 4|$$

9.1.9 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.1.10 Ábrázoljuk a következő másodfokú függvényeket.

$$1. f(x) = x^2 - 6x + 8 \quad 2. f(x) = x^2 - x - 6 \quad 3. f(x) = (x - 3)(1 - 2x)$$

9.1.11 Ábrázoljuk a következő másodfokú függvényeket.

$$1. f(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad 2. f(x) = (2x - 5)(3 - x) \quad 3. f(x) = x(4 - 3x)$$

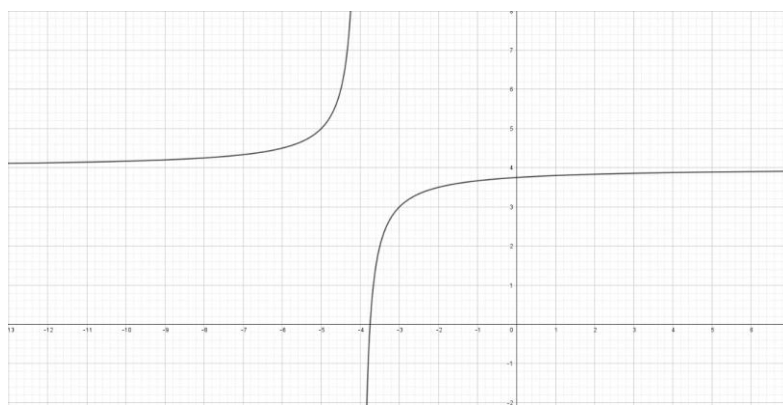
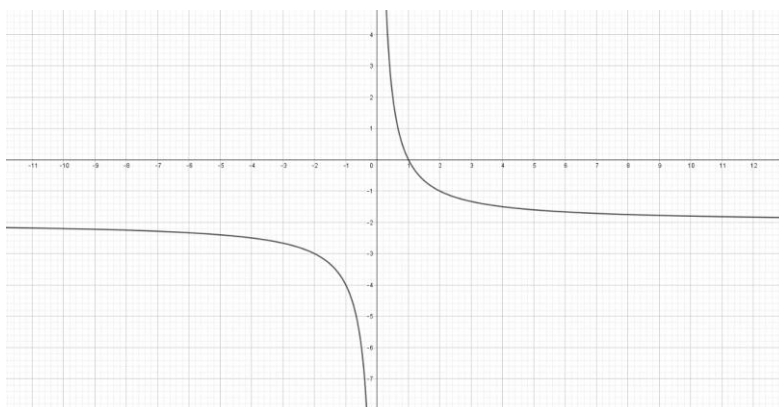
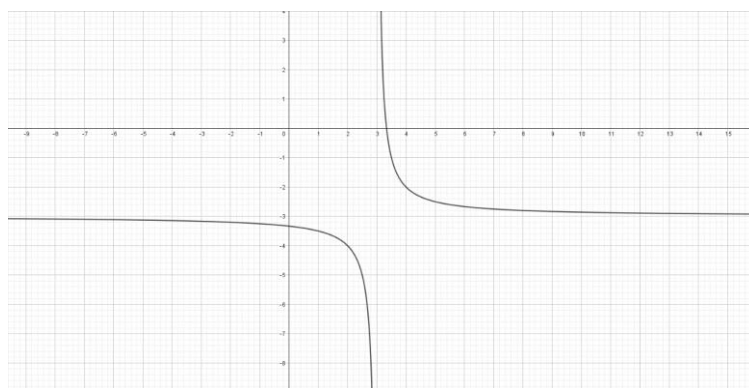
9.1.12 Ábrázoljuk a következő másodfokú függvényeket.

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{ha } x \leq 2 \\ (x - 2)(4 - x), & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & \text{ha } x < 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 3 - x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{ha } |x| \geq 1 \\ 1 - 2x^2, & \text{ha } |x| < 1 \end{cases}$$

9.1.13 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.1.14 Ábrázoljuk a következő lineáris törtfüggvényeket.

$$1. f(x) = \frac{2x + 7}{x + 3}$$

$$2. f(x) = \frac{2}{5 - x} + 2$$

$$3. f(x) = \frac{7x - x^2}{5x - x^2}$$

9.1.15 Ábrázoljuk a következő lineáris törtfüggvényeket.

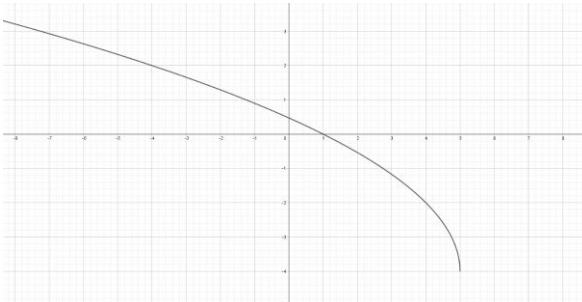
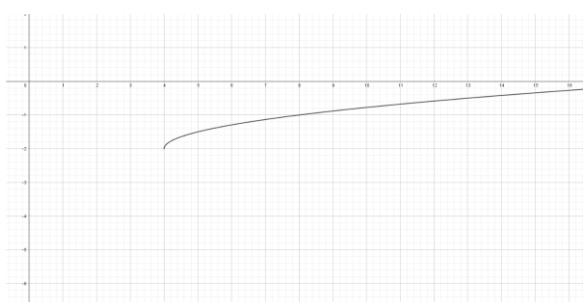
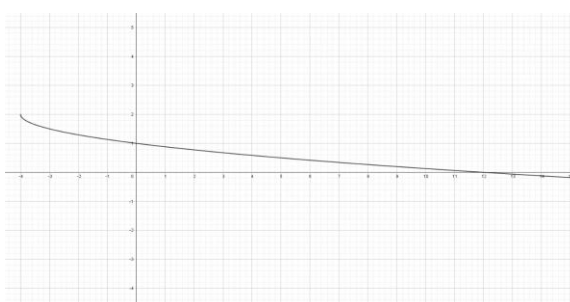
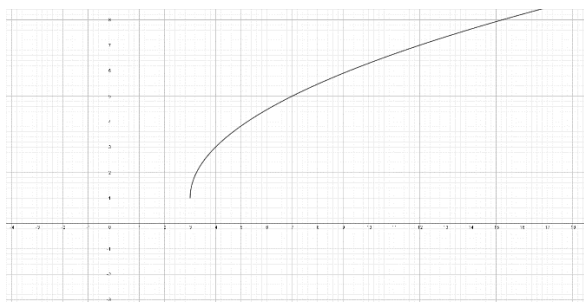
$$1. f(x) = 3 + \frac{6}{x - 2}$$

$$2. f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x} - 3$$

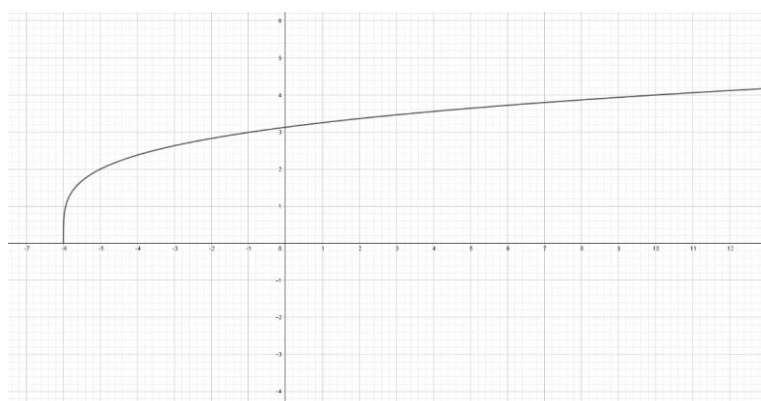
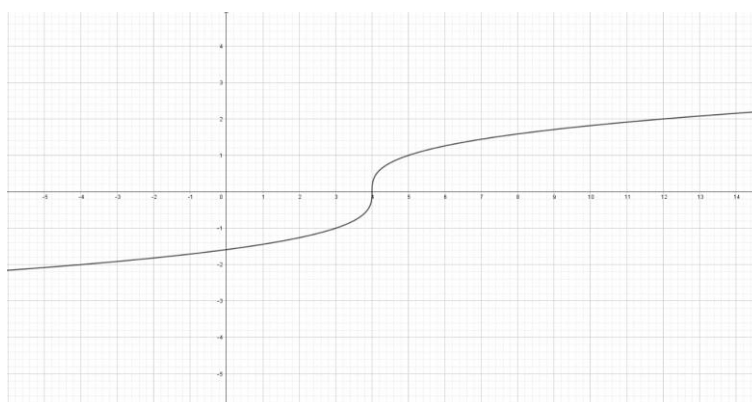
$$3. f(x) = \frac{6x^2 - 18x}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

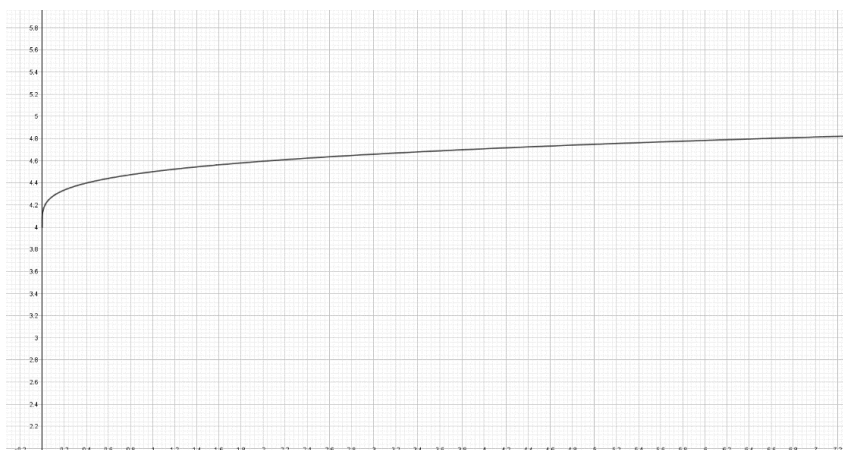
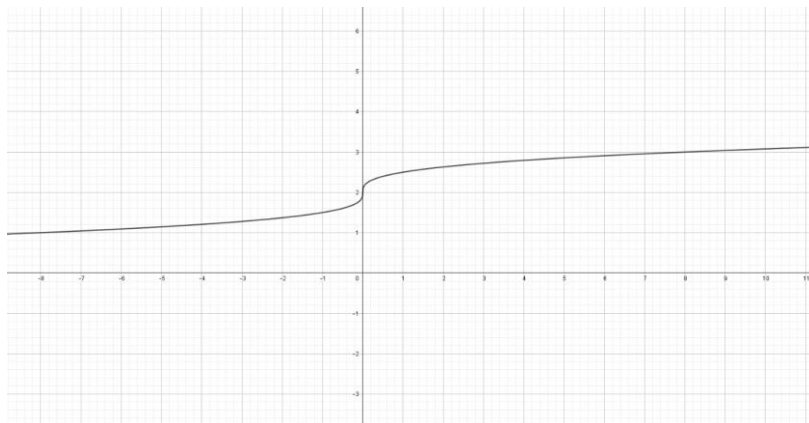
9.2. Irracionális és magasabb fokú függvények

9.2.1 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.2.2 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.





9.2.3 Ábrázoljuk a következő irracionális függvényeket.

$$1. f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} + 2 \quad 2. f(x) = -\sqrt{4-x} + 3$$

$$3. f(x) = -2\sqrt{x+5} - 3 \quad 4. f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2-x} + 4$$

9.2.4 Ábrázoljuk a következő irracionális függvényeket.

$$1. f(x) = \sqrt[3]{x-3} + 2 \quad 2. f(x) = \sqrt[4]{x+4} - 4$$

$$3. f(x) = -\sqrt[3]{x+4} - 3 \quad 4. f(x) = -\sqrt[4]{x-3} + 3$$

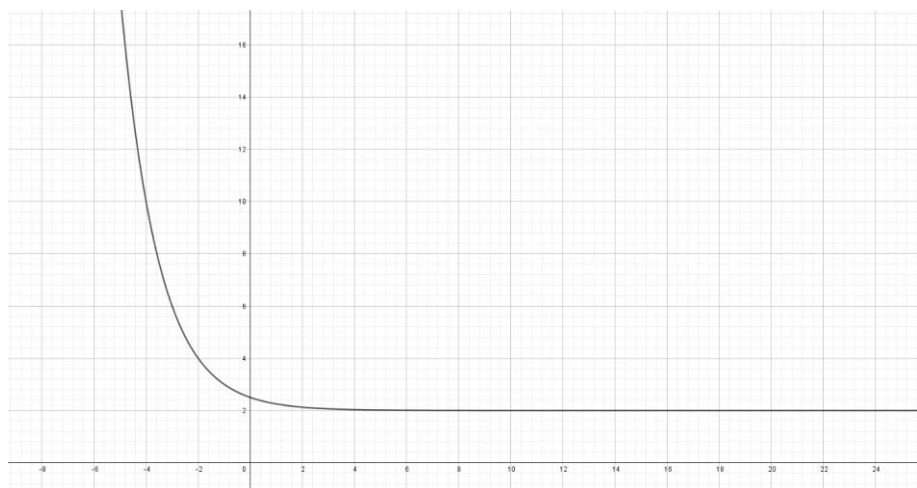
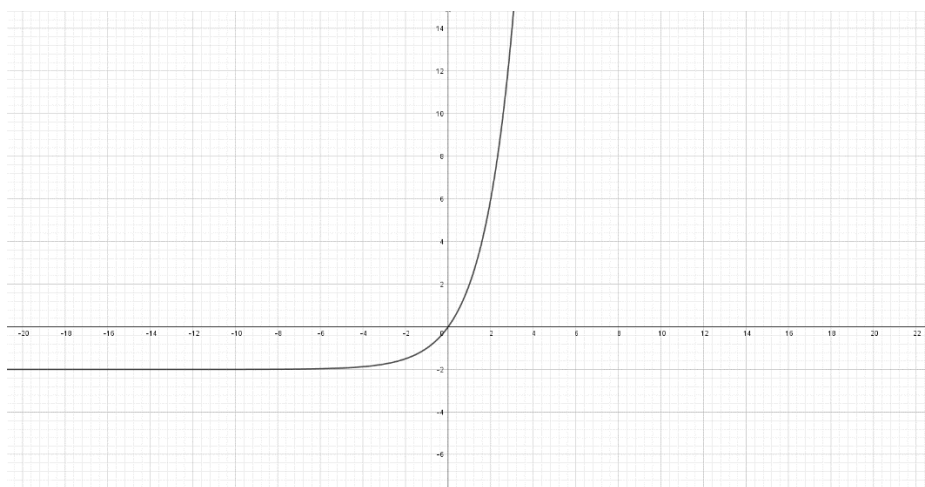
9.2.5 Ábrázoljuk a következő hatvány függvényeket.

$$1. f(x) = -x^3 + 3 \quad 2. f(x) = x^4 - 16$$

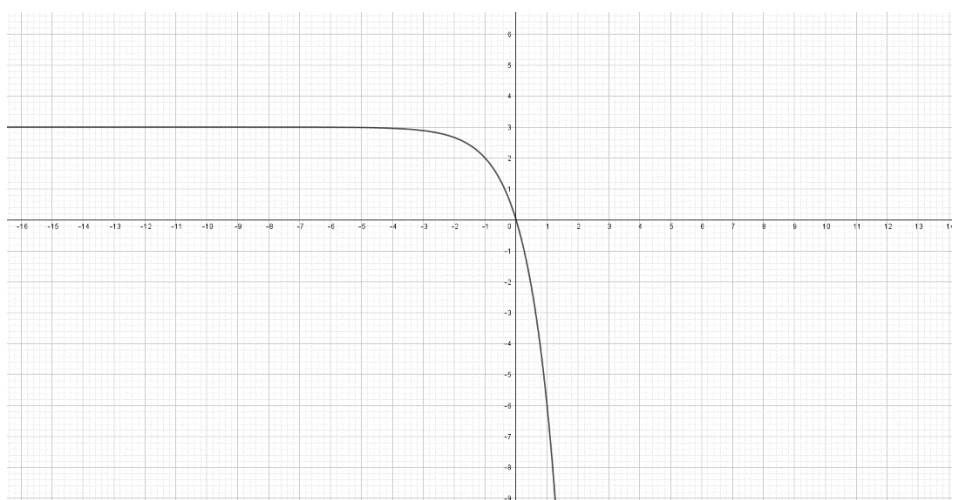
$$3. f(x) = (x+3)^3 - 3 \quad 4. f(x) = (x-4)^4 - 4$$

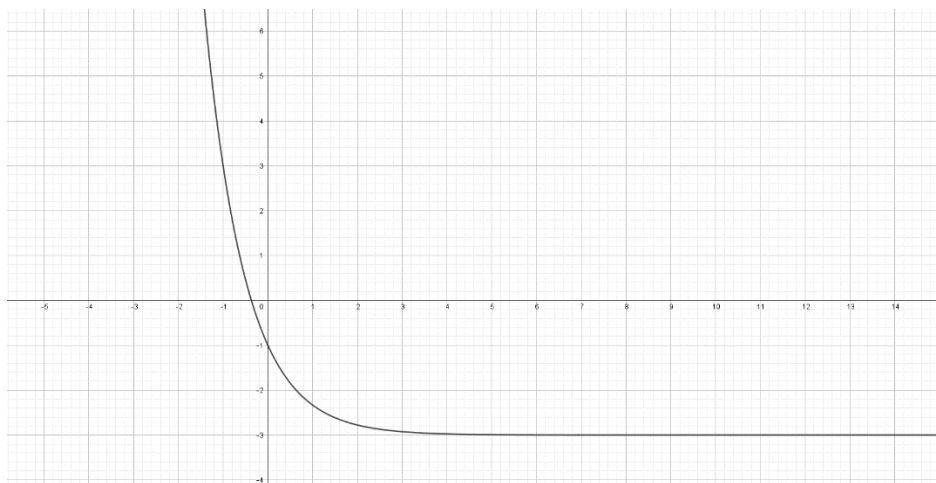
9.3. Exponenciális és logaritmus függvények

9.3.1 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.3.2 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.





9.3.3 Ábrázoljuk a következő exponenciális függvényeket.

$$f(x) = 3^{x-1} + 3 \qquad f(x) = \frac{4^x - 4}{2^x + 2}$$

9.3.4 Ábrázoljuk a következő exponenciális függvényeket.

$$f(x) = 2^{|x-1|} + 1 \qquad f(x) = (3)^{1-x} - 3$$

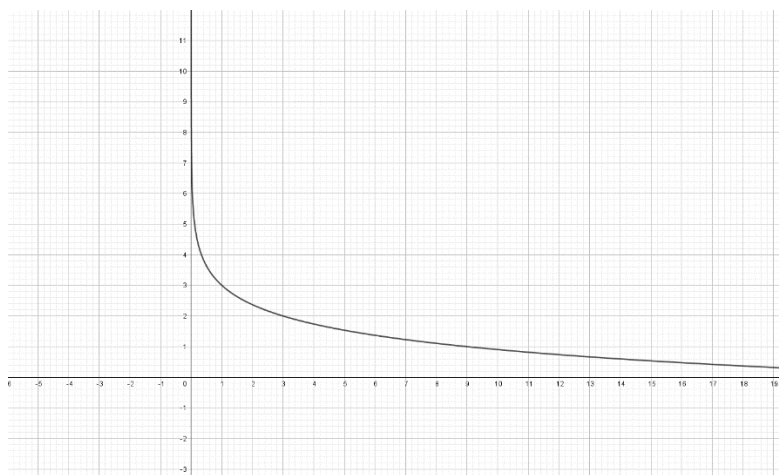
9.3.5 Ábrázoljuk a következő exponenciális függvényeket.

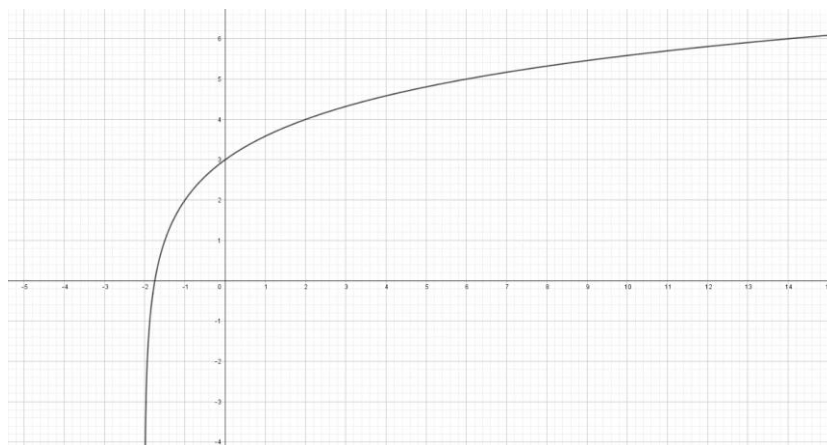
$$f(x) = |2^{1-x} + 2| \qquad f(x) = 2 \cdot 3^{-x} + 1$$

9.3.6 Ábrázoljuk a következő exponenciális függvényeket.

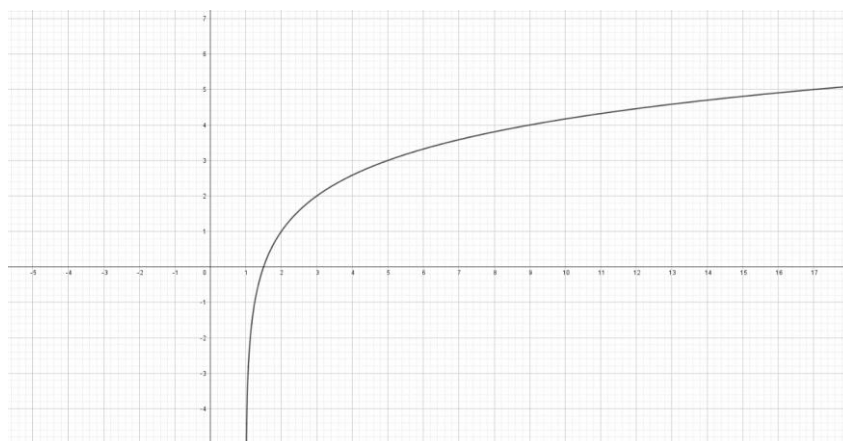
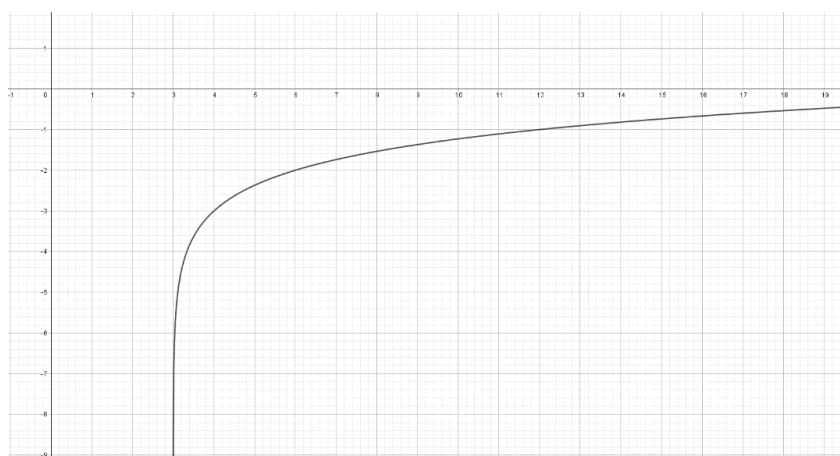
$$f(x) = |2^{x-1} - 4| \qquad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} - 3$$

9.3.7 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.





9.3.8 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.



9.3.9 Ábrázoljuk a következő logaritmus függvényeket.

$$f(x) = \log_2 \frac{1}{x} - 3 \qquad f(x) = \log_{\frac{1}{3}} |x - 2|$$

9.3.10 Ábrázoljuk a következő logaritmus függvényeket.

$$f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}}(x+3) \right| \qquad f(x) = 3 \cdot \log_3(x+3)$$

9.3.11 Ábrázoljuk a következő logaritmus függvényeket.

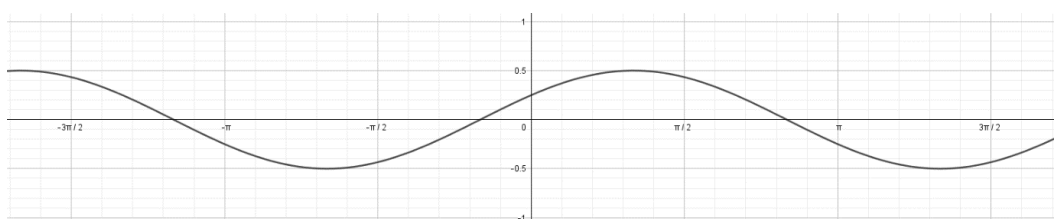
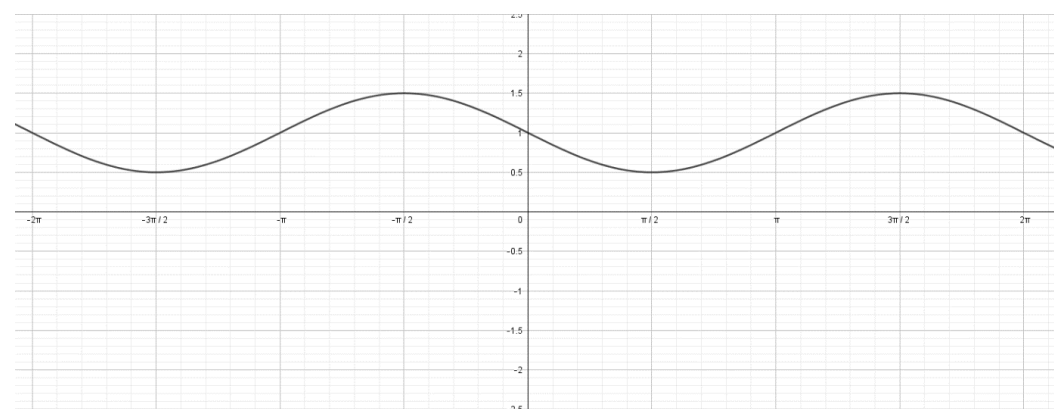
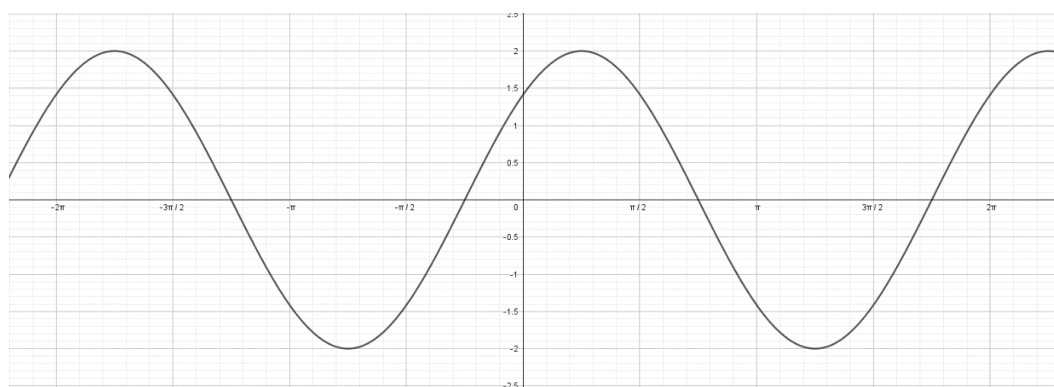
$$f(x) = 2 \cdot \log_2(2x-4) \qquad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_3\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$$

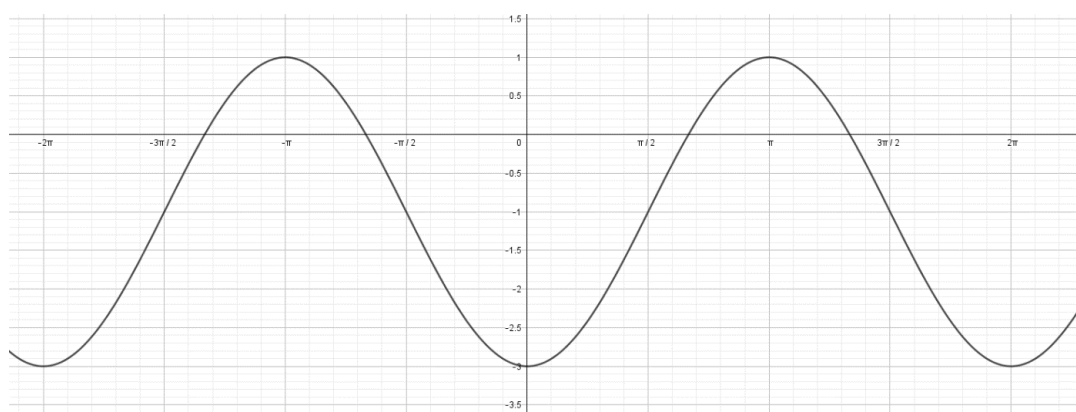
9.3.12 Ábrázoljuk a következő logaritmus függvényeket.

$$f(x) = 2 \cdot \log_2(x+2) - 2 \qquad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

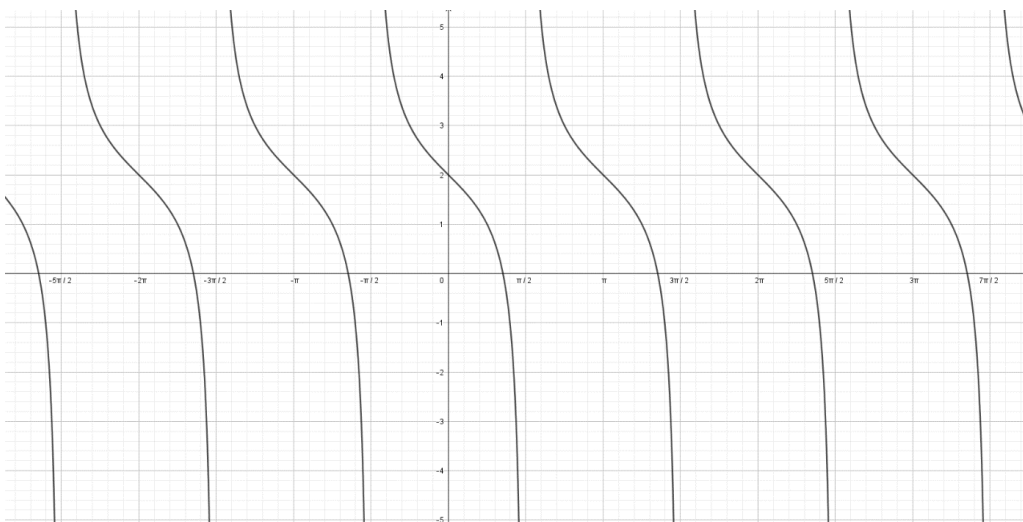
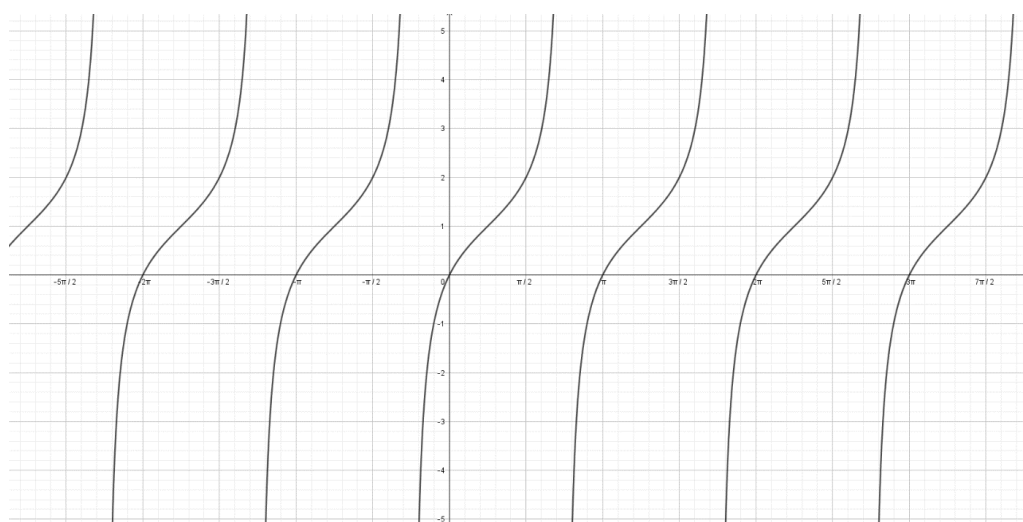
9.4. Trigonometrikus függvények

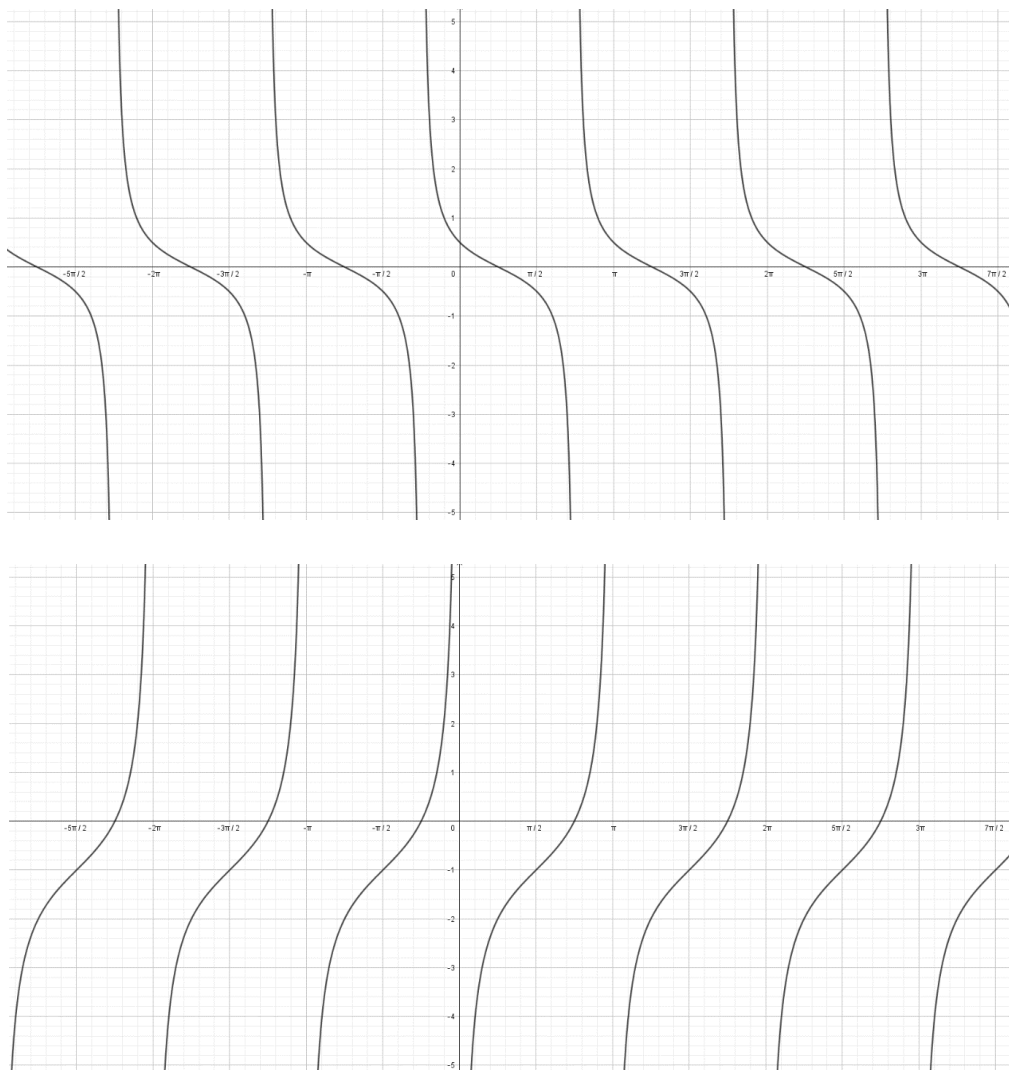
9.4.1 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.





9.4.2 Olvassuk le a grafikonokról a következő függvények hozzárendelési szabályát.





9.4.3 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$1. \quad f(x) = -2 \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad 2. \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin x - 2$$

9.4.4 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$1. \quad f(x) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \quad 2. \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}$$

9.4.5 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad 2. \quad f(x) = -2 \cdot \cos x - 1$$

9.4.6 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$1. \quad f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad 2. \quad f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

9.4.7 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = 2 \cdot \operatorname{tg} x - 2 \qquad f(x) = \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) - 2$$

9.4.8 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \operatorname{tg}(2x) + 1 \qquad f(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

9.4.9 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \operatorname{ctg}(2x) - 2 \qquad f(x) = 2 \cdot \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

9.4.10 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = -\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} x \right) + 2 \qquad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

9.4.11 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \sin x + \cos x \qquad f(x) = \sin x - \cos x$$

9.4.12 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \sin x + \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \qquad f(x) = \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x$$

9.4.13 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cos x \qquad f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x$$

9.4.14 Milyen pontokban metszik egymást a következő függvények?

$$1. \quad f(x) = \cos(3x) \qquad g(x) = \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2. \quad f(x) = 3 \cdot \sin x \qquad g(x) = \sin \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

9.5. Összetett és inverz függvények

9.5.1 Írjuk fel az $f \circ g$ összetett függvények hozzárendelési szabályát.

1. $f(x) = x^2, \quad g(x) = 3x - 4$

2. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sin x$

3. $f(x) = \log_2 x, \quad g(x) = |x| - x$

4. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{\pi}{2} - x$

5. $f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = x - 2$

9.5.2 Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési szabályát.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$

2. $f(x) = x^2 + 5, \quad g(x) = 2x - 1$

3. $f(x) = 2 - 3x, \quad g(x) = x^2 - 4$

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = 1 - 2x$

9.5.3 Írjuk fel az $f \circ f$ összetett függvények hozzárendelési szabályát.

1. $f(x) = 2 + 5x$ 2. $f(x) = x^2 - 3$ 3. $f(x) = (x - 3)^2$

4. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 5. $f(x) = \frac{2}{x-3}$ 6. $f(x) = \sqrt{x^3}$

9.5.4 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és az inverzüket ugyanabban a koordináta rendszerben.

1. $f(x) = x + 3$ 2. $f(x) = \sqrt{x}, \text{ ahol } x \geq 0$ 3. $f(x) = x^2 - 4x, \text{ ahol } x \geq 2$

4. $f(x) = \frac{2}{x}, \text{ ahol } x \neq 0$ 5. $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

9.5.5 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és az inverzüket ugyanabban a koordináta rendszerben.

1. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 2. $f(x) = \log_3 x, \text{ ahol } x > 0$ 3. $f(x) = \frac{x+3}{x-1}, \text{ ahol } x \neq 1$

$$4. f(x) = \frac{x}{x-1}, \text{ ahol } x \neq 1 \quad 5. f(x) = \sqrt[3]{x+4}$$

9.5.6 Adjunk meg néhány olyan függvényt, amelyik azonos az inverzával. Mi jellemzi az ilyen függvények grafikonját?

9.6. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus módszerrel a valós számok halmazán.

9.6.1

$$\frac{x+4}{3} = \frac{x+2}{5}$$

9.6.2

$$\frac{2x}{4} = \frac{5-x}{3}$$

9.6.3

$$\frac{3-x}{2} = \frac{x+4}{5}$$

9.6.4

$$|x| + x = 1 + 2x$$

9.6.5

$$|x| - x = \frac{8x-1}{4}$$

9.6.6

$$|x-1| - 3 = \frac{2-x}{6}$$

9.6.7

$$3-x = |x-3|$$

9.6.8

$$|x+4| = 5 - |x-1|$$

9.6.9

$$\frac{4}{x-1} = 3x + 1$$

9.6.10

$$\frac{x}{2-x} = x + 1$$

9.6.11

$$\frac{x-1}{x+1} = x$$

9.6.12

$$\frac{1}{x+2} = \frac{3}{x-3}$$

9.6.13

$$x^4 + x^2 = 1 - 2x$$

9.6.14

$$x^2 - 4x = x - 6$$

9.6.15

$$|x^2 - 6x + 5| = x - 1$$

9.6.16

$$x^2 + x - 7 = 6x^2 + x + 4$$

9.6.17

$$12x - 5x^2 = 5(x+2)(2-x)$$

9.6.18

$$2^{x+4} + 11 = 15(x+3)$$

9.6.19

$$2^{x+2} = -4x^2 + 3x + 9$$

9.6.20

$$\log_2 |x| = |x| - 1$$

9.6.21

$$4 \log_3 x = x^2 - 2x + 1$$

9.6.22

$$\sqrt{10 - x} = x - 10$$

9.6.23

$$\sqrt{10 - 2x} - x = -1$$

9.6.24

$$x - \sqrt{x + 1} = 5$$

9.6.25

$$\sqrt{x} - \sqrt{x - 3} = 1$$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel a valós számok halmazán.

9.6.26

$$(x + 4) \cdot 2 \leq 3 - x$$

9.6.27

$$\frac{3x - 4}{4} \geq 2x + 3$$

9.6.28

$$\frac{2x + 3}{3} \leq \frac{8 - x}{2}$$

9.6.29

$$3(x - 1) > 4 - \frac{x}{2}$$

9.6.30

$$|x| - x > -\frac{x + 1}{2}$$

9.6.31

$$|x| + x \leq 1 - 3x$$

9.6.32

$$|x - 1| - 3 > 2 - |x|$$

9.6.33

$$\left| \frac{2}{3}x \right| < |x - 3|$$

9.6.34

$$|x + 3| \leq 4 + |x + 2|$$

9.6.35

$$\frac{2}{x + 3} < 4$$

9.6.36

$$\frac{x - 1}{x - 2} < 1$$

9.6.37

$$\frac{x + 3}{x + 1} \geq x$$

9.6.38

$$\frac{1 - 2x}{3x + 4} > \frac{x - 2}{2}$$

9.6.39

$$\frac{2x}{x-2} \leq 2$$

9.6.40

$$x^2 < |x| + 3$$

9.6.41

$$x^4 > x^2$$

9.6.42

$$2x^2 + 3x - 5 \leq -x^2 + 2x - 9$$

9.6.43

$$\frac{2x-1}{x^2+3x-4} < \frac{1}{2}$$

9.6.44

$$(x+2)(x-1)(x-3) > 0$$

9.6.45

$$2^{x+1} \leq 5 - x$$

9.6.46

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2 < 4 + |x+1|$$

9.6.47

$$\log_3 |x| \leq |x| - 1$$

9.6.48

$$\log_2 x > |x+1| + 1$$

9.6.49

$$\sqrt{x+6} > x+6$$

9.6.50

$$\sqrt{x-2} + x > 4$$

9.6.51

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < x + 6$$

9.7. Függvények jellemzése

9.7.1 Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

$$1. f(x) = \frac{x+3}{1-x^2} \quad 2. f(x) = \frac{5x}{x^2-6x} \quad 3. f(x) = \frac{x}{x^3-4x^2+3x}$$

9.7.2 Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-9}} \quad 2. f(x) = \lg \frac{x+5}{x-5} \quad 3. f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

9.7.3 Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

$$1. f(x) = \frac{\lg(x+1)}{x^2} \quad 2. f(x) = \sqrt{\lg(x-1)} \quad 3. f(x) = \frac{\sqrt{\lg(x+2)}}{x}$$

9.7.4 Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

$$1. f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{\lg(\sin x)} \quad 2. f(x) = \sqrt{\lg(\sin x)} \quad 3. f(x) = \sqrt{1+\lg x}$$

9.7.5 Adjuk meg a következő függvények értelmezési tartományát.

$$1. f(x) = \sqrt{\lg x + \operatorname{ctg} x} \quad 2. f(x) = \sqrt{\frac{1}{\sin(2x)}} \quad 3. f(x) = \lg \frac{\sqrt{x+3}}{\sin x}$$

9.7.6 Adjuk meg a következő függvények értékkészletét.

$$1. f(x) = \frac{\sin x - 8}{2} \quad 2. f(x) = \lg(\sin x), \text{ ahol } 0 < x < \pi$$

9.7.7 Adjuk meg a következő függvények monotonitását.

$$1. f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad 2. f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

9.7.8 Adjuk meg a következő függvények monotonitását.

$$1. f(x) = -2|2x + 6| \quad 2. f(x) = \left| \frac{2x - 4}{x - 3} \right| \quad 3. f(x) = \frac{2|x| - 4}{|x| - 3}$$

9.7.9 Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igaz vagy hamis.

1. Van olyan függvény, amelyik páros és páratlan is.
2. Van olyan páros és páratlan függvény is, amelyik a 0 helyen nincs értelmezve.
3. Csak egyetlen olyan függvény van, amelyik páros is és páratlan is.
4. Ha egy páros függvény görbéje szimmetrikus az x tengelyre, akkor a függvény páratlan is.
5. Ha egy polinom függvényben csak páros kitevőjű tagok vannak, akkor a függvény páros.
6. Ha egy polinom függvényben csak páratlan kitevőjű tagok vannak, akkor a függvény páratlan.
7. Ha egy páratlan függvény az $x = 0$ helyen értelmezett, akkor $f(0) = 0$ lehet csak.

9.7.10 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = 3 \quad 2. f(x) = 2x \quad 3. f(x) = x + 3$$

$$4. f(x) = |x| - 3 \quad 5. f(x) = |x + 3| \quad 6. f(x) = x^2 + 3$$

9.7.11 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = -x^2 - 2 \quad 2. f(x) = -\frac{3}{x} \quad 3. f(x) = \sqrt{x^2} - 2$$

$$4. f(x) = x^3 \quad 5. f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1} \quad 6. f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$$

9.7.12 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = 2x^6 + 3x^4 - x^2 + 5 \quad 2. f(x) = 3x^5 + 4x^3 - 2x + 7 \quad 3. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$4. f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2} \quad 5. f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \quad 6. f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

9.7.13 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = x + \sin x \quad 2. f(x) = x \cdot \sin x \quad 3. f(x) = x^2 \cdot \sin x$$

$$4. f(x) = x^2 + \sin x \quad 5. f(x) = x \cdot (\sin x)^2$$

9.7.14 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = x + \cos x \quad 2. f(x) = x \cdot \cos x \quad 3. f(x) = x^2 \cdot \cos x$$

9.7.15 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2} \quad 2. f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2}$$

9.7.16 Határozzuk meg a következő függvények periódusát.

$$1. f(x) = \cos \frac{x}{2} - \operatorname{tg} x \quad 2. f(x) = \sin 2x + (\cos x)^2 \quad 3. f(x) = \sin 4x - \operatorname{tg} 2x + 1$$

9.7.17 Határozzuk meg a következő függvények periódusát.

$$1. f(x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2 \sin \frac{x}{2} \quad 2. f(x) = \cos 2x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x - \pi$$

$$3. f(x) = (\sin 2x)^2 - (\cos 2x)^2$$

9.7.18 Határozzuk meg a következő függvények periódusát.

$$1. f(x) = \sin \left(\frac{2}{3}x - \pi \right) + \cos \left(\frac{2}{5}x + \pi \right) \quad 2. f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$3. f(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{6} + \frac{2\pi}{3} \right)$$

9.7.19 Határozzuk meg a következő függvények periódusát.

$$1. f(x) = \lg \sqrt{1 - \sin 2x} \quad 2. f(x) = \lg \sin \frac{\pi x}{5} \quad 3. f(x) = \lg \lg \frac{\pi x}{3}$$

9.7.20 Határozzuk meg a következő függvények periódusát.

$$1. f(x) = 2^{(\sin x)^2} \quad 2. f(x) = \sin 5x - \lg \sin 5x \quad 3. f(x) = \lg \sin x - \lg \cos x$$

9.8. Függvények határértéke

9.8.1 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x + 2}$$

9.8.2 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$$

9.8.3 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + x} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^4 + x^2 + x}$$

9.8.4 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

9.8.5 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2}{x^2 - 4} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$$

9.8.6 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4 + 2x^2}{x^5 + 3x^3 + 3x^2} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + 2x^2}{x^5 + 3x^3 + 3x^2} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x^2}{x^5 + 3x^3 + 3x^2}$$

9.8.7 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

9.8.8 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{3x^2 + 1} - x)$$

9.8.9 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 2x - 1} - 3x)$$

9.8.10 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 2} + \sqrt{2x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$$

9.8.11 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5 - x + x^2}}{x}$$

9.8.12 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

9.8.13 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}$$

9.8.14 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$$

9.8.15 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 4x} - \sqrt{2x^2 - 5x})$$

9.8.16 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - 3x)$$

A következő feladatokban használjuk fel az alábbi nevezetes határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

9.8.17 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+7}{3x+2}\right)^{x+1}$$

9.8.18 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

9.8.19 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x}\right)^x$$

9.8.20 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{x}\right)^x$$

9.8.21 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{5x}\right)^x$$

9.8.22 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

9.8.23 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x}$$

9.8.24 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x+7}$$

9.8.25 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)^{\frac{x^2}{2}}$$

9.8.26 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right)^{2x}$$

9.8.27 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{x} \right)^{x+2}$$

A következő feladatokban használjuk fel az alábbi nevezetes határértéket:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

9.8.28 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

9.8.29 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$$

9.8.30 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 5x}$$

9.8.31 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$$

9.8.32 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} x)$$

9.8.33 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\operatorname{tg} 13x}$$

9.8.34 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

9.8.35 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

9.8.36 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

9.8.37 Határozzuk meg a következő függvény határértékét.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$$

9.9. Teljes függvényvizsgálat

Végezzük el a következő függvények teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk azokat!

9.9.1

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

9.9.2

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

9.9.3

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

9.9.4

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

9.9.5

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

9.9.6

$$f(x) = x^3 - 9x$$

9.9.7

$$f(x) = -x^3 + 3x$$

9.9.8

$$f(x) = x^3 + 3x^2$$

9.9.9

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

9.9.10

$$f(x) = (x - 2)^2(x + 1)$$

9.9.11

$$f(x) = -x^4 + 4x^2$$

9.9.12

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

9.9.13

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

9.9.14

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2$$

9.9.15

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$$

9.9.16

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

9.9.17

$$f(x) = x \cdot \sqrt{x+3}$$

9.9.18

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

9.9.19

$$f(x) = e^{-x^2}$$

9.9.20

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

9.9.21

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

9.9.22

$$f(x) = \ln(1 - x^2)$$

9.10. Vegyes feladatok

9.10.1 Ábrázoljuk a következő lineáris függvényeket.

$$1. f(x) = (x-2)(3+2x) - 2(x+1)(x-2) \qquad 2. f(x) = \frac{6x^3+12x}{x^2+2}$$

9.10.2 Ábrázoljuk a következő abszolútértékes függvényeket.

$$1. f(x) = |x^2 - 1| - 4 \quad 2. f(x) = ||4 - x^2| - 2| \quad 3. f(x) = |x^2 - 8x + 16| - 4|$$

9.10.3 Ábrázoljuk a következő abszolútértékes függvényeket.

$$1. f(x) = ||2 - x| - 1| - 2| - 1 \quad 2. f(x) = ||5 - 2x| + 3| - 1|$$

9.10.4 Ábrázoljuk a következő másodfokú függvényeket.

$$1. f(x) = -5x^2 + 20x + 25 \quad 2. f(x) = (x+1)(2-x) + 4$$

9.10.5 Ábrázoljuk a következő függvényt.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + x^2, & \text{ha } x < 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2 \\ x, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

9.10.6 Ábrázoljuk a következő lineáris törtfüggvényeket.

$$1. f(x) = 2 + \frac{2}{x-2} \quad 2. f(x) = \frac{x^2}{x^2-x} + 3 \quad 3. f(x) = \frac{2x^2-6x}{x^3-5x^2+6x}$$

9.10.7 Ábrázoljuk a következő irracionális függvényeket.

$$1. f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x-3} - 2 \quad 2. f(x) = \sqrt{4-x} - 3$$

$$3. f(x) = 2\sqrt{x-5} + 3 \quad 4. f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-x} + 2$$

9.10.8 Ábrázoljuk a következő irracionális függvényeket.

$$1. f(x) = -\sqrt[3]{x-3} - 2 \quad 2. f(x) = -\sqrt[4]{x-4} + 4$$

$$3. f(x) = \sqrt[3]{x+4} + 3 \quad 4. f(x) = \sqrt[4]{x+3} - 3$$

9.10.9 Ábrázoljuk a következő hatvány függvényeket.

$$1. f(x) = x^3 - 3 \quad 2. f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 8$$

$$3. f(x) = (x-3)^3 + 3 \quad 4. f(x) = (x+4)^4 + 4$$

9.10.10 Ábrázoljuk a következő exponenciális függvényeket.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 2 \quad f(x) = 3^{|x+1|} + 1$$

9.10.11 Ábrázoljuk a következő logaritmus függvényeket.

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 2 \quad f(x) = -\log_3(x-3) + 3$$

9.10.12 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x + \sqrt{2} \cos x \quad f(x) = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

9.10.13 Ábrázoljuk a következő trigonometrikus függvényeket.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

9.10.14 Írjuk fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ összetett függvények hozzárendelési szabályát.

1. $f(x) = x^2 - 3x, \quad g(x) = 2x + 1$

2. $f(x) = \sqrt{x+2}, \quad g(x) = \sin(2x)$

3. $f(x) = \log_3(x-1), \quad g(x) = |x+3|$

4. $f(x) = \frac{1}{2x-1}, \quad g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

9.10.15 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és az inverzüket ugyanabban a koordináta rendszerben.

1. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 2. $f(x) = \log_2 x, \text{ ahol } x > 0$ 3. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}, \text{ ahol } x \neq 2$

4. $f(x) = \frac{x}{x+3}, \text{ ahol } x \neq -3$ 5. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$

9.10.16 Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus módszerrel.

1. $|x-2| = 3 - |x+1|$ 2. $|x-1| - 3 = 3 - |x-1|$

9.10.17 Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus módszerrel.

1. $3x^2 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^2 + x + 1$ 2. $x^2 - 5x + 11 = -x^2 + 3x + 5$

9.10.18 Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus módszerrel.

1. $3 - |x-4| = \sqrt{x-1}$ 2. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$ 3. $\frac{2}{x} = (x-1)^2$

9.10.19 Oldjuk meg a következő egyenleteket grafikus módszerrel.

1. $x^3 = 2x + 4$ 2. $|x| - 1 = 1 - x^2$ 3. $\frac{2x+3}{x+1} = x + 3$

9.10.20 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel.

$$1. |x - 1| \geq 2 + |x + 2| \quad 2. 4 - |x| \leq |x + 3| \quad 3. \left| \frac{x}{2} + 2 \right| > \frac{3}{2}$$

9.10.21 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel.

$$1. \frac{2x + 3}{x - 5} < 0 \quad 2. \frac{5 - 2x}{2x - 3} > 0 \quad 3. \frac{3x - 5}{x} \leq 2$$

9.10.22 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel.

$$1. \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 18} \geq 0 \quad 2. \frac{x - 4}{6 - 5x - x^2} > 0 \quad 3. \frac{(x - 4)(x + 1)}{(2 - x)(x - 1)} \leq 0$$

9.10.23 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel.

$$1. 2^x \leq -2(x - 2)^2 + 4 \quad 2. \frac{2}{x - 2} + 1 \leq -(x - 3)^2 + 3 \quad 3. \sqrt{x - 2} > (x - 2)^2$$

9.10.24 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel.

$$1. \frac{x^2}{2} \leq \frac{x + 2}{2} \quad 2. -2|x| + 3 \geq x^2 \quad 3. x^2 - 6x + 7 < \frac{2}{x - 4}$$

9.10.25 Oldjuk meg a következő egyenlőtlenség rendszert grafikus módszerrel.

$$\begin{cases} y + \frac{1}{2} > |x^2 - 2x| \\ y < 2 - |x - 1| \end{cases}$$

9.10.26 Állapítsuk meg a következő függvények paritását.

$$1. f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad 2. f(x) = \cos x - 2 \quad 3. f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$4. f(x) = 2^{x^2} \quad 5. f(x) = (\log_3 x)^2 \quad 6. f(x) = \log_3 x^2$$

9.10.27 Határozzuk meg a következő függvények periódusát.

$$1. f(x) = \left[\sin\left(\frac{2x}{5} + \frac{\pi}{6}\right) \right]^2 - 1 \quad 2. f(x) = \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{3} \quad 3. f(x) = \lg\left(\sin \frac{2x}{3}\right)$$

9.10.28 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} \quad 3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$$

9.10.29 Határozzuk meg a következő függvények határértékét.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^x \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x - 3}{8x + 9} \right)^{5x-2}$$

9.10.30 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

9.10.31 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$$

9.10.32 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

9.10.33 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5$$

9.10.34 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = 5x^3 - 4x^5$$

9.10.35 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

9.10.36 Végezzük el a következő függvény teljes vizsgálatát, majd ábrázoljuk!

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

10. Koordináta geometria

10.1. Vektorok, osztópontok

10.1.1. Egy ABCDEF szabályos hatszög 'A' csúcsából a szomszédos F,B csúcsba mutató vektorok rendre: $\underline{u}$ és $\underline{v}$. Határozzuk meg ezek segítségével a következő vektorokat! $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{CE}$; $\overrightarrow{OG}$, ahol O a hatszög középpontja, G pedig az AF oldal felezőpontja!

10.1.2. Egy ABCDEF szabályos hatszög 'O' középpontjából a szomszédos A,B csúcsba mutató vektorok rendre: $\underline{u}$ és $\underline{v}$. Határozzuk meg ezek segítségével a következő vektorokat! $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{EA}$

10.1.3. Egy ABCD paralelogramma belső P pontjából az A,B,C csúcsokhoz vezető vektorok: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Határozzuk meg ezek segítségével a $\overrightarrow{PD}$ vektort!

10.1.4. Egy ABCD paralelogramma külső P pontjából az A,B,C csúcsokhoz vezető vektorok: $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$. Határozzuk meg ezek segítségével a $\overrightarrow{PD}$ vektort!

10.1.5. Egy ABCDEFGH kocka középpontjából (O) az A,B,C csúcsokhoz vezető vektorai: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Határozzuk meg ezek segítségével az $\overrightarrow{OD}$ és $\overrightarrow{CG}$ vektort!

10.1.6. Egy szabályos négyoldalú gúla alaplapjának csúcsai: A,B,C,D, csúcspontja E. Az E-ből A,B,C-be mutató vektorok rendre $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$. Határozzuk meg ezek segítségével az $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EF}$ vektorokat, ha F az alaplap középpontja!

10.1.7. Egy négyzet két csúcsának koordinátái: (1,1), (6,-1). Határozzuk meg a másik két csúcs koordinátáit, ha a két csúcs a) szomszédos b) szemközi!

10.1.8. Mekkora az egyenlő (de nem nulla) hosszúságú $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szöge, ha $\underline{a}+2\underline{b}$ és az $5\underline{a}-4\underline{b}$ egymásra merőleges vektorok!

10.1.9. Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egységvektorok hajlásszöge, ha $\underline{a}-3\underline{b}$ és az $2\underline{a}+\underline{b}$ egymásra merőleges vektorok!

10.1.10. Az egyenlő hosszúságú $\underline{a}$ és $\underline{b}$ szöge 120° . Mekkora $2\underline{b}-\underline{a}$ és az $5\underline{a}+4\underline{b}$ vektorok hajlásszöge?

10.1.11. A P pont helyvektora $\underline{p} = \overrightarrow{OP}(\log_3 x, \log_3 y)$, a Q pont helyvektora

$$\underline{q} = \overrightarrow{OQ}\left(\log_3(xy), \log_3\left(\frac{y}{x}\right)\right), \text{ ahol } 0 < x < 1, \text{ és } y > 1.$$

a) Bizonyítsuk be, hogy a $\underline{q}$ vektor koordinátái nagyobbak, mint a $\underline{p}$ vektor megfelelő koordinátái!

b) Mekkora szöget zár be az $\overrightarrow{QP}$ illetve a $\underline{p}$ vektor egymással?

c) Legyen $x = \frac{1}{9}$. Ábrázold a P illetve Q pontok halmazát!

10.1.12. A T pont helyvektora $\overrightarrow{OT}(\log_5 x, \log_5 y)$, az S pont helyvektora $\overrightarrow{OS}\left(\log_5(xy), \log_5\left(\frac{y}{x}\right)\right)$

ahol $0 < x < 1$, és $y > 1$.

a) Milyen kapcsolat van a 2 vektor megfelelő koordinátái között?

b) Mekkora szöget zár be az $\overrightarrow{ST}$ illetve az $\overrightarrow{OT}$ vektor egymással?

c) Legyen $x=125$. Ábrázold a T, illetve az S pontok halmazát!

10.1.13. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátái a p valós paraméter függvényében: $\underline{a}(\cos p; \sin p)$ és $\underline{b}(\sin^2 p; \cos^2 p)$.

a) Add meg a két vektor koordinátáinak pontos értékét, ha $p=2\pi/3$.

b) Mekkora a két vektor hajlásszöge $p=2\pi/3$ esetén?

c) Határozzunk meg olyan p értéket, amely esetén a két vektor merőleges egymásra!

10.1.14. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátái az m valós paraméter függvényében: $\underline{a}(\sin m; -\cos m)$ és $\underline{b}(\sin^2 m; \cos^2 m)$.

a) Add meg a két vektor koordinátáinak pontos értékét, ha $m=3\pi/4$.

b) Mekkora a két vektor hajlásszöge $k=4\pi/3$ esetén?

c) Határozzunk meg olyan k értéket, amely esetén a két vektor merőleges egymásra!

10.1.15. Az ABCDEFGH téglatest élei $AB=5$, $AD=4$, $AE=3$. Az A csúcsból induló élvektorok $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$, $\overrightarrow{AE} = \underline{c}$. Az A csúcsból induló 3 élvektor, 3 lapátló-vektor, és egy testátló-vektor indul ki. Adja össze ezt a hét vektort, és az összegvektort jelölje $\overrightarrow{AT}$.

a) Fejezze ki az $\overrightarrow{AT}$ vektort az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok segítségével!

b) Milyen hosszú az $\overrightarrow{AT}$?

c) Mekkora szöget zár be az $\overrightarrow{AT}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorok?

d) Mekkora az $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AT}$ értéke, ha S a HFC háromszög súlypontja?

10.1.16. Az ABCDEFGH kocka élei 12cm-esek. Az A csúcsból induló élvektorok $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{b}$, $\overrightarrow{AE} = \underline{c}$. Az A csúcsból induló 3 lapátló-vektor, és egy testátló-vektor indul ki. Adja össze ezt a négy vektort, és az összegvektort jelölje $\overrightarrow{AT}$.

a) Fejezze ki az $\overrightarrow{AT}$ vektort az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorok segítségével!

b) Milyen hosszú az $\overrightarrow{AT}$?

c) Mekkora szöget zár be az $\overrightarrow{AT}$ és $\overrightarrow{AE}$ vektorok?

d) Mekkora az $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AT}$ értéke, ha S a HFC háromszög súlypontja?

10.1.17. Adott az A(2,1), B(7,-4), C(11,p) háromszög. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét, ha a B csúcsnál lévő szög 60° .

10.1.18. Adott az A(-2,5), B(5,-1), C(8,m) háromszög. Határozzuk meg a m valós paraméter értékét, ha a B csúcsnál lévő szög 120° .

10.1.19. Adott az A(-8,24), B(48,16), C(0,0) háromszög. D a CF súlyvonal negyedelő pontja. Mekkora szöget zárnak be az $\overrightarrow{AD}$ és $\overrightarrow{AF}$ vektorok?

10.1.20. Adott az A(-16,12), B(24,32), C(0,0) háromszög. E az AF súlyvonal súlyponttól különböző harmadoló pontja. Mekkora szöget zárnak be az $\overrightarrow{BE}$ és $\overrightarrow{BF}$ vektorok?

10.1.21. Ha az $\underline{a}+3\underline{b}$ vektor merőleges a $7\underline{a}-5\underline{b}$ vektorra, és az $\underline{a}-4\underline{b}$ vektor merőleges a $7\underline{a}-2\underline{b}$ vektorra, akkor mekkora szöget zár be az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor?

10.1.22. Adottak az $\underline{a}(2-2p, x^2)$ és $\underline{b}(x+1, 5-p)$ vektorok. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az a és b vektorok minden valós x esetén tompaszöget zárjanak be!

10.1.23. Egy rombusz két szemközti csúcsának koordinátái: A(-10,2), C(6,-2). Határozzuk meg a B,D csúcsok koordinátáit, ha a BD átló hossza a) kétszer b) fele olyan hosszú, mint az AC átló hossza!

10.1.24. Egy téglalap két szomszédos csúcsának koordinátái: A(-3,2), B(9,-4). Határozzuk meg a C,D csúcsok koordinátáit, ha a BC oldal hossza a) háromszor b) harmad olyan hosszú, mint az AB oldal hossza!

10.1.25. Egy háromszög oldal felezőpontjai F1, F2, F3. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit, ha

a) F1(-3,-1), F2(5,2), F3(1,3).

b) F1(2,0), F2(3,1), F3(-2,-1).

10.1.26. Egy négyzet egyik csúcsa az x, másik csúcsa az y tengelyre illeszkedik. Milyen kapcsolat van a négyzet középpontjának két koordinátája között?

10.1.27. Egy rombusz egyik csúcsa az y tengelyre illeszkedik. Az ebből kiinduló átló kétszer olyan hosszú, mint a másik átló. Egy szomszédos csúcs illeszkedik az $y=2$ egyenesre. Bizonyítsuk be, hogy a rombusz középpontja vagy $x-2y+4=0$, vagy $x+2y-4=0$ egyenesre illeszkedik!

10.2. Egyenesek

10.2.1. Írjuk fel az $A(0,5)$, $B(-3,1)$, $C(5/3,1)$ háromszög belső, és külső szögfelezőinek egyenletét!

10.2.2. Állapítsuk meg az e, f egyenesek hajlásszögét, ha

a) $e: 3x+4y=5$, $f: 12x-5y=3$

b) $e: 5x-2y=10$, $f: x+4y=1$

10.2.3. A koordináta-rendszer $P(1,6)$ pontjából egy golyót indítunk az $\underline{a}(3,-4)$ vektorral egy irányba. A golyó az $f: 4x-3y=10$ egyenesről visszapattan, és egy egyenes mentén halad tovább. Adjuk meg ennek az egyenletét!

10.2.4. Egy beeső fénysugár átmegy a $P(3,4)$ ponton és visszaverődik a $2x+y=2$ egyenesen. A visszaverődés után átmegy a $Q(5,2)$ ponton. Mi lesz a visszavert fénysugár egyenesének egyenlete?

10.2.5. Határozzuk meg annak a háromszögnek az oldal egyeneseinek az egyenletét, amelynek egyik csúcsa $C(4,-7)$ és két magasságvonalának egyenlete $-7x+4y+36=0$ és $x+3y+12=0$!

10.2.6. Számítsuk ki annak a háromszögnek az oldal egyeneseinek az egyenletét, amelynek egyik csúcsa $A(3,-4)$ és két magasságvonalának egyenlete $7x-2y-1=0$ és $2x-7y-6=0$!

10.2.7. Egy háromszög egyik csúcsa $B(-3, 3)$. A „C” csúcsból induló súlyvonal egyenlete: $7x+y=13$, szintén „C”-ből induló magasságvonal egyenlete: $4x+3y=5$. Határozz meg a másik 2 csúcs koordinátáit!

10.2.8. Egy háromszög egyik csúcsa $A(-3, -1)$. A „C” csúcsból induló súlyvonal egyenlete: $x-y=1$, szintén „C”-ből induló magasságvonal egyenlete: $2x+y=3$. Határozz meg a másik 2 csúcs koordinátáit!

10.2.9. Egy háromszög A csúcsából induló magasságvonalának egyenlete: $y=x+2$. Ebből a csúcsból induló súlyvonal egyenlete: $3x-y=4$. A $B(-2,2)$. Határozzuk meg a B-vel szemközti oldal egyenletét!

10.2.10. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-6,0)$, $B(3,3)$, $C(-3,9)$. Számítsuk ki milyen távol van a súlypont a B csúcson áthaladó magasságvonaltól?

10.2.11. Egy háromszög csúcsának koordinátái: $A(-6,-2)$, $B(4,0)$, súlypontja $S(-2,1)$. Számítsuk ki milyen távol van a súlypont a BC oldal felezőmerőleges egyenesétől?

10.2.12. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának végpontjai: $(-7,2)$ és $(-4,-2)$. Átfogójának meredeksége $2/11$. Mekkora a háromszög területe?

10.2.13. Adottak az $e:2x-3y=5$, és $f:5x+12y=7$ egyenesek. Állapítsuk meg a hajlásszögüket, és azt hogy milyen távol van az f egyenes az origótól.

10.2.14. Egy háromszög egy csúcspontja $A(-2,2)$. Két egyenesének egyenlete: $x-6y+14=0$, $x+3y-13=0$. Súlypontja $S(1,3)$. Határozzuk meg a háromszög szögeit, valamint súlypont és a harmadik oldalegyenes távolságát!

10.2.15. Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, másik oldalegyenese az $3x+y=12$ egyenes, egyik csúcsa az origó. Határozzuk meg a háromszög területét!

10.2.16. Az a , b valós paraméterek mely értékeire lesznek egymással az $(a+2)x+(a+3b+5)y+3=0$ és $(a+2)x-(2a+b-2)y-2=0$ egyenesek párhuzamosak?

10.2.17. Az ' m ' paraméter mely értékeire metszi egymást egy pontban az $mx-y=2$, az $x-my=-3m-1$, és az $y=2x$ egyenes?

10.2.18. Egy konvex négyszög AB , BC , CD , DA oldalegyeneseinek egyenlete rendre: $3x-4y-20=0$, $3x+5y-20=0$, $4x-3y+12=0$, $5x+3y+15=0$. Bizonyítsuk be, hogy:

- a) a négyszögnek nincs derékszöge
- b) átlói a koordinátatengelyekre illeszkednek
- c) a négyszög húrnégyszög!

10.2.19. Adott az $x-y+1=0$ és az $x+2y-8=0$ egyenesek.

- a) Ezek a koordinátatengelyekkel egy konvex négyszöget fognak közre. Mekkora ennek a területe?
- b) Az említett 4 egyenes 6 metszéspontja közül 4 egy konkáv négyszöget csúcsai. Mekkora ennek a kerülete?

10.2.20. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(0,3)$, $B(8,0)$, $C(8,8)$. Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely párhuzamos az $x=2y$ egyenessel, és felezi a háromszög területét!

10.2.21. Adottak az $x+2y=6$, $x+2y=12$ egyenesek. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $(6,-3)$ ponton, és a fenti két egyenest olyan pontokban metszi, melyek első koordinátáinak különbsége 4.

10.2.22. Adottak az $x-2y=4$, $x-2y=10$ egyenesek. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely áthalad a $(2,2)$ ponton, és a fenti két egyenest olyan pontokban metszi, melyek első koordinátáinak különbsége 2.

10.2.23. Az $x+y=5$ egyenesre állítsunk merőleget az 1 ordinátájú pontjában. Ennek a merőleges egyenesnek melyik lesz az a pontja, amelynek feleakkora az ordinátája, mint az abszcisszája?

10.2.24. Egy háromszög két csúcsa $A(0,10)$, $B(15,0)$. A harmadik csúcsa illeszkedik $2x+3y=6$ egyenesre. Határozzuk meg a területét!

10.3. Körök

10.3.1. Írjuk fel azoknak a köröknek az egyenletét, amelyek érintik mindkét koordinátatengelyt, valamint az $(3,3)$ középpontú, 3 egység sugarú kört!

10.3.2. Melyek azok a $K(1,1)$ középpontú, $r=1$ egység sugarú körön lévő pontok, amelyek koordinátái kielégítik a $2^{x+1}+2^{2y}=5$ és $x+2y=1$ egyenletrendszert?

10.3.3. Melyek azok a $K(50,50)$ középpontú, $r=49$ egység sugarú körön belül lévő pontok, amelyek koordinátái kielégítik a következő egyenletrendszert?

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \lg^2 x - \lg \sqrt{x} = 1 \\ x \cdot y = 10 \end{cases}$$

10.3.4. Adjuk meg az $(x-4)^2+(y-7)^2=169$ és $(x+4)^2+(y-5)^2=169$ körök metszéspontjainak koordinátáit!

10.3.5. Határozzuk meg az $(x+2)^2+(y-2)^2=25$ és $(x-12)^2+(y-4)^2=125$ körök metszéspontjai, valamint a $P(-2,3)$ pont által meghatározott háromszög területét!

10.3.6. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $(4,0)$ pontban érinti az x tengelyt, és az y tengelyből egy 6 egység hosszú szakaszt metsz ki!

10.3.7. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $(0,5)$ pontban érinti az y tengelyt, és az x tengelyből egy 24 egység hosszú szakaszt metsz ki!

10.3.8. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a $(0,4)$ ponton, sugara 25 egység, és az x tengelyből egy 14 egység hosszú szakaszt metsz ki!

10.3.9. Határozzuk meg annak a körnek az egyenletét, amely a $2x+y=19$ egyenletű egyenest a $P(7,5)$ pontban érinti, és a koordinátatengelyekből ugyanakkora hosszú szakaszokat vág le?

10.3.10. Határozzuk meg a $x-y=-1$, $x+2y=-4$, $3x-y=9$ egyenesekkel megadott háromszög köré írható körének egyenletét, és a beírható körének sugarát!

10.3.11. Lehet-e egy húrnégyszög négy csúcspontja az $A(1,6)$, $B(-2,7)$, $C(-7,2)$, $D(2,-1)$ pontok?

10.3.12. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely illeszkedik a $P(3,7)$ pontra, az $x^2+y^2+22x-16y+160=0$ kört kívülről, az $x^2+y^2+2x+2y-98=0$ kört pedig belülről érinti!

10.3.13. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti az abszcisszatengelyt, az $x^2+y^2-16x-6y+24=0$ és az $x^2+y^2-6y+8=0$ egyenletű körök közül az egyiket belülről, a másikat pedig kívülről érinti!

10.3.14. Határozzuk meg az $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ egyenletű kör 6 abszcisszájú pontjaiba húzható érintők metszéspontját!

10.3.15. Határozzuk meg az $x^2+y^2+4x-8y-80=0$ egyenletű kör 2 ordinátájú pontjaiba húzható érintők metszéspontját! Adjuk meg annak a síkidomnak a területét, melyet az érintők, illetve az érintési pontok által meghatározott kisebbik körív határol!

10.3.16. Határozzuk meg a $P(9,2)$ pontból az $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ körhöz húzható érintők egyenletét!

10.3.17. Határozzuk meg a $P(6.5,8)$ pontból az $x^2+y^2+12x-16y=0$ körhöz húzható érintők egyenletét! Adjuk meg az érintők hajlásszögét!

10.3.18. Határozzuk meg az $x^2+y^2-16x-2y+40=0$ kör azon érintőit, amelyek az $f: -3x-4y=6$ egyenessel párhuzamosak, illetve arra merőlegesek!

10.3.19. Határozzuk meg az $x^2+y^2-4x-2y-20=0$ kör azon érintőit, amelyek egy $\frac{3}{4}$ meredekségű egyenessel párhuzamosak, illetve arra merőlegesek!

10.3.20. Határozzuk meg a c paraméter értékét, hogy az $x-y=c$ egyenes érintője legyen a $(x-4)^2+(y+6)^2=32$ körnek!

10.3.21. Határozzuk meg az m paraméter értékét, hogy a $2x+y=m$ egyenes érintője legyen az $(x+2)^2+(y+2)^2=80$ körnek!

10.3.22. Határozzuk meg az $x^2+y^2+2x+6y+6=0$ és az $x^2+y^2-4x+3=0$ körök közös érintőinek egyenletét!

10.3.23. Határozzuk meg az $(x+9)^2+(y+4)^2=9$ és az $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ körök közös külső érintőinek egyenletét!

10.3.24. Határozzuk meg, mekkora területű részekre bontja a $x^2+y^2+2x+2y-43=0$ kört az $x+3y=11$ egyenes! Milyen hosszú húr és ív határolja az egyes részeket?

10.3.25. Egy egyenlő szárú háromszög szárai a $C(2,5)$ pontban metszik egymást. Beírt körének egyenlete: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. Határozzuk meg a háromszög hiányzó csúcsait, területét és területét!

10.3.26. Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, melynek sugara $\sqrt{8}$, illeszkedik az $A(0,4)$ pontra és kívülről érinti az $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ kört.

10.3.27. Egy egyenlő szárú háromszög beírt körének egyenlete $x^2+y^2-8x-4y+16=0$. Egyik oldal egyenese az x tengely, egy másik oldal egyenese az $y = \frac{4}{3}x$ egyenes. Írjuk fel a harmadik oldal egyenletét!

10.3.28. Egy szabályos háromszög köré írt körének egyenlete $x^2+y^2-10x+6y+9=0$. Egyik csúcsa az $A(10,-3)$ pont. Határozzuk meg a másik csúcsát is!

10.3.29. A PQRS szimmetrikus trapéz köré írható körének egyenlete $x^2+y^2-6x-4y-87=0$. A PQ alap egy pontja $A(-3,-5)$. A trapéz szimmetriatengelyének egyenlete $y=2x-4$. A szárak hossza $10\sqrt{2}$. Határozzuk meg a csúcsok koordinátáit!

10.3.30. Határozzuk meg a c paraméter értékét, hogy az $x^2+y^2-8x-6y-c=0$ egyenletű körhöz az origóból húzható érintők hajlásszöge 60° legyen!

10.4. Parabolák

10.4.1. Határozzuk meg a következő parabolák egyenletét, és ábrázoljuk ezeket, ha

- Fókuszpontja $F(-4,2)$, vezéregyenese $d: y = -4$.
- Tengelypontja $T(3,1)$, paramétere 2, szimmetriatengelye az x tengellyel párhuzamos.
- Paramétere 4, vezéregyenese $d: x=6$, szimmetriatengelye $e: y=3$.
- Fókuszpontja $F(1,2)$, tengelypontja $T(1,5)$

10.4.2. Határozzuk meg a következő parabolák fókusz- és tengelypontját, vezéregyenesét, szimmetriatengelyét. Ábrázoljuk a parabolákat!

- $y = x^2 - 4x + 6$
- $x = 0.5y^2 - 4y + 7$
- $y = -1/10 x^2 + 1/5x + 2/5$
- $y^2 = -8x + 2y + 7$

10.4.3. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, melynek a szimmetriatengelye párhuzamos az x tengellyel, paramétere 4, és illeszkedik a $(3,-1)$ és $(9,11)$ pontokra!

10.4.4. Írjuk fel annak a parabolának az egyenletét, melynek a szimmetriatengelye az y tengely a tengelypontja a $(0,-4)$, és az x tengelyből 8 egység hosszú szakaszt metsz ki!

10.4.5. Határozzuk meg az $y=0.5x^2$ parabola 2, illetve 8 ordinátájú pontjait összekötő szakasszal párhuzamos, illetve az arra merőleges érintő egyenletét!

10.4.6. Határozzuk meg az $y=0.5x^2$ parabola, illetve az $x^2+y^2-4y=0$ kör által meghatározott háromszög kerületét, területét!

10.4.7. Határozzuk meg az $y = 0.5x^2 - 2x + 4$ parabola 4 abszcisszájú pontjába húzható érintő egyenesnek az irányszögét!

10.4.8. Határozzuk meg, hogy az $y = x^2 - 4x + 3$ parabola mely pontja van legközelebb a $-2x + y = -14$ egyeneshez. Határozzuk meg ezt a távolságot!

10.4.9. Határozzuk meg, hogy az $-y^2 + x + 4y = 5$ parabola 4 ordinátájú pontjába húzható érintő mekkora területű háromszöget határoz meg a koordinátatengelyekkel!

10.5. Tartományok

10.5.1. Adottak a következő ponthalmazok: $A: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 8x - 6y < 0 \}$.

$B: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < 3 \}$.

a) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben a megadott tartományokat!

b) Határozzuk meg a következő halmazokat! $A \cap B$, $A \setminus B$

10.5.2. Adottak a következő polinomok: $A(m)=m^2+8m+3.5$. Ábrázoljuk az $A(x)+A(y)=0$ tartományt! Határozzuk meg -8 abszcisszájú pontokba húzható érintők metszéspontját!

10.5.3. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek (x,y) koordinátái kielégítik az $|x| + |y| - 3 < 0$ feltételt!

10.5.4. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek (x,y) koordinátái kielégítik az $xy \cdot (y-2)^2 \leq 0$ feltételt!

10.5.5. Ábrázoljuk koordinátarendszerben azon pontok halmazát, melyek (x,y) koordinátáira teljesül, hogy:

a) $16x^2-9y^2=0$

b) $12x^2-12y^2+7xy=0$

c) $|3x + 2y - 4| = 8$

10.5.6. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek (x,y) koordinátái kielégítik az $||x| - |y|| - 2 = 0$ feltételt!

10.5.7. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek (x,y) koordinátái kielégítik az $(|x| - 2) \cdot (|y| + 3) = 0$ feltételt!

10.5.8. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek (x,y) koordinátái kielégítik az $(|x| - 2)^2 + (|y| + 3)^2 = 0$ feltételt!

10.5.9. Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek (x,y) koordinátái kielégítik a következő feltételt!

$$x - 4 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}$$

10.5.10. Határozza meg azon pontok halmazát a síkon, melyek (x,y) koordinátáira teljesül az

$$\frac{x^2 + y^2}{|x + y|} = 4 \text{ összefüggés!}$$

11. Trigonometria

11.1. Szögfüggvények derékszögű háromszögben, szinusz-és koszinusz tétel

11.1.1. Egy derékszögű háromszög minden oldala egész szám, és egyik befogója 2 cm-el kisebb, mint a másik befogó. Mekkora a szögei?

11.1.2. Egy egyenlő szárú háromszög szárai 39 cm-esek, területe 540 cm^2 . Beírt körének sugara 10 cm. Mekkora tized pontossággal a szögei? Határozzuk meg a háromszög köré írt körének a sugarát!

11.1.3. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasság 8 cm, ez 1:3 arányban osztja az átfogót. Mekkora a szögei? Milyen távol van a beírható kör középpontja a derékszögű csúctól?

11.1.4. Egy derékszögű háromszög rövidebbik befogója 3 cm-rel hosszabb, mint, az átfogóra eső merőleges vetülete, de 6 cm-el rövidebb, mint az átfogó. Milyen távol van a súlypont a rövidebbik befogótól?

11.1.5. Egy egyenlő szárú háromszög területe 48 cm^2 . Szárainak hossza 10 cm. Mekkora a szögei, a köré illetve beírható körének sugara?

11.1.6. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 10 cm, A hozzá tartozó magasság 12 cm. Mekkora a szárhoz tartozó magassága? Mekkora a köré, és a beírt kör középpontjának a távolsága?

11.1.7. Egy szimmetrikus trapéz alapon fekvő szögei 30° -osak. Mekkora a szárai, alapjai, ha a beírható kör sugara 4 cm?

11.1.8. Egy szabályos sokszög oldala a köré írt kör sugarának $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ szerese. A beírható körének a sugara 10 cm. Mekkora a sokszög kerületének és területének pontos értéke?

11.1.9. Adjuk meg a szabályos n-szögbe írható, és a köré írt kör által meghatározott síkidom területét, ha a sokszög területe T!

11.1.10. Egy hegyre a keleti és nyugati oldalról két ösvény vezet, amelyek azonos szintről egymástól légvonalban 16 km távolságra indulnak. Milyen magas a hegy, ha a két ösvény emelkedési szöge 16° , illetve $21^\circ 13'$?

11.1.11. Egy hegy tetején egy emlékmű van. a mellette lévő völgy egy pontjából az alapkő 31° emelkedési szögben látszik. Ha 12 métert távolodunk a hegytől, az emlékmű 22° emelkedési szögben látszik. Milyen magas a hegy?

11.1.12. Egy domb tetején 25 m magas mobil jelerősítő torony van. Egy völgy egy pontjából a kilátótorony alja $35,7^\circ$, a teteje $49,2^\circ$ emelkedési szögben látszik. Mekkora utat tesz meg az a madár, amelyik a völgy e pontjából a kilátótorony tetejére egyenes mentén repül? Milyen magas a domb?

11.1.13. A tőlünk keletre fekvő hegy csúcsát 25° emelkedési szög alatt látjuk. Ha a vízszintes talajon 3 km-t gyalogolunk délre, akkor innen a csúcs 22° emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

11.1.14. A tőlünk északra fekvő hegy csúcsát $24^\circ 35'$ emelkedési szög alatt látjuk. Ha a vízszintes talajon 2.5 km-t gyalogolunk keletre, akkor innen a csúcs 23° emelkedési szög alatt látszik. Milyen magas a hegy?

11.1.15. Egy vízszintes egyenes úton haladunk. Az út bal oldalán a hegy tetejét az útról 45° -os emelkedési szögben látjuk. 1 km-t tovább haladva az emelkedési szög már 60° -os. Újabb

1 km megtétele után már 30° -os az emelkedési szög. Milyen magas a hegy?

11.1.16. Egy ABC háromszög AB oldala 18 cm. Egy rajta lévő D pont 4:5 arányban osztja az AB oldalt. Az AC, DC, BC szakaszok aránya 5:6:8. Határozd meg a háromszög másik két oldalának hosszát!

11.1.17. Egy háromszög egyik szöge 60° -os. Ennek a szögnek a felezője a szemközti oldalt egy 3 és egy 4 cm-es részre bontja. Mekkora a háromszög oldalai, a 60° -os szög felezője, és szögei?

11.1.18. Három kör sugara 6 cm, 8 cm, illetve 9 cm, bármely kettő páromként kívülről érinti egymást. Mekkora annak a síkidomnak a területe, amelyet a három kör 1-1 íve határol?

11.1.19. Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjuk 6 órakor 30 cm, 4 órakor $6\sqrt{19}$ cm távolságra vannak egymástól?

11.1.20. Milyen hosszúak az óramutatók, ha végpontjuk 9 órakor 12.5 cm, 4 órakor $\frac{5\sqrt{37}}{2}$ cm távolságra vannak egymástól?

11.1.21. Egy egyenes országútból balra egy egyenes mellékút ágazik el 40° alatt. A mellékút mentén két lakóház van ismeretlen távolságra egymástól. Az elágazástól 450 métert tovább haladva az országúton, a lakóházak felé mutató irányok 120° illetve 75° . Milyen messze van egymástól a két épület?

11.2. Addíciós-tételek alkalmazása

Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőségeket, (ahol értelmezve van a kifejezés)!

11.2.1.

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$$

11.2.2.

$$\left[\sin \left(\frac{\pi}{8} + \alpha \right) \right]^2 - \left[\sin \left(\frac{\pi}{8} - \alpha \right) \right]^2 = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$$

11.2.3.

$$\frac{2(\cos \alpha)^2 - 1}{2 \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot \left[\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) \right]^2} = 1$$

11.2.4.

$$\left[\tan \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right]^2 = \frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}$$

11.2.5.

$$\frac{\cos 2\alpha}{(\cot \alpha)^2 - (\tan \alpha)^2} = \frac{(\sin 2\alpha)^2}{4}$$

11.2.6.

$$\frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \tan \alpha \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$$

11.2.7.

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \tan(45^\circ + \alpha)$$

11.2.8.

$$\frac{\sin x + \cos(2y - x)}{\cos x - \sin(2y - x)} = \frac{1 + \sin 2y}{\cos 2y}$$

11.2.9.

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot (1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

11.2.10.

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 1 - \sin 2\alpha$$

11.2.11.

$$\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$$

11.2.12.

$$\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$$

11.2.13.

$$[\sin(45^\circ + \alpha)]^2 - [\sin(30^\circ - \alpha)]^2 - \sin 15^\circ \cdot \cos(15^\circ + 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

11.2.14.

$$\left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$$

11.2.15.

$$(\cos \beta)^2 + [\cos(\alpha + \beta)]^2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos(\alpha + \beta) = (\sin \alpha)^2$$

11.2.16.

$$\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = 1$$

11.2.17.

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{2 \cdot \left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 - \left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2} = 1$$

11.2.18.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

11.2.19.

$$\frac{\tan 2\alpha}{\tan \alpha} = 1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

11.2.20.

$$2 \cdot [\cos(45^\circ + \alpha)]^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

11.2.21.

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

11.2.22.

$$2 \cdot \sin(45^\circ + \alpha) \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha$$

11.2.23.

$$4 \sin(60^\circ + \alpha) \cos(30^\circ + \alpha) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$$

11.2.24.

$$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tan(2\alpha - \pi) - 1$$

11.2.25.

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]^2 - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

11.2.26.

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha} = \cot \alpha$$

11.2.27.

$$\frac{1 - 2(\cos \alpha)^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \tan \alpha - \cot \alpha$$

11.2.28.

$$\left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$$

11.2.29.

$$\tan \frac{\pi + 2\alpha}{4} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$$

11.2.30.

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

11.3 Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

11.3.1.

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right)^2$$

11.3.2.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

11.3.3.

$$\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1 + \cos 2x$$

11.3.4.

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$$

11.3.5.

$$\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$$

11.3.6.

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x$$

11.3.7.

$$\sin(x - 60^\circ) = \cos(x + 30^\circ)$$

11.3.8.

$$\sin 5x + \sin x + 2(\sin x)^2 = 1$$

11.3.9.

$$(\sin x)^2(\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3$$

11.3.10.

$$\cos 4x = -2(\cos x)^2$$

11.3.11.

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

11.3.12.

$$\sin 3x = \cos 2x$$

11.3.13.

$$\left(\sin \frac{x}{3}\right)^4 + \left(\cos \frac{x}{3}\right)^4 = \frac{5}{8}$$

11.3.14.

$$(1 + \cos 4x) \sin 4x = (\cos 2x)^2$$

11.3.15.

$$(\sin x)^4 + (\cos x)^4 = \cos 4x$$

11.3.16.

$$3(\cos x)^2 - (\sin x)^2 - \sin 2x = 0$$

11.3.17.

$$(\cos x)^2 + 3(\sin x)^2 + 2\sqrt{3} \sin x \cos x = 1$$

11.3.18.

$$6(\sin x)^2 + 3 \sin x \cos x - 5(\cos x)^2 = 2$$

11.3.19.

$$(\sin x)^2 + \frac{3}{2}(\cos x)^2 = \frac{5}{2} \sin x \cos x$$

11.3.20.

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

11.3.21.

$$\sin x + \cos x = 1$$

11.3.22.

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$$

11.3.23.

$$\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2}$$

11.3.24.

$$\sin x \sin 7x = \sin 3x \sin 5x$$

11.3.25.

$$\cos x \sin 7x = \cos 3x \sin 5x$$

11.3.26.

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

11.3.27.

$$2(\cos x)^2 + 4 \cos x = 3(\sin x)^2$$

11.3.28.

$$5 \cos 2x = 4 \sin x$$

11.3.29.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan x - 2 = 0$$

11.3.30.

$$1 - \cos(\pi - x) + \sin \frac{x + \pi}{2} = 0$$

11.3.31.

$$2 \left[1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \right] = \sqrt{3} \tan \frac{\pi - x}{2}$$

11.3.32.

$$\sin x - \cos x - 4(\cos x)^2 \sin x = 4(\sin x)^3$$

11.3.33.

$$\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$$

11.3.34.

$$(\sin x)^3(1 + \cot x) + (\cos x)^3(1 + \tan x) = \cos 2x$$

11.3.35.

$$\tan x + \tan 2x = \tan 3x$$

11.3.36.

$$1 + \sin x + \cos x = 2 \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

11.3.37.

$$1 - (\cos 2x)^2 = \sin 3x - \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$$

11.3.38.

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

11.3.39.

$$(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$$

11.3.40.

$$(1 + \sin 2x)(\cos x - \sin x) = 1 - 2(\sin x)^2$$

11.3.41.

$$\frac{(\cos x)^2 - (\sin 2x)^2}{4(\cos x)^2} = \sin(x + 30^\circ) \sin(x - 30^\circ)$$

11.3.42.

$$\frac{\sin(60^\circ + x) + \sin(60^\circ - x)}{2} = \frac{\tan x}{[1 + (\tan x)^2]^2} + \frac{\cot x}{[1 + (\cot x)^2]^2}$$

11.3.43.

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{\tan \frac{x}{2} + \cot \frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}$$

11.3.44.

$$2\sqrt{2} \sin(45^\circ + x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin x}$$

11.3.45.

$$\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$$

11.3.46.

$$\frac{\tan 2x \tan x}{\tan 2x - \tan x} - 2 \sin(45^\circ + x) \sin(45^\circ - x) = 0$$

11.3.47.

$$\frac{\tan(x + 45^\circ) + \tan(x - 45^\circ)}{2} = \tan(x + 45^\circ) \tan(x - 45^\circ) \tan x$$

11.3.48.

$$\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2}{\tan \frac{x}{2} - \tan \frac{x + \pi}{2}}$$

11.3.49.

$$\frac{\sin x}{\sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x)} = 1 + \tan\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) - \tan(45^\circ - x)$$

11.3.50.

$$(\sin x)^4 + \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^4 = \frac{1}{4}$$

11.3.51.

$$\sin(x + 30^\circ) + \cos x = \frac{3}{2}$$

11.3.52.

Legyen $a > 0$. Milyen x esetén teljesül az egyenlőség?

$$\tan(ax) = \frac{1}{\tan x}$$

11.3.53.

$$(\sin x)^4 + (\cos x)^4 - (\sin x)^6 - (\cos x)^6 = \frac{1}{4}$$

11.3.54.

$$\cos x \sqrt{\cos 2x} = \frac{\sin x \sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

11.3.55.

$$\sqrt{1 + 2 \cos 2x} - \sqrt[3]{1 + 2 \cos 2x} = 0$$

11.3.56.

$$[\cos x - \sin(\pi - x)]^2 + 1 = \frac{2(\sin x)^2}{\frac{1}{(\cos x)^2} - 1}$$

11.3.57.

$$\sqrt{1 + \sin x} - \sin x - 1 = 0$$

11.3.58.

$$\sin 4x + \cos 2x = 0$$

11.3.59.

$$\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x + 1$$

11.3.60.

$$\cos 2x + 3 \sin x = 1$$

11.3.61.

$$\sin x - \cos x = 1$$

11.3.62.

$$(\sin x)^2 = \frac{\tan x}{2}$$

11.3.63.

$$2 \sin(30^\circ + x) - \cos x = 1 + \frac{\sin x}{10}$$

11.3.64.

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$

11.3.65.

$$(\sin x)^6 + (\cos x)^6 = \frac{7}{16}$$

11.3.66.

$$\tan 3x = \sin 6x$$

11.3.67.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) = 1$$

11.3.68.

$$\sin 4x + (\cos 2x)^2 = (\sin 2x)^2$$

11.3.69.

$$\cos 3x = 3 \cos x$$

11.3.70.

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

11.3.71.

$$\sqrt{3} \sin 2x - 2(\sin x)^2 = 1$$

11.3.72.

$$\tan x + \cot x = 2 \sin 2x$$

11.3.73.

$$\sin 2x + 1 = 4(\cos x)^2$$

11.3.74.

$$\sin x + \tan x = \sin 2x$$

11.3.75.

$$\sqrt{3} \sin x = \cos x$$

11.3.76.

$$2(\sin x)^2 + \cos x = 2$$

11.3.77.

$$\cos 2x = \sin x$$

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

11.3.78.

$$\frac{1}{(\sin x)^2} + \frac{1}{(\cos x)^2} \geq 4 \quad x \neq n\frac{\pi}{2}, n \text{ egész szám}$$

11.3.79.

$$\sin \frac{x}{\pi} \leq \frac{1}{2}$$

11.3.80.

$$1 + (\tan x)^2 \geq \frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{1}{(\sin x)^2}$$

11.3.81.

$$\left(\sin \left[\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{4} \right] \right)^2 \geq \frac{1}{4}$$

11.3.82.

$$[\cos(\pi x)]^2 < \frac{1}{2}$$

11.3.83.

$$\cos x \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right) < 0$$

11.3.84.

$$2 \cos x \leq \sin 2x$$

11.3.85.

$$\sin(\pi\sqrt{x}) < \frac{1}{2}$$

11.3.86.

$$\sin 3x \geq \sin(6x) - 2$$

11.3.87.

$$(\tan 2x)^2 - \frac{1}{(\cos 2x)^2} < 1$$

11.3.88.

$$(\cos 2x + \sin 2x)^2 \leq 1 + \sin 4x$$

11.3.89.

$$(\cos 2x)^2 \leq |(\sin 2x)^2 - 1|$$

11.3.90.

$$4 \sin x (\cos x)^2 > \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

11.3.91.

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)}{\cos x} \tan x < 0$$

11.3.92.

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) \geq \cot x$$

11.3.93.

$$\sin\left(3x - \frac{7\pi}{2}\right) < \cot(3x - \pi)$$

11.3.94.

$$\sin 2x \sin 5x \leq \cos 5x \cos 2x$$

11.3.95.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \leq \frac{1}{2} \sin x$$

11.3.96.

$$\cos x + \sin x \leq \sqrt{2}$$

11.3.97.

$$\cos x - \sin x \geq \sqrt{2}$$

11.3.98.

$$(\cot x)^2 - (\sin x)^2 > \frac{1}{2}$$

11.3.99.

$$2 \cos x - \cos 2x > (\sin x)^2$$

11.3.100.

$$2 \sin x - \sin 2x > 1 - 2 \cos x$$

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

11.3.101.

$$\begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

11.3.102.

$$\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1 \\ 16^{(\sin x)^2 + (\cos x)^2} = 4 \end{cases}$$

11.3.103.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \tan x \cdot \tan y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

11.3.104.

$$\begin{cases} \sin x = 2 \sin y \\ \cos x = \frac{1}{2} \cos y \end{cases}$$

11.3.105.

$$\begin{cases} x \cdot \sin 2\alpha + y \cdot \cos 2\alpha = y \\ x \cdot (1 - \cos 2\alpha) + y \cdot \sin 2\alpha = 1 \end{cases}$$

11.3.106.

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \frac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

11.3.107.

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = 0 \end{cases}$$

11.3.108.

$$\begin{cases} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0 \\ \sin x = \sin y \end{cases}$$

11.3.109.

$$\begin{cases} \sin \pi x \cos \pi y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

11.3.110.

$$\begin{cases} \tan x \cot y = \sin x \cos y \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

11.3.111.

$$\begin{cases} \tan x \cot y = 1 \\ \tan y \cot x = 1 \end{cases}$$

11.3.112.

$$\begin{cases} (\sin x)^2 - \cos y = \frac{1}{2} \\ (\cos x)^2 + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

11.3.113.

$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$$

11.3.114.

$$\begin{cases} \sin(x - y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x + y) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

11.3.115.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \cos x + \sin y = -2 \end{cases}$$

11.3.116.

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

11.3.117.

$$\begin{cases} \sin 2x \cdot \cos 3y = 1 \\ \sin 4x = \cos 3y \end{cases}$$

11.3.118.

$$\begin{cases} \sin x - \cos y = \frac{1}{2} \\ \cos 2x + \cos 2y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

11.3.119.

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases}$$

11.3.120.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos x + \cos 2y = 1 \end{cases}$$

11.4 Vegyes feladatok

11.4.1. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$2[(\sin x)^6 + (\cos x)^6] - 3[(\sin x)^4 + (\cos x)^4] + 1 = 0$$

11.4.2. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezést!

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta)$$

11.4.3. Legyen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 + (\sin \gamma)^2 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 2$$

11.4.4. Legyen $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\cot \alpha \cot \beta + \cot \alpha \cot \gamma + \cot \beta \cot \gamma = 1$$

11.4.5. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$$

11.4.6. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

11.4.7. Legyen $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ és $\sin 2\alpha = \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}$, ahol t adott érték! Határozzuk meg a

$\sin \alpha + \cos \alpha$ értékét!

11.4.8. Legyen $0 < \alpha < \pi$ és

$$\tan x = \frac{\cos \alpha (1 + \cos \alpha) + (\sin \alpha)^2}{\sin \alpha (1 + \cos \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha}$$

Határozzuk meg az x értékét!

11.4.9. Fejezzük ki a következő kifejezést $\cot x$ segítségével!

$$\frac{1}{(\sin x)^2 (\cos x)^2}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számok halmazán!

11.4.10.

$$\begin{cases} (\tan x)^2 - 2(\cot y)^2 = 1 \\ 2(\tan x)^2 - 3(\cot y)^2 = 3 \end{cases}$$

11.4.11.

$$\begin{cases} 2x + y = \frac{\pi}{4} \\ \tan 2x + \tan y = 1 \end{cases}$$

11.4.12.

$$\begin{cases} xy = n \text{ ahol } n \text{ egész szám} \\ \tan \frac{\pi x}{8} = -1 \end{cases}$$

11.4.13.

$$\begin{cases} \tan x - \tan 3y = 0 \\ \cot 3x + \tan 9y = 2 \end{cases}$$

11.4.14.

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos y = 0 \\ \cos 2x - \sin y = 2 \end{cases}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

11.4.15.

$$(\sin x)^4 > 4 - 3(\sin x)^2$$

11.4.16.

$$\frac{1}{(\cos x)^2} - \frac{2}{\cos x} + 1 \leq (\tan x)^2$$

11.4.17.

$$\frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{2}{\sin x} < (\cot x)^2 - 1$$

11.4.18.

$$1 + \sin x \geq \sin 2x + 2 \cos x$$

11.4.19.

$$\frac{1}{\cos x} \leq \tan x$$

11.4.20.

$$\frac{1}{\sin x} > \cot x$$

11.4.21.

$$\sin x \cos 5x > \cos x \sin 5x$$

11.4.22.

$$\cos 2x \cos 3x \leq \sin 2x \sin 3x$$

11.4.23.

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} > 0$$

11.4.24.

$$\frac{(\tan x)^2 - (\sin x)^2}{(\cot x)^2 - (\cos x)^2} > 1$$

11.4.25.

$$(\cos x)^4 - (\sin x)^4 \geq \frac{1}{2}$$

11.4.26.

$$(\cos x)^4 + (\sin x)^4 \geq \frac{3}{4}$$

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

11.4.27.

$$\sin x - \frac{1}{2} = \sqrt{(\cos 6x)^2 - 1}$$

11.4.28.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

11.4.29.

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \tan x}$$

11.4.30.

$$\sqrt{\cot x - 1} = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ahol } 0 < x < \pi$$

11.4.31.

$$\sqrt{1 - \sin x} = -\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$$

11.4.32.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{41}\right) = \cos x \sin \frac{\pi}{41} + \cos \frac{\pi}{41}$$

11.4.33.

$$\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - (\sin x)^2} = 2 \cos x$$

12.Síkgeometria

12.1.Háromszögek

12.1.1. Egy derékszögű háromszög átfogója 41cm. Területe 180 cm^2 . Mekkora a befogók?

12.1.2. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 24 cm. Területe 120 cm^2 . Mekkora a köré, illetve bele írható kör sugara?

12.1.3. Hány olyan derékszögű háromszög van, melynek egyik befogója 15 cm, és oldalainak mérőszáma cm-ben mérve egész szám?

12.1.4. Hány olyan derékszögű háromszög van, melynek egyik befogója 40 cm, és oldalainak mérőszáma cm-ben mérve egész szám?

12.1.5. Egy derékszögű háromszög átfogója c. Az átfogóhoz tartozó súlyvonal mértani közepe a két befogónak. Mekkora a befogók?

12.1.6. Egy ABC egyenlő szárú háromszög alapja 60 cm, magassága 40 cm. Az AB alap F felezőpontjából merőlegeseket bocsátunk a szárakra, ezek talppontjai D és E. Mekkora a CEFD négyszög kerülete, területe?

12.1.7. Egy ABC egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, magassága 5 cm. Az AB alap F felezőpontjából merőlegeseket bocsátunk a szárakra, ezek talppontjai D és E. Mekkora a CEFD négyszög kerülete, területe?

12.1.8. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AC=BC$) alapja 12 cm, szára 10 cm, alapjainak harmadolópontjai D,E. Ezekből bocsátunk merőlegeseket a szárakra, ezek talppontjai F,G. Határozzuk meg a DFCGE ötszög kerületét, területét!

12.1.9. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AC=BC$) kerülete 64 cm, alapjának és a hozzá tartozó magasságának aránya 3:2. Alapjainak harmadolópontjai D,E. Ezekből bocsátunk merőlegeseket a szárakra, ezek talppontjai F,G. Határozzuk meg a DFCGE ötszög kerületét, területét!

12.1.10. Egy háromszög két oldala 6 cm illetve 7 cm. A harmadik oldalhoz tartozó magasság 4 cm. Mekkora a 3. oldal?

12.1.11. Egy háromszög két oldala 10 cm illetve 17 cm. A harmadik oldalhoz tartozó magasság 8 cm. Mekkora a 3. oldal?

12.1.12. Egy szabályos háromszög köré írható kör sugara 2 cm-rel nagyobb a beírt kör sugaránál. Mekkora a háromszög oldalainak a hossza?

12.1.13. Egy derékszögű háromszög két oldala 10, és 12 cm. Mekkora lehet a köré, illetve beírt körének a sugara?

12.1.14. Egy derékszögű háromszög beírt körének a sugara 3 cm, területe 54 cm^2 . Mekkora az oldalai?

12.1.15. Egy derékszögű háromszög beírt körének a sugara 1 cm, kerülete 15 cm. Mekkora az oldalai?

12.1.16. Határozd meg a beírt, és a köré írt kör középpontjainak a távolságát abban a derékszögű háromszögben, melyben a két befogó 12 és 16 cm!

12.1.17. Határozd meg a beírt, és a köré írt kör középpontjainak a távolságát abban a derékszögű háromszögben, melyben a két befogó aránya 5:12, és az átfogó 26 cm!

12.1.18. Egy derékszögű háromszög két befogójának aránya 8:15. Átfogója 34 cm. Határozzuk meg a befogókhoz tartozó szögfelezők hosszát! Milyen hosszú a derékszögű csúcsot és a beírható kör középpontját összekötő szakasz hosszát!

12.1.19. Egy derékszögű háromszög átfogója az egyik befogótól 2 cm-rel, a másik befogótól 16 cm-rel hosszabb. Mekkora az átfogóhoz tartozó magassága? Mekkora a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek aránya?

12.1.20. Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság olyan szakaszokra bontja, melyek különbsége 6 cm. Az egyik befogó kétszer akkora, mint a másik. Mekkora a háromszög oldalai?

12.1.21. Egy derékszögű háromszög átfogóját a hozzá tartozó magasság olyan szakaszokra bontja, melyek különbsége 1 cm. Az kisebbik befogó 1 cm-rel rövidebb, mint az átfogó. Mekkora a háromszögbe írható kör sugara?

12.1.22. Egy derékszögű háromszög átfogója c . Az egyik befogó a másik befogó és az átfogó mértani közepe. Mekkora a befogók?

12.1.23. Az ABC derékszögű háromszög egyik befogója 15 cm, a másik befogója 9 cm-rel rövidebb, mint az AB átfogó. Az AC befogó egy belső K pontjára igaz, hogy $AK=BK$. Mekkora a BK szakasz hossza?

12.1.24. Az ABC háromszögben az A csúcshoz tartozó magasság talppontja D, a B csúcshoz tartozó E. Az AB oldal felezőpontja F. Mekkora a DFE háromszög szögei, ha a CAB szög 52° , a CBA szög pedig 61° ?

12.2. Négyyszögek

12.2.1. Egy téglalap oldalai 20 és 12 cm-esek. A hosszabbik oldalán hol van az a pont, ami egyenlő távol van két átlételes csúcstól? A rövidebbik oldalán hol van az a pont, ami egyenlő távol van két átlételes csúcstól?

12.2.2. Egy derékszögű trapézt az egyik átlója két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja. Mekkora a trapéz területe, ha a derékszögű szár d hosszúságú?

12.2.3. Egy „a” oldalú négyzet egyik átlójának harmadoló pontja milyen távol van a csúcsoktól?

12.2.4. Mekkora átmérőjű kör írható egy 20 cm illetve 14 cm alappal rendelkező szimmetrikus trapézba?

12.2.5. Egy ABCD derékszögű érintőtrapéz szárainak az összege 30 cm. Számítsuk ki a trapéz oldalainak a hosszát, ha a beírt körnek, az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja 1:7 arányban osztja az AD szát! (A BC száron lévő E osztópontra igaz, hogy $CE : EB = 1:7$)

12.2.6. Egy ABCD derékszögű trapéz beírt körének sugara 10 cm. Számítsuk ki a trapéz oldalainak a hosszát, ha a beírt körnek, az alapokra nem merőleges AD szárral vett érintési pontja negyedeli az AD szát! (A BC száron lévő E osztópontra igaz, hogy $CE : EB = 1:3$)

12.2.7. Egy ABCD trapéz ($AB \parallel CD$) BD és AC átlójának metszéspontja E. Az ABE háromszög területe kilencszerese a CDE háromszög területének. Az ABCD trapéz területe hányszorosa az EBC háromszög területének?

12.2.8. Egy ABCD trapéz BD és AC átlójának metszéspontja E. Az AB alap kétszer akkora, mint a vele párhuzamos CD. Az ABCD trapéz területe hányszorosa az EDA háromszög területének?

12.2.9. Egy ABCD trapéz területe 420 cm^2 . Az AB és a CD alapok aránya 5:2. Mekkora területű részekre bontják a trapézt az oldalfelezőpontok által meghatározott szakaszok?

12.2.10. Egy ABCD trapézban összekötjük az oldalfelezőpontokat. A keletkező háromszögek közül a legnagyobbak a területe 60 cm^2 . Mekkora a trapéz területe, ha az AB alap kétszerese a CD alapnak?

12.2.11. Egy trapézban összekötjük az oldalfelezőpontokat. A keletkező háromszögek közül a legkisebbnek a területe 120 cm^2 . Mekkora a trapéz területe, ha az AB alap háromszorosa a CD alapnak?

12.2.12. Egy húrnégyszög szögeinek aránya 5:6:7. Mekkora lehetnek a húrnégyszög szögei?

12.2.13. Egy húrnégyszög szögeinek aránya 6:9:5. Mekkora lehetnek a húrnégyszög szögei?

12.2.14. Egy kör ABCD pontjaira a következők teljesülnek: Az AB, illetve CD szelőt elmetsszük egy AD-vel párhuzamos egyenessel. Ez az egyenes az AB szelőt E, a CD szelőt F pontban metszi. Milyen síkidom az BCFE négyszög?

12.2.15. Két kör metszéspontjain keresztül húzunk 1-1 szelőt, melyek a köröket további 1-1 pontban (A,B illetve C,D) metszik. Milyen síkidom az ABCD négyszög?

12.2.16. Egy szimmetrikus érintőtrapéz alapjainak hossza 20 illetve 10 cm. Mekkora az átlók és a trapéz területe?

12.2.17. Egy szimmetrikus érintőtrapéz szárainak hossza 24 cm. Alapjainak aránya 2:1. Mekkora az átlók és mekkora területű részekre bontják az átlók a trapézt?

12.2.18. Egy 25 cm sugarú kör köré egy olyan derékszögű trapézt rajzolunk, melynek legkisebb oldala 37.5 cm. Mekkora a trapéz területe?

12.2.19. Egy 10 cm sugarú kör köré egy olyan derékszögű trapézt rajzolunk, melynek legkisebb oldala 15 cm. A trapéz területének hány százaléka esik a körön kívülre?

12.2.20. Adott egy szimmetrikus trapéz magassága mértani közepe az alapoknak? Milyen négyszög az adott trapéz?

12.3.Sokszögek

12.3.1. Egy szabályos sokszögnek 170 átlója van összesen. Hány lényegesen különböző (hosszra való tekintettel) átlója van?

12.3.2. Egy szabályos sokszög belső szögeinek összegét az $x^3 - 1790x^2 - 18000x = 0$ egyenlet gyökei adják. Hány átlója, szimmetriatengelye van?

12.3.3. Egy szabályos sokszög átlóinak számát az $x^3 - 11x^2 - 26x = 0$ egyenlet gyökei adják. Mekkora egy belső szöge? Hány különböző hosszúságú átlója van?

12.4. Körös feladatok

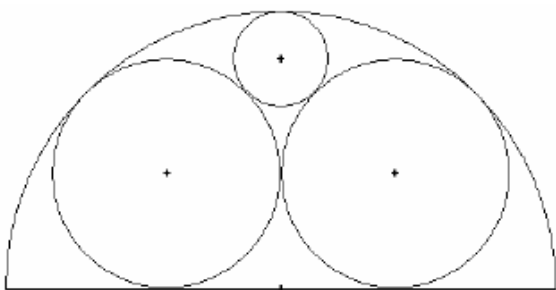
12.4.1. Milyen távol van egymástól egy 10 cm sugarú körben egy 12 cm-es, illetve egy 16 cm-es párhuzamos húr?

12.4.2. Mekkora az r , ha $R = 10$ cm?



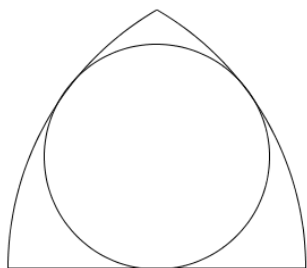
12.4.3. Mekkora a R , ha $r = 5$ cm?

12.4.4. A félkör sugara 1 cm. Mekkora a másik két kör sugara?



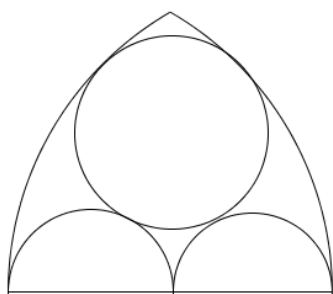
12.4.5. A két nagyobb kör sugara $\sqrt{2}$ cm. Mekkora a kisebbik kör, és a félkör sugara?

12.4.6. Mekkora a kör sugara, ha a körívek sugara 10 cm?



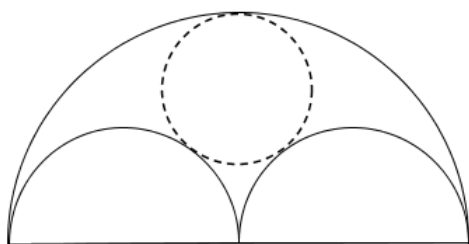
12.4.7. Mekkora a körívek sugara, ha a kör sugara 6 cm? (lásd. fenti ábra)

12.4.8. Mekkora a kör sugara, ha a félkörök sugara 10 cm?



12.4.9. Mekkora a félkörök sugara, ha a kör sugara 6 cm? (lásd fenti ábra)

12.4.10. Számítsuk ki a szaggatott vonallal jelölt kör sugarát, ha a félkörök átmérője 8 cm!



12.4.11. Számítsuk ki a félkörök sugarát, ha a szaggatott vonallal jelölt kör sugara 5 cm!

12.4.12. Egy kör sugara 5 cm. Eltoljuk a kört úgy, hogy ha az eredeti kör középpontját összekötjük az eltolt körrel való metszéspontokkal, akkor a két sugár merőleges lesz egymásra. Mekkora a két kör közös részének a területe?

12.4.13. Egy kör sugara 6 cm. Eltoljuk a kört úgy, hogy ha az eredeti kör középpontját összekötjük az eltolt körrel való metszéspontokkal, akkor a két sugár 120° -os szöget zár be egymással. Mekkora a két kör közös részének a területe?

12.4.14. Egy 8, illetve 5 cm sugarú kör közös belső érintőszakaszainak a hossza 10 cm. Mekkora a középpontjainak a távolsága?

12.4.15. Egy 12, illetve 8 cm kör közös külső érintőszakaszainak a hossza 32 cm. Mekkora a középpontjainak a távolsága?

12.4.16. Egy 10, illetve 8 cm kör középpontjainak a távolsága 20 cm. Milyen hosszú a közös külső, illetve közös belső érintőszakaszok hossza?

12.4.17. Két kívülről érintkező kör sugarai 9 cm, 4 cm. Érintik ugyanazt az egyenest is. Mekkora az érintő szakasz hossza?

12.4.18. Két kívülről érintkező kör sugarai 24 cm, 14 cm. Érintik ugyanazt az egyenest is. Mekkora az érintési pontok távolsága?

12.4.19. Egy 10 cm sugarú félkörív felezőpontja P. A félkörív tetszőleges Q pontjának az átmérőre eső merőleges vetülete M. Mivel egyenlő a $PM^2 + QM^2$?

12.4.20. Egy A pontból egy k körhöz húzott érintőszakasz hossza 30 cm. Az A-ból a körhöz húzott szelő 12 cm távolságra van a k kör középpontjától. Ennek a szelőnek kisebbik szelete 15 cm. Mekkora a k kör sugara?

12.4.21. Egy 5 cm sugarú körhöz 12 cm hosszú érintőket húzhatunk egy külső pontból. Milyen hosszú az a szakasz, amely az érintési pontokat köti össze?

12.4.22. Egy A pontból egy k körhöz húzott érintő 10 cm. Az A ponton áthaladó szelő a k kör középpontjától 4 cm távolságra van, hosszabbik szelete 20 cm. Mekkora a k kör sugara?

12.4.23. Egy A pontból egy k körhöz húzott érintő 6 cm. Az A pont a k kör középpontjától (K) 9 cm távolságra van. A P-ből a k-hoz húzott szelő (e) hosszabbik szelete 12 cm. Mekkora a K pont és az e egyenes távolsága?

12.4.24. Egy 6 illetve 8 cm sugarú kör középpontjainak távolsága 20 cm. A centrálisuk (középpontjaikat összekötő egyenes) melyik pontjából húzható egyenlő hosszú érintő?

12.5. Hasonlóság

12.5.1. Mekkora annak a háromszögnek az oldalai, amelybe két olyan érintkező kör írható, melyek a háromszög oldalait is érintik, és a sugarak 6, illetve 9 cm?

12.5.2. Mekkora annak az egyenlő szárú háromszögnek a szárai, amelybe két olyan érintkező kör írható, melyek a háromszög oldalait is érintik, és a nagyobbik sugara 8 cm, a háromszög alapja pedig 12 cm?

12.5.3. Egy egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magassága 12 cm, a szárhoz tartozó 9 cm. Mekkora a háromszögbe írható kör területe?

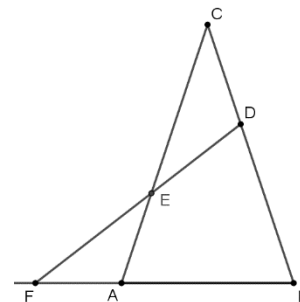
12.5.4. Egy egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó illetve a szárhoz tartozó magasságának aránya 5:4. Területe 48 cm^2 ? Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

12.5.5. Az ABC háromszög B csúcsából induló egyenes az AC oldalt egy P pontban metszi. Az így keletkező ABC illetve CPB szögek megegyeznek. Az AP szakasz hossza 5 cm, a PC szakaszé 6 cm. Mekkora a BC oldal?

12.5.6. Az ABC háromszög B csúcsából induló egyenes az AC oldalt egy P pontban metszi. Az így keletkező ABP illetve ACB szögek megegyeznek. Az AB oldal hossza 6 cm, az AC oldalé 12 cm. Mekkora a PC és AP szakaszok?

12.5.7. A D és E pontok az ABC egyenlőszárú háromszög harmadolópontjai. Határozzuk meg az FA és FB szakaszok arányát!

12.5.8. A D az ABC egyenlőszárú háromszög CB oldalát 1:3 arányban osztja, míg az E pont a CA oldalt 3:1 arányban. Határozzuk meg az FB és FA szakaszok arányát!



12.5.9. Egy szabályos háromszög oldalai 12 cm hosszúak. Az egyik oldalával párhuzamos két egyenes három egyenlő területű részre bontja a háromszöget. Milyen hosszúak a párhuzamosok háromszögbe eső szakaszai?

12.5.10. Egy szabályos háromszög oldalai 10 cm hosszúak. Az egyik oldalával párhuzamos egyenes két egyenlő területű részre bontja a háromszöget. Milyen hosszú a párhuzamos háromszögbe eső szakasza? Mekkora területű síkidomokra bontja ez a szakasz a szabályos háromszöget?

12.5.11. Egy háromszög egyik oldalának harmadolópontjain keresztül párhuzamosokat húzunk az egyik oldallal. Határozzuk meg a keletkező síkidomok területének arányát!

12.5.12. Egy háromszög egyik oldalának negyedelőpontjain keresztül párhuzamosokat húzunk az egyik oldallal. Határozzuk meg a keletkező síkidomok területének arányát!

12.5.13. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, a hozzá tartozó magasság hossza 15 cm. A háromszögbe téglalapot írunk, amelynek egyik 8 cm hosszú oldala illeszkedik a háromszög alapjára, a másik két csúcsa pedig a háromszög 1-1 szárán található. Mekkora a téglalap másik oldala?

12.5.14. Egy egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magasság hossza 12 cm, szára 20 cm. A háromszögbe téglalapot írunk, amelynek egyik 10 cm hosszú oldala illeszkedik a háromszög alapjára, a másik két csúcsa pedig a háromszög 1-1 szárán található. Mekkora a téglalap másik oldala?

12.5.15. Az ABCD trapéz AD szárának hossza 6 cm. A trapéz DCE kiegészítő háromszögének DE oldala 4 cm hosszú. Mekkora az alapok, ha az CD alap 2 cm-el rövidebb? Hogy aránylik a kiegészítő háromszög területe a trapéz területéhez?

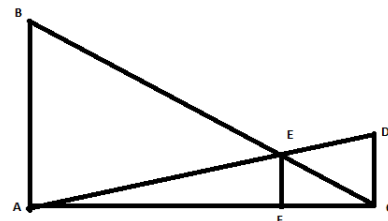
12.5.16. Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja 15 cm, a rövidebbik 10 cm. Szára 2 cm-el kisebb, mint a kiegészítő háromszögének azon oldala, amely a szár egyenesén van. Mekkora a szára? Hogy aránylik a kiegészítő háromszög területe a trapéz területéhez?

12.5.17. Egy trapéz alapjai 12 és 8 cm. Kössük össze a szárak harmadolópontjait az alapokkal párhuzamosan, határozzuk meg a keletkező szakaszok hosszát!

12.5.18. Egy trapéz alapjai 25 és 15 cm. Kössük össze a szárak negyedelőpontjait az alapokkal párhuzamosan, határozzuk meg a keletkező szakaszok hosszát!

12.5.19. Határozzuk meg az FE szakasz hosszát, ha $AB=5$ cm, $CD=3$ cm, $AF=10$ cm!

12.5.20. Határozzuk meg az AB szakasz hosszát, ha $FE=6$ cm, $CD=8$ cm, $AF=12$ cm!



12.5.21. Egy 21 illetve 28 cm sugarú kör közös belső érintőinek metszéspontja 30 cm-re van a kisebbik sugarú kör középpontjától. Milyen távolságra van a két középpont egymástól?

12.5.22. Egy 3 illetve 4 cm sugarú kör közös külső érintők metszéspontja 40 cm-re van a nagyobbik sugarú kör középpontjától. Milyen távolságra van a két középpont egymástól?

12.6. Vegyes feladatok

12.6.1. Egy derékszögű háromszög befogóinak aránya 4:3. Területe 54 cm^2 . Az átfogóhoz tartozó magasság két háromszögre bontja. (h_1, h_2) Mekkora ezek kerülete? Milyen távolságra van a h_1, h_2 háromszögek beírható körének középpontja?

12.6.2. Egy derékszögű háromszög átfogója 26 cm, beírható körének sugara 4 cm. Mekkora területű háromszögre (h_1, h_2) bontja az eredeti háromszöget az átfogóhoz tartozó magasság? Milyen távolságra van a két háromszög (h_1, h_2) beírható körének középpontja? Milyen távolságra van a két háromszög (h_1, h_2) köré írható körének középpontja?

12.6.3. Vízszintes talajon álló, két függőleges oszlop távolsága 10 m. Az egyik oszlop 3 m, a másik 6 m magas. A talppontjukat összekötő szakasz melyik pontjából látszik derékszög alatt az oszlopok tetejét összekötő szakasz?

12.6.4. Vízszintes talajon álló, két függőleges oszlop távolsága 12 m. Az egyik oszlop 5 m, a másik 9 m magas. A talppontjukat összekötő szakasz melyik pontjából látszik derékszög alatt az oszlopok tetejét összekötő szakasz?

12.6.5. Egy észak-kelet felé haladó autóról két hegycsúcs (amelyek 100 km távolságra vannak egymástól) közül az egyik északi, a másik keleti irányban helyezkedik el. Három óra múlva az egyik nyugati, a másik délkeleti irányban helyezkedik el. Mekkora az autó sebessége, ha egyenes vonalban halad?

13. Térgeometria

13.1. Hasábok, hengerek

13.1.1. Egy kocka éle 3 cm-rel kisebb, mint egy másik kocka éle. Térfogatuk különbsége 447.75 cm^3 . Mekkora a felszíneik különbsége?

13.1.2. Két kocka közül egy fehér kocka felszíne 30%-al kisebb, mint egy feketéé. Hány %-al nagyobb a fekete kocka térfogata, mint a fehéré?

13.1.3. Két kocka közül egy fehér kocka térfogata 20%-al kisebb, mint egy feketéé. Hány %-al kisebb a térfogata, mint a fekete kocka térfogata?

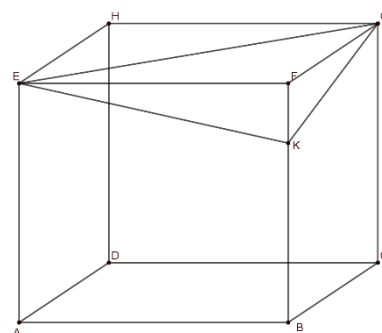
13.1.4. Egy deciméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldarabolunk 486 db kockára úgy, hogy közülük 485 db egybevágó 1 dm élű kocka és egy 'b' élű kocka. Határozzuk meg az eredeti kocka és a 'b' élű kocka felszínének különbségét!

13.1.5. Egy centiméterben mérve egész szám élhosszúságú kockát feldarabolunk 118 db kockára úgy, hogy közülük 117 db egybevágó 1 cm élű kocka és egy 'b' élű kocka. Határozzuk meg, hogy a 'b' élű kocka térfogata hány %-a az eredeti kocka térfogatának!

13.1.6. Adott az ábra szerinti ABCDEFGH kocka, a K pont a BF él F-hez közelebbi harmadolópontja.

a) Mekkora a kocka térfogata, ha $KG = 4 \cdot \sqrt{10} \text{ cm}$. A választ dm^3 -ben adjuk meg!

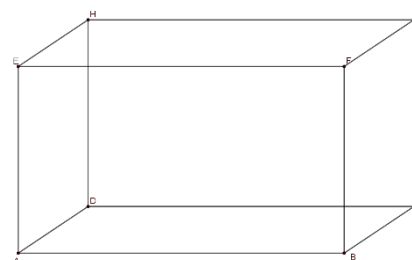
b) Mekkora szöget zár be az EFG háromszög síkja az EGK háromszög síkjával?



13.1.7. Adott a 13.1.6 feladat ábrája szerinti ABCDEFGH kocka, a K pont a BF él felezőpontja.

a) Mekkora a kocka térfogata, ha $KG = 4 \cdot \sqrt{5} \text{ dm}$. A választ század m^3 -ben adjuk meg!

b) Mekkora szöget zár be az EFG háromszög síkja az EGK háromszög síkjával?



13.1.8. Adott az ábra szerinti ABCDEFGH téglatest. A $\angle DAH = 45^\circ$, illetve a $\angle BAF = 30^\circ$.

a) Mekkora az $\angle FAH$?

b) Mekkora az AEH és az AFH síkok hajlásszöge?

13.1.9. Adott a 13.1.8-as feladat ábrája szerinti ABCDEFGH téglatest. A $\angle DAH = 30^\circ$, illetve a $\angle BAF = 60^\circ$.

a) Mekkora az $\angle GBE$?

b) Mekkora az ADB és az EDB síkok hajlásszöge?

13.1.10. Adott a 13.1.8-as feladat ábrája szerinti ABCDEFGH téglatest. $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm, $AE = 6$ cm. Az FG él felezőpontja legyen P, a GH él felezőpontja pedig R.

a) Határozzuk meg az ADHE lap és a DAP háromszög síkjának a hajlásszögét!

b) Határozzuk meg az ABCD lap és a ABR háromszög síkjának a hajlásszögét!

13.1.11. Egy téglalap egyik oldala kétszerese egy másik oldalnak, és minden oldala 3-tól nagyobb, centiméterben mérve egész szám. A téglalapot befestjük kékre, majd a lapjaival párhuzamosan 1 cm élű kockákra daraboljuk. Így 136 olyan kocka keletkezik, amelyeknek pontosan az egyik lapja kék. Mekkora lehet a téglatest térfogata?

13.1.12. Egy négyzetes oszlop minden oldala 4-től nagyobb, centiméterben mérve egész szám. Az oszlopot befestjük kékre, majd a lapjaival párhuzamosan 1 cm élű kockákra daraboljuk. Így 64 olyan kocka keletkezik, amelyeknek pontosan két lapja kék. Mekkora lehet az oszlop térfogata?

13.1.13. Egy szabályos háromszög alapú hasáb alakú tartály magassága 20 m, térfogata $500 \cdot \sqrt{3} \text{ m}^3$.

a) Mekkora a felszíne?

b) Milyen magasan áll benne $6000 - 600 \cdot \sqrt{3}$ hektoliter folyadék, ha az egyik oldallapjára fektetjük?

13.1.14. Egy konténer olyan 1.5 méter magas egyenes hasáb, melynek alaplapja egy szimmetrikus trapéz 1.6 és 4 méteres alapokkal, szárai 2 métereseek.

a) Készítsünk vázlatot, és számítsuk ki a konténer térfogatát!

b) Állapítsuk meg milyen magasan áll benne 4.5 m^3 folyadék (ha „természetes helyzetben”, a trapézok a vízszintesre merőlegesen, helyezkednek el, úgy hogy az 1.6 méteres alap érintkezik a talajjal).

13.1.15. Egy konténer olyan 3.12 m^3 térfogatú egyenes hasáb, melynek alaplapja egy szimmetrikus trapéz, 2.2 és 3 méteres alapokkal, szárai 1 métereseek.

a) Készítsünk vázlatot, és számítsuk ki a hasáb magasságát!

b) Állapítsuk meg milyen magasan áll benne 2 m^3 folyadék (ha „természetes helyzetben”, a trapézok a vízszintesre merőlegesen, helyezkednek el, úgy hogy az 2.2 méteres alap érintkezik a talajjal)!

13.1.16. Egy tartály alakja olyan egyenes szabályos hatszög alapú hasáb, melynek alapéle 0.75 méter, magasságának a 40%-a a hatszög legrövidebb átlója.

a) Határozzuk meg a tartály felszínét és térfogatát!

b) Milyen magasan áll benne a 1.5 m^3 víz, ha az egyik oldallapjára állítjuk?

13.1.17. Egy szabályos háromszög oldala 12 cm. Minden oldalával húzunk egy párhuzamost egy 0.3 dm-től kisebb d távolságra. A párhuzamosok mentén felhajtjuk a lapokat, és így keletkezik egy szabályos háromszög alapú hasáb. Mekkora d esetén lesz a hasáb térfogata maximális?

13.1.18. Egy négyzet oldalainak hossza 20 cm. Minden oldalával húzunk egy párhuzamost egy 5 cm-től kisebb x távolságra. A párhuzamosok mentén felhajtjuk a lapokat, és így keletkezik egy négyzetes oszlop. Mekkora x esetén lesz az oszlop térfogata maximális?

13.1.19. Egy forgáshenger alapkörének átmérője 20 cm, magassága 40 cm. Elmetsszük a tengelyétől 3 cm távolságra lévő, párhuzamos síkkal. Mekkora a lemetezett, kisebbik rész felszíne, térfogata?

13.1.20. Egy forgáshenger magassága 25 cm. Elmetsszük a tengelyétől 4 cm távolságra lévő, párhuzamos síkkal úgy, hogy az alapkörön keletkező húr hossza 6 cm. Mekkora a lemetezett, kisebbik rész felszíne, térfogata?

13.1.21. Egy forgáshenger felszíne $500\pi \text{ cm}^2$, tengelymetszetének területe 300 cm^2 . Elmetsszük a tengelyétől 6 cm távolságra lévő, párhuzamos síkkal. Mekkora a lemetezett, kisebbik rész felszíne, térfogata?

13.2. Gúlák, kúpok

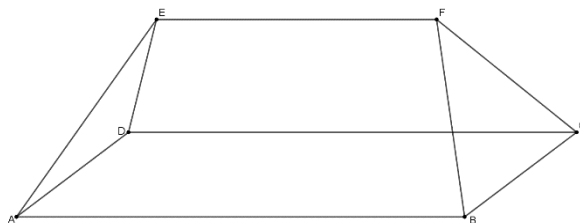
13.2.1. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 12 cm, oldaléle 10 cm. Elmetsszük az alaplappal, párhuzamos síkkal úgy, hogy a keletkező testek térfogata megegyezik. Mekkora a síkmetszet kerülete? Milyen távol van a síkmetszet az alaplaptól?

13.2.2. Egy szabályos hatoldalú gúla alapéle 10 cm, magassága 12.5 cm. Elmetsszük az alaplappal, párhuzamos síkkal úgy, hogy a lemetszett gúla térfogata nyolcadrésze az eredeti gúla térfogatának. Mekkora a síkmetszet kerülete? Milyen távol van a síkmetszet az alaplaptól?

13.2.3. Egy kocka élei 12 cm-esek. Minden csúcsnál a hozzá közelebb eső élharmadolópontokat tartalmazó sík mentén levágjuk a sarkokat. Határozzuk meg a keletkező test felszínét és térfogatát!

13.2.4. Egy kocka minden csúcsnál a hozzá közelebb eső élnegyedelőpontokat tartalmazó sík mentén levágjuk a sarkokat. A megmaradt test térfogata 120 cm^3 . Mekkora a kocka éle?

13.2.5. Határozzuk meg annak az ábrán látható testnek a felszínét és térfogatát, amelynek alaplapja egy téglalap, oldallapjai két egybevágó egyenlő szárú háromszög, és két egybevágó szimmetrikus trapéz. $AB=10 \text{ cm}$, $BC=4 \text{ cm}$. $BF=5 \text{ cm}$, $EF=6 \text{ cm}$.



13.2.6. Határozzuk meg az előző feladathoz hasonló test felszínét és térfogatát, ha az alaplap kerülete 68 cm, területe 284 cm^2 . $EF=BF=10 \text{ cm}$.

13.2.7. Egy épület alsó része egy 3 méter magas, szabályos 10-szög alapú hasáb 1.5 méteres alapélekkel, felső része egy 2 méter magas gúla, melynek alaplapja megegyezik a hasáb fedőlapjával. Hány fűtőtest kell a felmelegítéséhez, ha 1 fűtőtest 150 m^3 -t tud felfűteni? Mennyi pénzből lehet kívülről lefesteni, ha egy 5 literes festék ára 15.000 Ft? (1 literrel 75 m^2 terület festhető be és ugyanazzal a festékekkel festjük le az alsó, és a felső részét is)

13.2.8. Egy szabályos háromoldalú gúla alaplapjának területe $72\sqrt{3} \text{ cm}^2$, oldallapjának területe $24\sqrt{7} \text{ cm}^2$. Mekkora a térfogata?

13.2.9. Egy szabályos négyoldalú gúla felszíne 420 cm^2 , oldallapjának területe az alaplap területének $\frac{4}{5}$ -öd része. Mekkora a térfogata?

13.2.10. Egy gúla magassága 20 cm. Az alapjától 5 cm távolságra lévő párhuzamos síkmetszet területe 144 cm^2 . Mekkora a gúla térfogata?

13.2.11. Egy egyenes körkúp alkotója 15 cm. Tengelymetszetének területe 108 cm^2 . Mekkora a kúp felszíne, térfogata, kiterített palástjának középponti szöge?

13.2.12. Egy egyenes körkúp tengelymetszetének területe 600 cm^2 , az alkotók az alaplappal 50° -os szöget zárnak be. Mekkora a kúp felszíne és térfogata, kiterített palástjának középponti szöge?

13.2.13. Egy kúp magassága 15 cm. Az alapjától 8 cm távolságra lévő párhuzamos síkmetszet területe 100 cm^2 . Mekkora a kúp felszíne, térfogata?

13.2.14. Egy egyenes körkúp kiterített palástjának a területe p . A kiterített palást középponti szöge 150° . Mekkora a kúp térfogata?

13.2.15. Egy egyenes körkúp tengelymetszetének a területe 60 cm^2 . A kúp alaplapjától 3 cm-re elmetsszük a kúpot az alaplapjával párhuzamos síkkal. Ennek a síkmetszetnek a területe $16\pi \text{ cm}^2$. Mekkora a kúp térfogata?

13.3. Csonkagúla, csonkakúp

13.3.1. Egygúlát elmetsszünk az alaplapjával párhuzamos síkokkal magasságának harmadoló-pontjain keresztül. Határozzuk meg a keletkező testek térfogatának az arányát!

13.3.2. Egygúlát elmetsszünk az alaplapjával párhuzamos síkokkal magasságának negyedelő-pontjain keresztül. Határozzuk meg a keletkező testek térfogatának az arányát!

13.3.3. Egy kúpot úgy metszünk el az alaplapjával párhuzamos síkkal, hogy a keletkező kúp és csonkakúp térfogata egyenlő. Határozzuk meg a magasságuk arányát!

13.3.4. Egy kúpot úgy metszünk el két, az alaplapjával párhuzamos síkkal, hogy a keletkező testek térfogata egyenlő. Határozzuk meg a magasságuk arányát!

13.3.5. Egy szabályos négy oldalú csonkagúlában az alaplap és a fedőlap területének aránya 1:4, az oldallap területe feleakkora, mint az alaplap. Térfogata 360 cm^3 . Mekkora a felszíne?

13.3.6. Egy tartály alakja lefelé keskenyedő négyoldalú csonkagúla, melynek alapéle 2 m, fedőéle 3 m, mélysége 1.5 m. Mennyi víz van benne, ha a magasságának háromnegyed részéig ér?

13.3.7. Egy tartály alakja lefelé keskenyedő csonkakúp, mely alapkörének átmérője 120 cm, fedőkörének átmérője 2 m, mélysége 1 m. Mennyi víz van benne, ha a csonkakúp magasságának 92%-ig ér?

13.3.8. Egy tartály alakja lefelé keskenyedő négyoldalú csonkagúla, melynek alapéle 160 cm, fedőéle 4m, mélysége 2.5 m. Hány liter folyadék van benne, ha a magasságának 45%-ig ér?

13.3.9. Egy tartály alakja lefelé keskenyedő hatoldalú csonkagúla, melynek alapéle 40 cm, fedőéle 1 m, mélysége 3 m. Hány liter folyadék van benne, ha a magasságának két harmad részéig ér?

13.3.10. Egy szabályos négyoldalú gúlát elmetsszünk egy olyan síkkal, ami áthalad az alaplap egyik átlóján, és a gúla magasságán (a csúcspont és annak az alaplapra eső merőleges vetületét összekötő szakaszon). Ennek a síkmetszetnek a területe 96 cm^2 . A gúla csúcsától 6 cm -re elmetsszük a gúlát az alaplapjával párhuzamos síkkal. Ennek a síkmetszetnek a területe 48 cm^2 . Mekkora a keletkező csonkagúla felszíne és térfogata?

13.3.11. Egy egyenes körkúp tengelymetszetének a területe 90 cm^2 . A kúp alaplapjától 4 cm -re elmetsszük a kúpot az alaplapjával párhuzamos síkkal. Ennek a síkmetszetnek a területe $25\pi \text{ cm}^2$. Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata?

13.3.12. Egy egyenes körkúp magassága 8 cm , alapkörének átmérője 12 cm . Az alaplappal párhuzamosan kettévágjuk a kúpot úgy, hogy a síkmetszet illeszkedik a kúp tengelymetszet beírható körének középpontjára. Mekkora a keletkező csonkakúp felszíne?

13.4. Egymásba írt testek, gömbök

13.4.1. Egy szabályos négyoldalú gúla minden éle 10 cm . Mekkora a bele írható maximális térfogatú kocka felszíne?

13.4.2. Egy egyenes körkúp alkotója 15 cm , alaplapjának átmérője 18 cm . Egy olyan hengert írunk bele, melynek alaplapja illeszkedik a kúp alaplapjára, fedőköre pedig érinti a kúp palástját, továbbá magassága egyenlő az alaplapjának átmérőjével. Mekkora ennek a hengernek a térfogata?

13.4.3. Egy szabályos négyoldalú gúla oldaléle 12 cm , magassága 10 cm . Mekkora a bele, illetve köré írható gömb térfogata?

13.4.4. Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 8 cm , magassága 5 cm . Mekkora a bele, illetve köré írható gömb térfogata?

13.4.5. Egy egyenes körkúp nyílásszöge 80° , alkotója 10 cm . Mekkora a bele, illetve köré írható gömb felszíne?

13.4.6. Egy egyenes körkúp tengelymetszetének területe 240 cm^2 , alkotója 26 cm . Mekkora a bele, illetve köré írható gömb felszíne?

13.4.7. Egy forgáskörkúp alkotója 20 cm , alapkörének átmérője 32 cm . Az alaplappal párhuzamosan kettévágjuk a kúpot úgy, hogy a síkmetszet illeszkedik a kúp beírható gömbjének középpontjára. Mekkora a Mekkora a keletkező csonkakúp térfogata?

13.4.8. Egy félgömb átmérője 50 cm. Mekkora a lehető legnagyobb térfogatú beleírható téglatest magassága, amelynek alaplaja (oldalai 10 és 12 cm) illeszkedik a félgömb főkörére?

13.4.9. Egy vízszintesen fekvő papírlap felett 16 cm-re van egy lámpa. Ez megvilágít egy rézgolyót a lapon, melynek árnyéka 24 cm átmérőjű kör. Mekkora a rézgolyó térfogata?

13.4.10. Egy csonkakúp alapkörének átmérője 32 cm, fedőkörének átmérője 20 cm. Mekkora a beleírható gömb térfogata?

13.4.11. Egy lefelé keskenyedő csonkakúp belsejében lévő 24 cm sugarú gömb érinti a csonkakúp alapkörét, melynek átmérője 16 cm, és palástját is. A fedőkör átmérője 40 cm. Mekkora a csonkakúp térfogata?

14.Sorozatok

14.1. Számsorozatok, rekurzív sorozatok

14.1.1. Hányféleképpen jutunk fel egy 12 lépcsőből álló lépcsősoron, ha 1 vagy 2 lépcsőfokot léphetünk egyszerre?

14.1.2. Hányféleképpen jutunk fel egy 8 lépcsőből álló lépcsősoron, ha 1,2 vagy 3 lépcsőfokot léphetünk egyszerre?

14.1.3. Egy sorozat tagjait a harmadik tagtól kezdve a következő rekurzív képlettel tudjuk megadni: $a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$, ahol $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$. Mennyi a sorozat 2019. eleme, és az első 2019 tag összege?

14.1.4. Egy sorozat tagjait a harmadik tagtól kezdve a következő rekurzív képlettel tudjuk megadni: $a_k = a_{k-1} - a_{k-2}$, ahol $a_1 = 1$ és $a_2 = 1$. Mennyi a sorozat 2018. eleme, és az első 2018 tag összege?

14.1.5. Bontsuk csoportokra a pozitív egész számokat a következő szerint: (1), (2,3), (4,5,6), (7,8,9,10),..... stb. a) Az 50.-ik csoportnak melyik az első és melyik az utolsó eleme? A 2019 hányadik csoportnak hányadik eleme?

14.1.6. Bontsuk csoportokra a természetes számokat a következő szerint: (0), (1,2), (3,4,5), (6,7,8,9),..... stb. a) A 100.-ik csoportnak melyik az első és melyik az utolsó eleme? Az 1789 hányadik csoportnak hányadik eleme?

14.1.7. Egy tenyészetben az első percben 2 mm^2 terület lesz fertőzött, a második percben 3 újabb mm^2 terület fertőződik meg. Ezek után a fertőzés minden percben az addigi összegnek megfelelő, azaz a harmadik órában 5, a negyedik órában 10 mm^2 terület fertőződik meg. Változatlan tendencia mellett hányadik percben emelkedik a fertőzött terület 10 m^2 felé?

14.1.8. Egy területen januárban hogy 4 új nyúl volt, februárban 3 kisnyúl született. Ezek után a nyulak szaporodása minden hónapban az addigi összegnek megfelelő, azaz márciusban 7, áprilisban már 14 kisnyúl született. Változatlan tendencia mellett melyik hónapban lesz a nyulak száma 100.000 felett?

14.1.9. Egy a_n számsorozatra a következők teljesülnek. A harmadik tagtól kezdve minden tag kiszámítható az $a_n = a_{n-1} + 12 \cdot a_{n-2}$ képlet alapján. Az $a_1, a_2, a_3 - 9a_1$ egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Az a_n számsorozat első 5 tagjának az összege 682. Mekkora a hatodik tagja?

14.2. Számítási és mértani sorozatok

14.2.1. Egy háromjegyű szám jegyei egy számtani sorozat tagjai. Ha a számot elosztjuk jegyeinek összegével 20.5-et kapunk. Ha a százask és a tízesek helyén álló számjegyeket felcseréljük, akkor az eredetivel 270-el nagyobb számot kapunk. Melyik ez a szám?

14.2.2. Egy háromjegyű szám jegyei egy számtani sorozat tagjai. Ha a számot elosztjuk jegyeinek összegével 48-at kapunk. Ha a százask és az egyesek helyén álló számjegyeket felcseréljük, akkor az eredetivel 396-al kisebb számot kapunk. Melyik ez a szám?

14.2.3. Egy számtani sorozat első 3 tagja a tízes számrendszerben felírva $\overline{ab}; \overline{ba}; \overline{a0b}$. Melyek ezek a számok?

14.2.4. Egy számtani sorozat első 3 tagja a tízes számrendszerben felírva $\overline{a}; \overline{ab}; \overline{bba}$. Melyek ezek a számok?

14.2.5. Az a_n számtani sorozatról tudjuk, hogy $a_r = t$, és $a_t = r$, adjuk meg az a_n sorozatot az n , r , t függvényekében!

14.2.6. Az a_n számtani sorozat differenciája d , első három elemének összege b_1 , következő három elemének összege b_2 , és így tovább. Igazoljuk, hogy a b_n sorozat is számtani, illetve adjuk meg a differenciáját, első elemét a_1 -el és d -vel.

14.2.7. Az a_n számtani sorozat differenciája d , első öt elemének összege b_1 , következő öt elemének összege b_2 , és így tovább. Igazoljuk, hogy a b_n sorozat is számtani, illetve adjuk meg a differenciáját, első elemét a_1 -el és d -vel.

14.2.8. Egy számtani sorozat 1011.-ik eleme egyenlő a sorozat differenciájával. Mennyi az első 2019 tag összege?

14.2.9. Egy számtani sorozat első 10 elemének összege 390. Az első 5 elem összege 200-al kisebb, mint a következő 5 tag összege. Melyik ez a sorozat?

14.2.10. Egy a_n számtani sorozat első 21 eleme közül a páratlan indexű tagok összege 15-el nagyobb, mint a párosoké, valamint $a_{20} = 3a_9$. a) Hányadik tagja a 23? b) Az elsőől kezdve hány tagot kell összeadni, hogy az összeg legalább 2000 legyen?

14.2.11. Melyik az a számtani sorozat, amelyben az első két tag négyzetösszege 208, a második és a harmadik tag négyzetösszege 400?

14.2.12. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Mekkora a szögei?

14.2.13. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, differenciája 3 egység. Mekkora a szögei?

14.2.14. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, leghosszabb oldala 20 egység. Mekkora a beírható kör sugara?

14.2.15. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, területe 24 cm^2 . Mekkora a köré írható kör sugara?

14.2.16. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai kerülete 210 cm. Legrövidebb és leghosszabb oldalának szorzata 4836 cm^2 . Mekkora a területe?

14.2.17. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai kerülete 27 cm. Legrövidebb és leghosszabb oldalának szorzata 65 cm^2 . Mekkora a területe?

14.2.18. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, differenciája 2, legkisebb szöge: 44.415° . Mekkora a beírható kör sugara?

14.2.19. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai, legnagyobb szöge 73.4° . differenciája 2. Mekkora a köré írható kör sugara?

14.2.20. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Legrövidebb oldala 5 cm. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazoljuk, hogy nincs 60° -os szöge!

14.2.21. Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Leghosszabb oldala 8 cm. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazoljuk, hogy nincs 60° -os szöge!

14.2.22. Egy konvex sokszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Legkisebb szöge 135° , legnagyobb pedig 177° . Hány oldalú a sokszög?

14.2.23. Egy konvex sokszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Legkisebb szöge 142.5° , legnagyobb pedig 172.5° . Hány oldalú a sokszög?

14.2.24. Egy konvex sokszög szögei (fokban) számtani sorozat tagjai. Első tagja 143° , differenciája 2. Hány csúcsa van a sokszögnek?

14.2.25. Egy négyszög szögei valamilyen sorrendben számtani sorozat szomszédos tagjai. Milyen négyszög lehet? Bizonyítsuk be!

14.2.26. Egy focitornán az egyik csoportban minden csapat játszott minden csapattal. Az elért pontszámok egy számtani sorozatot alkotnak. Hány csapat szerepelt a csoportban, ha az utolsó helyezett csapat 2 pontot szerzett? (Győzelemért 2, döntetlenért 1 pont jár).

14.2.27. Egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozatban a harmadik és az első tag köbének összege 756. Négyzetük különbsége a differencia 24-szerese. Melyik ez a sorozat?

14.2.28. Egy szigorúan monoton növekvő számtani sorozatban a harmadik és az első tag köbének összege 1072. Négyzetük különbsége a differencia 32-szerese. Melyik ez a sorozat?

14.2.29. Egy mértani sorozat negyedik tagja a 28, hetedik tagja 1.75. Tagja-e a sorozatnak a $\frac{7}{64}$? Hány tagot kell összeadni az elsőtől kezdve, ha az összeg $\frac{3069}{64}$? Elérheti-e a tagok összege az 500-at?

14.2.30. Egy autó sebessége induláskor 120 km/h. Ez percenként 1%-al csökken. Mennyi idő múlva jut el az autó ilyen feltételek mellett a 167 km-re lévő településre. Megtehet-e 300 km-es távolságot az autó?

14.2.31. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 26, az első és a harmadik tag szorzata 36. Melyik ez a sorozat?

14.2.32. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 21. Ha a második tagot megszorozzuk az első és a harmadik összegével, akkor 80-at kapunk. Melyik ez a sorozat.

14.2.33. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 28. Ha a második tagot megszorozzuk az első és a harmadik összegével, akkor 160-at kapunk. Melyik ez a sorozat.

14.2.34. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjának összege $\frac{133}{6}$, második és negyedik tagjának összege 13. Melyik ez a sorozat?

14.2.35. Egy mértani sorozat első, harmadik és ötödik tagjának összege 63, második és negyedik tagjának összege 30. Melyik ez a sorozat?

14.2.36. Egy mértani sorozat harmadik és hetedik tagjának összege 68, hatodik és negyedik tagjának összege -40. Melyik ez a sorozat?

14.2.37. Egy vetélkedőben két csapat ugyanolyan pontszámmal indult, és minden fordulóban mindkét csapatra igaz volt, hogy ugyanannyiszorosára növekedett a pontszáma, de az „A” csapatnál ez a növekedés nagyobb mértékű volt. Így a második fordulóban az „A” csapatnak 16 ponttal volt több, mint a „B” csapatnak. A 3. fordulóban már 56, a 4. fordulóban már 148 volt a különbség. Hány ponttal végeztek a csapatok az 5. fordulóban?

14.2.38. Egy üzemben két brigád januárban ugyanannyi terméket készített, és minden hónapban mindkét brigádra igaz volt, hogy ugyanannyiszorosára növekedett a termelése, de a „Szorgalmasok” brigádnál ez a növekedés nagyobb mértékű volt. Így februárban nekik 20 darabbal volt több, mint a „Kitartóak” brigádnak. Márciusban már 70, a 4. fordulóban már 185 volt a különbség. Mekkora volt a brigádok termelése januárban?

14.2.39. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 448. A következő 3 tag összege 3584. Hány 10 jegyű tagja van a sorozatnak?

14.2.40. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 91. A hatodik, hetedik, nyolcadik tag összege 2912. Hány 13 jegyű tagja van a sorozatnak?

14.2.41. Egy mértani sorozat második tagja $\frac{1}{4}$, harmadik tagja $\frac{1}{512}$. Mutassuk meg, hogy akárhány tagot adunk össze az első tagtól kezdve az összeg nem haladhatja meg a 32.5-et!

14.2.42. Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{128}$, hányadosa 32. Mekkora n esetén teljesül $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n = 2048^{3n}$?

14.2.43. Egy mértani sorozat első tagja $\frac{1}{5}$, hányadosa $\frac{1}{25}$. Legfeljebb mekkora lehet n értéke, ha $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n \geq 25^{-100}$? Mutassuk meg, hogy akárhány tagot adunk össze az első tagtól kezdve az összeg nem érheti el az $\frac{5}{24}$ -et!

14.2.44. Egy verseny döntőjében 4 csapat vett részt. Az első helyezett pontszáma 2. helyezett pontszámának $\frac{5}{3}$ -szorosa. A másik 3 csapat pontszámai egy mértani sorozat három szomszédos tagja. A negyedik csapat 12 pontot ért el, míg a 4 csapat összesen 102 pontot. Hány pontot szerzett az első három csapat?

14.2.45. Egy utazási irodának négy busza van. A legnagyobb busz 54 férőhelyes. A három legnagyobb busz férőhelyei egy mértani sorozat 3 tagját alkotják. A legkisebb busz férőhelye a sorban az előtte lévő busz férőhelyeinek $\frac{3}{4}$ -ed része. Hány főek a buszok, ha a 4 buszon összesen 132 fő helyezhető el?

14.3. Kamatos kamat, hiteltörlesztés, járadékszámítás

14.3.1. Kiss Úr betett a bankba egymillió forintot, évi 5%-os kamatra. A kamatot minden év végén írják jóvá.

- a) Hány év kell, hogy a számlán legalább 700 000 forinttal több legyen, mint a nyitáskor?
- b) Mekkora kamat esetén duplázódna meg a pénze 10 év alatt?

14.3.2. Nagy Úr 5 évig minden hónapban az unokája számára félretett egy összeget. Az első hónapban 2000 Ft -ot tett le, majd minden hónapban 200 Ft -al többet mint az előző hónapban. Az öt év elteltével betette a pénzt egy számlára.

- a) Mennyi pénz lesz a számlán a betétel után 6 évvel, ha havi 0.5%-os kamatlábat adott a bank?
- b) Hány %-os éves kamat esetén lenne a betétel után újabb 5 év elteltével másfélszerannyi a számlán?
- c) 4%-os éves kamatláb esetén mennyi idő alatt duplázódna meg a számlán lévő pénz?

14.3.3. Kovács Úr 1 évig minden héten a gyereke számára félretett egy összeget. Az első héten 400 Ft -ot tett le, majd minden héten az előző héten félretett összegnek az 5%-al többet. Az év elteltével a meglévő összeget felkerekítette, hogy 5000-el osztható legyen, és betette a pénzt egy számlára.

- a) Mennyi pénz lesz a számlán a betétel után 5 évvel, ha évi 3%-os kamatlábat adott a bank?
- b) Hány %-os havi kamat esetén lenne a betétel után 3 év elteltével 40%-al több a számlán?
- c) 0.4%-os havi kamatláb esetén mennyi idő alatt duplázódna meg a számlán lévő pénz?

14.3.4. Az „A” cég évi termelése jelenleg a „B” cég termelésének 80%-a. Az „A” cég termelése évi 10%-al, a „B” cég termelése évi 6%-al nő. Változatlan mutatók mellett hány év alatt lesz a két cég termelése közel egyforma?

14.3.5. Az „A” cég jelenleg egy év alatt annyit hasznosít, mint a „B” cég 9 hónap alatt. Az „A” cég termelése évi 15%-al, a „B” cég termelése évi 10%-al nő. Változatlan mutatók mellett hány év alatt lesz a két cég termelése közel egyforma?

14.3.6. Egy hizlaldában az egyik évben azt tapasztalták, hogy a kocák számának $p\%$ -os csökkentése egy koca esetén a fiatal malacok számának $2p\%$ -os növelését vonja maga után, amennyiben a $p < 25\%$ teljesül. Évente 1000 sertés esetén 5000 süldő volt átlagosan.

- a) Mennyi malac született a kocák 5%-os csökkentése után?
- b) Mekkora a p értéke, ha a malacok összmennyisége 10%-al nő?

14.3.7. Egy tyúktelepen az egyik évben azt tapasztalták, hogy a tyúkok számának $t\%$ -os csökkentése az egy tyúkra eső tojások számának $1.5t\%$ -os növelését vonja maga után ($t < 20$). 20000 tyúk esetén négy millió tojás volt az össztermelés.

a) Mennyi tojás volt az össztermelés a tyúkok 6% -os csökkentése után?

b) Mekkora a t értéke, ha a tojások összmennyisége 2.5% -al nő?

14.3.8. Kovács Úr szeretné egy évre a pénzét (2 millió Ft) bankba tenni. Egyik ajánlat, hogy 3 havonta kap 2.5% kamatot. Nem bízik a forintárfolyamban, így kér egy olyan ajánlatot, amelyben a 285 Ft /CHF árfolyamon átváltott pénzét svájci frankban tenné a számlára. Ebben az esetben kéthavonta ajánlottak 0.5% -os kamatot.

a) Melyik ajánlattal jár jobban Kovács Úr?

b) Milyen árfolyamváltozásnak kell bekövetkeznie, hogy a másik ajánlat legyen a kedvezőbb?

14.3.9. Kiss Úr szeretné két évre a pénzét (3 millió Ft) bankba tenni. Egyik ajánlat, hogy félévente kap 3.2% kamatot. Nem bízik a forintárfolyamban, így kér egy olyan ajánlatot, amelyben a 320 Ft /EUR árfolyamon átváltott pénzét euróban tenné a számlára. Ebben az esetben kéthavonta ajánlottak 0.35% -os kamatot.

a) Melyik ajánlattal jár jobban Kovács Úr?

b) Milyen árfolyamváltozásnak kell bekövetkeznie, hogy a másik ajánlat legyen a kedvezőbb?

14.3.10. Egy bank a következő megtakarítási formát ajánlja ügyfeleinek. Ingyen nyithatnak számlát, ha legalább 500.000 Ft -ot elhelyeznek rajta, és minden hónap első napján legalább 15.000 Ft -ot fizetnek a számlára. Ebben az esetben minden hónap utolsó napján 0.5% -os kamatot írnak jóvá a számlán szereplő összeghez. Így 5 év elteltével lehet a számlán lévő összeghez hozzáférni.

a) Mennyit vehet fel 5 év elteltével az az ügyfél, aki január 1.-én nyit számlát 1M Ft -al, és a továbbiakban minden hónap első napján 20.000 Ft -ot fizet a számlára? (Tehát a következő befizetés február 1.-én)

b) Mennyi idő elteltével lenne a számlán 3M Ft ?

14.3.11. Egy bank a következő megtakarítási formát ajánlja ügyfeleinek. Ingyen nyithatnak számlát, ha nyitáskor legalább 300.000 Ft -ot elhelyeznek rajta, és minden további hónapban a hónap első napján legalább 10.000 Ft -ot fizetnek a számlára. Ebben az esetben minden hónap utolsó napján 0.3% -os kamatot írnak jóvá a számlán szereplő összeghez. Így 2 év elteltével lehet a számlán lévő összeghez hozzáférni.

- a) Mennyit vehet fel 2 év elteltével az az ügyfél, aki január 1.-én nyit számlát és a minimum feltételeket teljesíti?
- b) Mennyit kellene havonta fizetnie a hónap első napján, hogy 3 év elteltével legalább 2M Ft legyen a számlán?

14.3.12. Kovács Úr a következő hosszú távú befektetési formát választott egy banknál. 500.000 Ft -ot fizetett be január elsején, és a következő hónaptól kezdve minden hónap első napján 20.000 Ft -ot fizetett be a számlára. A bank minden év december 31.-én 8%-os kamatot ír jóvá a számlán szereplő összeghez. Így 10 év elteltével lehet a számlán lévő összeghez hozzáférni.

- a) Mennyit vehet fel 10 év elteltével Kovács Úr?
- b) Mekkora összeggel kellett volna nyitni a számlát, hogy 10 év elteltével 6M Ft számlán?

14.3.13. Egy dohányos naponta 1.000 Ft -ot költ cigarettára. Arra gondol, hogy ezt a pénzt inkább félreteszi, és mivel tudni szeretné, hogy pontosan mennyit takarít meg, egy új számlát nyit, és minden év január első munkanapján beteszi a számlájára a az abban az évben félretett összeget. A bank minden év végén 5% kamatot ír jóvá a számlán szereplő összeghez. Mindent meg tud valósítani az elképzelései közül, egy évig nem dohányzik, a félretett összeget beteszi a megnyitott számlára. Elhatározását tartani a tudja a továbbiakban is. Mennyi pénzt is takarított meg az első betétel utáni 15 év alatt, ha nem számolunk a cigaretta árának drágulásával, tehát minden évben változatlan összeget tesz be a bankba? (Az egyszerűség kedvéért szökőévvvel sem kell számolni, ezek miatt fellépő többletösszeg ugyanis elhanyagolható.)

14.3.14. Egy dohányos naponta 1.200 Ft -ot költ cigarettára. Arra gondol, hogy ezt a pénzt inkább félreteszi, és mivel tudni szeretné, hogy pontosan mennyit takarít meg, egy új számlát nyit, és minden év január első munkanapján beteszi a számlájára a az abban az évben félretett összeget. A bank minden év végén 6% kamatot ír jóvá a számlán szereplő összeghez. Mindent meg tud valósítani az elképzelései közül, egy évig nem dohányzik, a félretett összeget beteszi a megnyitott számlára. Elhatározását tartani a tudja a továbbiakban is. Hány évig tartson az elhatározása, hogy 20 M Ft legyen a számlán?

14.3.15. Egy szerencsés ember 10 M Ft -ot örököl. Úgy dönt, hogy egy számlára helyezi a pénzt. Minden hónap első napján felvesz egy bizonyos összeget. Az örökség számlára való kerülését követő hónap első napján lesz az első kivétel. A bank minden hónap utolsó napján 0.4% kamatot ír jóvá a számlán szereplő összeghez. Így 8 évig elég a pénz, tehát 96 pénzfelvétel történik. Mekkora összeget tud felvenni havonta?

14.3.16. Kiss Úr lottóhúzásnál 5 M Ft -ot nyer. Úgy dönt, hogy egy számlára helyezi a pénzt. Minden hónap első napján felvesz egy bizonyos összeget. Az nyeremény számlára való kerülését követő hónap első napján lesz az első kivétel. A bank minden hónap utolsó napján

0.35% kamatot ír jóvá a számlán szereplő összeghez. Így 10 évig elég a pénz, tehát 120 pénzfelvétel történik. Mekkora összeget tud felvenni havonta?

14.3.17. Egy tippmix játékos egy alkalommal 1 MFt-ot nyer. Úgy dönt, hogy egy számlára helyezi a pénzt, majd minden hónap első napján felvesz 20.000 Ft-ot. Az nyeremény számlára való kerülését követő hónap első napján lesz az első kivétel. A bank minden hónap utolsó napján 0.3% kamatot ír jóvá a számlán szereplő összeghez. Természetesen egy idő után kiürül a számla, mennyi ideig tart ez?

14.3.18. Kovács Úr 3 MFt hitelt vett fel egy banktól 5 évre. Minden hónap első napján fizeti a törlesztőrészt. A bank minden hónap utolsó napján 0.5% kamatot számol a fentálló tartozásra. Mekkora a törlesztőrészlet?

14.3.19. A Nagy család lakásvásárláshoz 8 MFt hitelt vett fel egy banktól 15 évre. Minden hónap első napján fizeti a törlesztőrészt. A bank minden hónap utolsó napján 0.6% kamatot számol a fentálló tartozásra. Mekkora a törlesztőrészlet?

14.3.20. A Kiss család lakásvásárláshoz 12 MFt hitelt vett fel egy banktól. Minden hónap első napján fizetik a törlesztőrészt. A bank minden hónap utolsó napján 0.5% kamatot számol a fentálló tartozásra. Mennyi időre kell felvenniük a hitelt, ha legfeljebb havi 75.000 Ft törlesztőrészt tudnak vállalni?

14.4. Vegyes feladatok

14.4.1. Egy számtani és egy mértani sorozat első tagja egyaránt 5. A mértani sorozat harmadik és ötödik tagja rendre megegyezik a számtani sorozat negyedik és tizenhatodik tagjával. Melyek ezek a sorozatok?

14.4.2. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 48. Az első tag változatlanul hagyása mellett a második tagot kettővel, a harmadik tagot 7-el növelve egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Mekkora a mértani sorozat hányadosa?

14.4.3. Egy növekvő számtani sorozat első három tagjának az összege 60. Az első tagot 64-el növelve, a másik két változatlanul hagyása mellett egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Mi a két sorozat első három tagja?

14.4.4. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 24. Ha az első taghoz 1-et, a másodikhoz 2-t, a harmadikhoz 35-öt adunk egy mértani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozatot!

14.4.5. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 30. Ha a harmadikhoz 5-öt adunk egy mértani sorozat első három szomszédos tagját kapjuk. Hány tagot kell összeadni a mértani sorozatban az elsőtől kezdve, hogy az összeg legalább 10.000 legyen?

14.4.6. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 21. Ha ezekhez rendre hármat, egyet és hármat adunk, akkor egy mértani sorozat első három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg ennek a hányadosát!

14.4.7. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 21. Ha ezekhez rendre hatot, tizenhármat és harmincat adunk, akkor egy mértani sorozat első három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozatot!

14.4.8. Egy számtani sorozat második tagja 7. Első, harmadik és nyolcadik tagja pedig egy mértani sorozat szomszédos tagja. Mekkora a mértani sorozat hányadosa?

14.4.9. Egy számtani sorozat első négy tagjához rendre 5-öt, 6-ot, 9-et és 15-öt adva egy mértani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Melyik ez a két sorozat?

14.4.10. Egy számtani sorozat első öt tagjának az összege 25. Az első, a második és az ötödik tag egy mértani sorozat első három tagja. Mekkora az első tag, a számtani differenciája és a mértani sorozat hányadosa?

14.4.11. Egy számtani sorozat első öt tagjának az összege 20. A második, harmadik és az ötödik tag egy mértani sorozat első három tagja. Mekkora a számtani differenciája és a mértani sorozat hányadosa?

14.4.12. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 112. Ha az első két tag változatlanul hagyása mellett, a harmadikat tizenhattal csökkentjük, egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozatot!

14.4.13. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 26. Ha az első taghoz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 8-at adunk, egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a számtani sorozatot!

14.4.14. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 52. Ha az első taghoz 2-öt, a másodikhoz 10-et, a harmadikhoz 2-öt adunk, egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!

14.4.15. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 114. Ha a harmadik számot 72-vel csökkentjük egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!

14.4.16. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 63. Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadik számot 30-al csökkentjük egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!

14.4.17. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 26. Ha az első taghoz 1-et adunk, a harmadik számhoz pedig 3-at, akkor egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozatot!

14.4.18. Egy mértani sorozat első három tagjának a szorzata 216. Ha a harmadik tagot hárommal csökkentjük, akkor egy számtani sorozat első három tagját kapjuk. Melyik ez a mértani sorozat?

14.4.19. Három szám, melyek összege 15, egy számtani sorozat első három tagja, négyzeteik rendre pedig egy mértani sorozat első három tagja. Melyik ez a 3 szám?

14.4.20. Négy szám egy mértani sorozat első négy tagja. Ha az első változatlanul hagyása mellett a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a negyedikből pedig 36-ot levonunk, akkor egy számtani sorozat szomszédos tagjait kapjuk. Melyik ez a négy szám?

14.4.21. Öt szám közül az első három egy mértani, az utolsó négy pedig számtani sorozat tagjai, ez utóbbiak összege 20. A második és ötödik szám szorzata 16. Melyik ez az öt szám?

14.4.22. Négy szám közül az első és az utolsó összege 14, a második és harmadik összege 12, az első három szám egy mértani, az utolsó három szám egy számtani sorozat tagjai. Melyek ezek a számok?

14.4.23. Határozzuk meg azt a négy számot, amelyre igaz, hogy az első három szám egy számtani, az utolsó három szám egy mértani sorozat tagjai, illetve a harmadik szám 12-vel nagyobb, mint az első, és a negyedik szám a második háromszorosától 6-al nagyobb!

14.4.24. Az a , b , c pozitív számok egy mértani sorozat első három tagját adják. Ha az első két tag változatlanul hagyása mellett a harmadik tagot $a + 2b$ -vel csökkentjük, akkor egy számtani sorozat három szomszédos tagját kapjuk. Az a , $b + 9$, c számok szintén egy számtani sorozat szomszédos tagjai. Melyek ezek a számok?

14.4.25. Egy számtani és egy mértani sorozat első tagja 1, és hatodik tagja -1. Mekkora pozitív n esetén lesz az első n tag összege mindkét sorozatban ugyanakkora?

14.4.26. Az $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ egész tagú mértani sorozatok.

(1) Az a_1 , b_1 , c_1 egy mértani sorozat szomszédos tagjai, melynek kvóciense 2.

(2) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ sorozatok hányadosai olyan számtani sorozatot alkotnak, melynek differenciája 1.

(3) $a_2 + b_2 + c_2 = 24.$

(4) $c_1 + c_2 + c_3 = 84.$

Határozzuk meg az a_1 , b_1 , c_1 -et!

15. Kombinatorika

15.1. Permutációk, variációk

15.1.1. Egy csoport létszáma 12, 50%-ban fiú. Hányféleképpen sorakoztathatjuk úgy fel az osztályt, hogy:

- a) egymás mellett helyezkedjenek el a tanulók, és a lányok között sem teszünk különbséget, és a fiúk között sem.
- b) kettes oszlopban sorakoztatjuk úgy, hogy fiúk csak lányok mellett állhatnak
- c) egymás mellé sorakoztatjuk úgy, hogy fiúk és lányok felváltva követik egymást?

15.1.2. Hány nyolcjegyű szám képezhető a 0,2,2,2,3,3,4,4 számjegyekből, ha a szám

- a) páros
- b) páratlan

15.1.3. Hány 5-tel osztható tíz jegyű szám képezhető a 0,1,1,1,1,2,3,3,3,5 számjegyekből?

15.1.4. Hány darab hatjegyű szám képezhető a 0,1,2,3,4,5 számjegyek egyszeri felhasználásával, amely:

- a) 5-el osztható?
- b) 4-el osztható?

15.1.5. Hány darab ötjegyű szám képezhető a 0,1,2,3,4,5 számjegyek felhasználásával, amely:

- a) 5-el osztható?
- b) 4-el osztható?

15.1.6. Hány darab 3-mal osztható hatjegyű szám képezhető a 1,2,3,4,5 számjegyekből, amelyben minden számjegy legalább egyszer szerepel?

15.1.7. Hány darab 6-al osztható hétjegyű szám képezhető a 0,1,2,3,4,5 számjegyekből, amelyben minden számjegy legalább egyszer szerepel?

15.1.8. Hány olyan szám létezik, amelyben minden számjegy annyiszor szerepel, amennyi az értéke, ha

- a) a szám hatjegyű
- b) a szám hétjegyű

15.1.9. Egy nő és egy férfi 5 gyereket szeretne. Felírtak 5 fiú (András, Béla, Csaba, Dániel, Endre) és 5 lány (Ágnes, Bea, Csilla, Dóra, Éva) nevet. Születésükkor ezek közül adtak nevet a kicsiknek. Hányféleképpen hangozhat el az öt név, ha a születésük sorrendjében mondják ki egymás után?

15.1.10. Egy nő és egy férfi 4 gyereket szeretne. Felírtak 4 fiú (András, Béla, Csaba, Dániel) és 3 lány (Ágnes, Bea, Csilla) nevet. Születésükkor ezek közül adtak nevet a kicsiknek. Hányféleképpen hangozhat el a négy név, ha a születésük sorrendjében mondják ki egymás után?

15.1.11. Három szabályos különböző színű dobókockát feldobva hányféleképpen fordulhat elő, hogy a dobott számok

- a) összege legalább 6?
- b) összege legfeljebb 16?
- c) szorzata legfeljebb 150?
- d) szorzata legalább 8?

15.1.12. Melyek azok az n és k nemnegatív egész számok, melyekre n elem k -tagú ismétlés nélküli variációinak a száma megegyezik az ismétléses variációk számával?

15.1.13. Mennyi az ötjegyű csupa páratlan számjegyből álló számok összege, ha

- a) a számjegyek nem ismétlődhetnek
- b) a számjegyek ismétlődhetnek

15.1.14. Mennyi az ötjegyű csupa páros számjegyből álló számok összege, ha

- a) a számjegyek nem ismétlődhetnek
- b) a számjegyek ismétlődhetnek

15.1.15. Mennyi a négyjegyű számok összege, ha

- a) a számjegyek nem ismétlődhetnek
- b) a számjegyek ismétlődhetnek

15.1.16. Hány féleképpen olvashatjuk ki a KOMBINATORIKA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra és lefelé lehet haladni?

K	O	M	B	I	N	A	T
O	M	B	I	N	A	T	O
M	B	I	N	A	T	O	R
B	I	N	A	T	O	R	I
I	N	A	T	O	R	I	K
N	A	T	O	R	I	K	A

15.1.17. Hány féleképpen olvashatjuk ki a PERMUTÁCIÓ szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra és lefelé lehet haladni?

P	E	R	M	U	T	Á
E	R	M	U	T	Á	C
R	M	U		Á	C	I
M	U	T	Á	C	I	Ó

15.1.18. Hány féleképpen olvashatjuk ki az ábrán a KOMBINATORIKA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra és lefelé lehet haladni?

K	O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A
O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A	
M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A		
B	I	N	A	T	O	R	I	K	A			
I	N	A	T	O	R	I	K	A				
N	A	T	O	R	I	K	A					
A	T	O	R	I	K	A						
T	O	R	I	K	A							
O	R	I	K	A								
R	I	K	A									
I	K	A										
K	A											
A												

15.1.19. Hány féleképpen olvashatjuk ki az ábrán a KOMBINATORIKA szót, ha a bal felső sarokból indulva csak jobbra és lefelé lehet haladni?

K	O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A
O	M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A	
M	B	I	N	A	T	O	R	I	K	A		
B	I	N	A	T	O	R	I	K	A			
I	N		T	O	R	I	K	A				
N	A	T	O	R	I	K	A					
A	T	O	R	I	K	A						
T	O	R	I	K	A							
O	R	I	K	A								
R	I	K	A									
I	K	A										
K	A											
A												

15.1.20. A $20!$ hány 0-ra végződik?

15.1.21. Adott n különböző elem. Mekkora az n értéke, ha az egymástól különböző elemek számát

- kettővel növelve a permutációk száma 156-szorosára nő?
- hárommal növelve a permutációk száma 1320-szorosára nő?
- néggyel növelve a permutációk száma 1680-szorosára nő?

15.1.22. Sorba rendezzük az 1,2,3,4,5,6,7,8 számokat. Hány olyan számot kapunk, melyben a

- 2,3,4 számok valamilyen sorrendben egymás mellé kerülnek
- 2,3,4 számok növekvő sorrendben egymás mellé kerülnek

c) 2,3,4 számok egymáshoz képest növekvő sorrendben (nem feltétlenül egymás mellé) helyezkednek

15.1.23. Sorba rendezzük a $0, 1, 2, 3, \dots, n$ számokat. Hány olyan számot kapunk, melyben a

a) $0, 1, 2, \dots, k$ ($k \leq n$) számok valamilyen sorrendben egymás mellé kerülnek

b) $0, 1, 2, \dots, k$ ($k \leq n$) számok növekvő sorrendben egymás mellé kerülnek

c) $0, 1, 2, \dots, k$ ($k \leq n$) számok egymáshoz képest növekvő sorrendben (nem feltétlenül egymás mellé) helyezkednek

15.1.24. Az $3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 7$ számjegyek felhasználásával hány nyolcjegyű számot lehet készíteni, amelyben a

a) 3-es számjegyek egymás mellett vannak?

b) 6, 7 -es számok nem egymás mellett vannak?

15.1.25. Az $1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5$ számjegyek felhasználásával hány tízjegyű számot lehet készíteni, amelyben az

a) 1-es számjegyek egymás mellett vannak?

b) 3, 4, 5 -ös számok nem egymás mellett vannak?

15.1.26. Adott n elem másodosztályú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak a száma úgy aránylik egymáshoz, mint 10:11-hez. Mekkora az n ?

15.1.27. Adott n elem másodosztályú ismétlés nélküli és ismétléses variációinak a száma úgy aránylik egymáshoz, mint 15:16-hoz. Mekkora az n ?

15.2. Kombinációk

15.2.1. Hány főt kell 12 főből kiválasztani, hogy a kiválasztást

a) 66

b) 220 féleképpen tudjuk végrehajtani?

15.2.2. Hány főt kell 10 főből kiválasztani, hogy a kiválasztást

a) 45

b) 120 féleképpen tudjuk végrehajtani?

15.2.3. Hány főből kell kiválasztani 6 embert, hogy a kiválasztást

a) 28

b) 210 féleképpen tudjuk végrehajtani?

15.2.4. Hány főből kell kiválasztani 5 embert, hogy a kiválasztást

a) 56

b) 21 féleképpen tudjuk végrehajtani?

15.2.5. Egy urnában 6 fekete és 8 fehér golyó van. Egymás után kihúzunk 4-et úgy, hogy kihúzás után a golyókat visszatesszük. Hányféleképpen történhet ez, ha tudjuk, hogy több fekete lesz a kihúzottak között, mint fehér?

15.2.6. Egy urnában 7 fekete és 10 fehér golyó van. Egymás után kihúzunk 5-öt úgy, hogy kihúzás után a golyókat nem tesszük vissza. Hányféleképpen történhet ez, ha tudjuk, hogy több fehér lesz a kihúzottak között, mint fekete?

15.2.7. Egy bajnokságban összesen 900 pontot osztottak ki. A győzelem 3, a döntetlen 1, a vereség 0 pontot ért. Tudjuk, hogy éppen annyi döntetlen született, mint a hány csapat van. Hány csapat vett részt, ha mindenki játszott mindenkivel oda-vissza?

15.2.8. Hányféleképpen lehet 6 egyforma krémet 3 gyerek között elosztani, ha a sütit elvágni nem lehet?

15.2.9. Hányféleképpen lehet 8 egyforma csokit 4 diák között elosztani, ha minden diáknak jut, és a csokikat feldarabolni nem lehet?

15.2.10. Hányféleképpen alakítható ki 14 felnőttből és 8 gyerekből két foci csapat (1 csapat – 11 fő), hogy mindkét csapatban legyen legalább egy gyerek?

15.2.11. Hányféleképpen alakítható ki 10 felnőttből és 4 gyerekből két hétfős kézilabda csapat, hogy mindkét csapatban legyen legalább egy gyerek?

15.2.12. 20 golyó közül 6 fehér. Kiválasztunk 5 golyót, hány fehér van ezek között, ha ezen lehetőségek száma 5460?

15.2.13. A 32 lapos magyar kártyából kiválasztunk 4 lapot. Hány makk van ezek között, ha ezen lehetőségek száma 1344?

15.2.14. Egy 12 tagú Egyesületi Vezetőség 3 tagú elnökséget választ. Hányféleképpen tehetik, ha Márti vagy Fruzi szerepel az elnökségben?

15.2.15. Hányféleképpen lehet 2 piros, 4 fekete és 5 sárga golyót egymás mellé elhelyezni úgy, hogy piros golyó ne kerüljön fekete mellé?

15.2.16. Hányféleképpen lehet 2 oroszlánt, 5 tigrist és 6 pumát kivezetni a kifutón, ha oroszlán és tigris nem következhet egymás után?

15.2.17. András, Béla, Csaba és Dani kezében egy kék és egy piros zászló van. A gyerekek közül bárki felemelheti bármelyik zászlót. Hány olyan eset van, amelyben:

a) pontosan 3 gyerek emeli fel a zászlóját?

b) legfeljebb egy gyerek emeli fel valamelyik zászlóját?

c) legalább egy gyerek felemeli valamelyik zászlóját?

15.2.18. A 32 lapos magyar kártyából húzunk 6 lapot.

a) Hányféleképpen történhet ez, ha legalább 1 piros van a kihúzottak között?

b) pontosan 2 piros és 2 felső van a kihúzottak között?

c) pontosan 3 zöld és 2 király van a kihúzottak között?

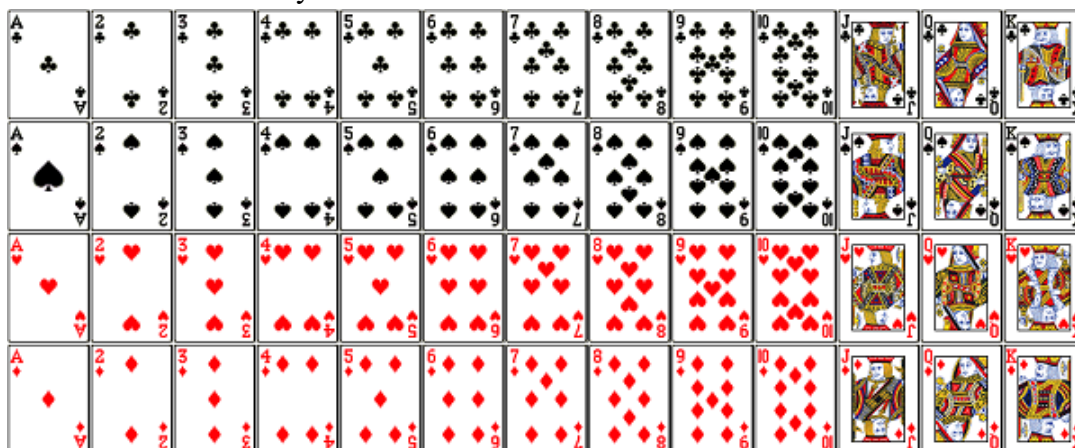


15.2.19. Az 52 lapos francia kártyából húzunk 8 lapot.

a) Hányféleképpen történhet ez, ha legalább 7 treff van a kihúzottak között?

b) pontosan 3 káró és 3 ász van a kihúzottak között?

c) pontosan 4 kőr és 3 király van a kihúzottak között?



15.2.20. Az 52 lapos francia kártyából leosztunk egy játékosnak 5 lapot. Hányféleképpen lehet a kezében

a) póker (4 egyforma figura)?

b) full (3+2 egyforma figura)?

c) színsor (5 egymást követő figura ugyanazon színből, pl: kőr 8,9,10, J,Q)?

d) 2 pár?

15.3. Binomiális-tétel, Pascal-háromszög

15.3.1. A Pascal – háromszög alapján határozzuk meg, hogy milyen p paraméter esetén van maximuma a következő kifejezésnek?

- a) $\binom{14}{p}$
- b) $\binom{23}{p}$

15.3.2. Adjuk meg a Pascal háromszög 7., 8., és 9. sorát!

15.3.3. Fejtsük ki a következő hatványokat:

- a) $(5x+6y)^4$
- b) $(3x-4y)^5$

15.3.4. Fejtsük ki a következő hatványokat, és végezzük el a lehetséges összevonásokat!

- a) $(4x^2+2x)^6$
- b) $(3x^3-6x^2)^5$

15.3.5. Fejtsük ki a következő hatványokat, és végezzük el a lehetséges összevonásokat!

- a) $(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})^7$
- b) $(\sqrt{x} - \sqrt{x^3})^4$

15.3.6. Igazoljuk, hogy: $\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \binom{n}{m}$

15.3.7. Igazoljuk, hogy: $\sum_{i=1}^n i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$, ahol $n \geq 1$

15.4. Skatulya-elv

15.4.1. Egy tízfős csoport tagjai közül néhányan a találkozásukkor kézfogással üdvözlik egymást. Igaz-e az az állítás, hogy biztosan van közöttük legalább két ember, akinek ugyanannyi kézfogása volt? Válaszát indokolja!

15.4.2. Egy tizenhat fős csoport tagjai közül néhányan ismerik egymást. Igaz-e az az állítás, hogy biztosan van közöttük legalább két ember, aki ugyanannyi csoporttársat ismer? Válaszát indokolja!

15.4.3. Egy dobozban piros, kék és zöld golyók vannak, összesen 12. Ha piros golyók kétszereséhez hozzáadjuk a zöld golyók számát, akkor 11-et kapunk. Ha a kék golyók

háromszorosából kivonjuk a zöld golyók kétszeresét, akkor kettőt kapunk. Hány golyót kell legalább kivenni a dobozból, hogy biztosan legyen közöttük:

- a) legalább 2 piros
- b) legalább két különböző színű
- c) legalább két egyforma színű
- d) mindhárom színből

15.4.4. Egy fiókban fehér, fekete és szürke zoknik vannak, összesen 17 pár. Mindegyik párból megvan a jobbos is, és balos is. Ha fehér zoknik számának kétszereséhez hozzáadjuk a szürkék háromszorosát, akkor 52-öt kapunk. Ha a fehér zoknik háromszorosából kivonjuk a feketék darabszámát, akkor 10-et kapunk. Hány darab zoknit kell legalább kivenni a dobozból, hogy biztosan legyen közöttük:

- a) legalább 3 fehér
- b) legalább 2 különböző színű
- c) legalább 4 egyforma színű
- d) mindhárom színből

15.4.5. Legalább hány ember lakik azon a településen, ahol a lakók megkérdezése nélkül is biztosan tudjuk, hogy legalább 8 olyan fő van, akinek az év ugyanazon napjára esik a születésnapja? (Szökőév is lehetséges!)

15.4.6. Egy városban az éttermek kétszeresének és a cukrászdák háromszorosának a száma összesen 45. Az éttermek és a cukrászdák számának négyzetösszege 193. Hány fős az a csoport, amelyben biztosan van legalább

- a) két olyan ember aki ugyanazt az éttermet látogatja rendszeresen (mindenki csak 1 éttermet látogathat rendszeresen)?
- b) 5 olyan ember, aki ugyanazt a cukrászdát látogatja rendszeresen (mindenki csak 1 cukrászdát látogathat rendszeresen)?

15.5. Gráfok

15.5.1. Egy 6 fős társaság tagjai megérkezéskor kézfogással üdvözlik egymást. Eddig András 5, Béla 4, Csaba 4, Dani 3, Endre és Feri 2-2 emberrel fogott kezét.

- a) Rajzold meg egy lehetséges megvalósulását ezeknek a kézfogásoknak!
- b) Hány kézfogás van még hátra?
- c) Hány %-a valósult meg a lehetséges kézfogásoknak?
- d) Lehetséges-e, hogy Béla Csabával nem fogott eddig kezét? Ha igen, akkor rajzold le, ha nem, indokold részletesen!
- e) Lehetséges-e, hogy Endre és Feri egymással fogtak kezét? Ha igen, akkor rajzold le, ha nem, indokold részletesen!

15.5.2. Egy ünnepségen a résztvevőket 3 asztalhoz ültették le. Minden asztalnál a vendégek kezét fogtak egymással megérkezésükkor. A második asztalnál 2-vel több, mint az első, de hárommal kevesebb vendég ült, mint harmadik asztalnál. Hány vendég volt az ünnepségen, ha összesen 76 kézfogás történt?

15.5.3. Egy teljes gráfból 45 élt elhagyva egy fagráfot kapunk. Hány csúcsa van a teljes gráfnak?

15.5.4. Egy teljes gráfból 561 élt elhagyva egy fagráfot kapunk. Hány csúcsa van a teljes gráfnak?

15.5.5. Tulajdonságok: „A”: a gráf egyszerű. „B”: a gráf összefüggő. „C”: a gráf tartalmaz kört. Rajzold példát minden lehetséges megvalósításra a tulajdonságokkal kapcsolatban! (Például: Összefüggő és tartalmaz kört, de nem egyszerű)

15.5.6. Hány olyan 4 csúcsú, 3 élű gráf van, amelynek vannak többszörös élei?

15.5.7. Hány olyan 5 csúcsú, 4 élű gráf van, amelynek vannak többszörös élei?

15.5.8. Adott egy 7 csúcsú egyszerű gráf, amelynek 15 éle van összesen. Igazold, hogy van olyan csúcs, melynek a fokszáma legalább 5!

15.5.9. Adott egy 10 csúcsú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van összesen. Igazold, hogy van olyan csúcs, melynek a fokszáma legalább 3!

15.5.10. Egy kilencpontú fa gráfban 8 csúcs fokszámai: 1,1,1,1,2,3,3,3. Határozd meg a kilencedik csúcs fokszámát!

15.5.11. Egy tizenhárom pontú fa gráfban 11 csúcs fokszámai: 1,1,1,1,1,2,2,3,3,3,3. Határozd meg a maradék két csúcs fokszámát!

15.5.12. Van-e olyan 9 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma különböző?

15.5.13. Van-e olyan 12 csúcsú egyszerű gráf, melyben minden csúcs fokszáma különböző?

15.5.14. Egy ünnepségre 10 oktató és 11 hallgató érkezett. Minden hallgató más számú oktatót, viszont minden oktató ugyanannyi számú diákot ismer (az ismertségek kölcsönösek). Lehetséges-e, hogy minden oktató 5 hallgatót ismer?

15.6. Vegyes feladatok

15.6.1. Egy színházi előadásra két (egy fekete és egy fehér) ajtón érkezhetsz be a 4 férfi és 5 női szereplő. Hányféleképpen jöhet be a 9 szereplő, ha az alábbi feltételek (a-d) mindegyikének teljesülnie kell!

- a) Mindkét ajtón be kell jönni férfi és női szereplőnek!
- b) Egyik ajtón keresztül sem érkezhetsz több férfi szereplő!
- c) A fehér ajtón keresztül több színész kell, hogy érkezzen!
- d) Négytől kevesebb színész egyik ajtón keresztül sem jöhet!

15.6.2. Egy cirkuszi mutatványnál az állatidomár 8 oroszlánt és 4 tigrist vezet ki a porondra. Hányféleképpen teheti ezt meg,

- a) ha 2 tigris nem következhet egymás után?
- b) ha tigris két oroszlán között lesz?

15.6.3. Egy ünnepségen az első sorba 4 felnőtt és 7 diák ül. Hány féleképpen alakulhat az ülésrend, ha

- a) a felnőttek nem ülnek egymás mellett?
- b) minden felnőtt 2 diák között szeretne ülni?

15.6.4. Hány olyan 4 jegyű szám van, melyben a számjegyek összege páratlan?

15.6.5. Hány olyan 5 jegyű szám van, melyben a számjegyek összege páros és a számjegyek különbözőek?

15.6.6. Zoli elfelejtette 7 jegyű biztonsági kódját. Arra emlékszik, hogy, volt benne pontosan 2db 4-es, de nem volt benne 0, valamint 57-el kezdődött. Hány lehetőséget kell Zolinak végig próbálnia, hogy biztosan ki tudja nyitni a széfjét?

15.6.7. A Real Madrid játékosai egy meccsen 18 szabadrúgást rúgtak. A kapus és a két középső hátvéd, valamint a cserék nem végeztek el szabadrúgást. A riporter felírta a jegyzetébe a szabadrúgást végrehajtók neveit. Hányféleképpen tehette ezt meg, ha

- a) Egymás után sorba írta fel a neveket?
- b) Csak egy statisztikai összesítést készített sorrendre való tekintet nélkül?

15.6.8. Egy sakkversenyen az egyik versenyzőnek az első 7 forduló után 5 pontja van. Hányféleképpen szerezhette ezt meg (győzelem 1, döntetlen 0.5, vereség 0 pont)?

15.6.9. Egy bajnokságban az egyik csapatnak az első 8 forduló után 12 pontja van. Hányféleképpen szerezhette ezt meg (győzelem 3, döntetlen 1, vereség 0 pont)?

15.6.10. Három zöld és három kék pólós gyerek hányféleképpen alkothat egy hatszemélyes kört, ha csak pólóik színe alapján különböztethetjük meg őket?

15.6.11. Hat zöld és hat kék pólós gyerek hányféleképpen alkothat egy hat fős kört, ha csak pólóik színe alapján különböztethetjük meg őket?

15.6.12. A piros, zöld, kék és barna színek felhasználásával hányféleképpen lehet egy szabályos ötoldalú gúlát kiszínezni, ha 1 vagy két színt használunk fel?

15.6.13. Egy futóversenyen 8 induló szerepel. Tudjuk az első 3 sorrendjét. Ha egy fogadó elkészíti az összes lehetséges tippszelvényét a dobogósokra vonatkozóan, akkor hány olyan szelvény van, amely legalább egytalálatos? (Holtverseny nem lehetséges!)

15.6.14. Hat résztvevőből hányféleképpen lehet összeállítani egy páros asztalitenisz mérkőzést, ha a térfeleket sem, illetve azok jobb és baloldalát sem különböztetjük meg?

15.6.15. Nyolc résztvevőből hányféleképpen lehet összeállítani egy páros tenisz játszmát, ha a térfeleket megkülönböztetjük, de azok jobb és baloldalát már nem?

15.6.16. Egy szabályos 6 oldalú dobókocka egy oldalára egyest, két oldalára kettest, három oldalára hármast írunk. A dobókockát egymás után négyszer feldobjuk, és a kapott számokat feljegyezzük.

a) Hányféleképpen végződhet a dobássorozat?

b) Hány esetben lesz a dobott számok összege 6?

15.6.17. Egy szabályos 8 oldalú dobókocka 2-2 oldalára 0-t, 2-t, 4-t, 6-t írunk. A dobókockát egymás után négyszer feldobjuk, és a kapott számokat feljegyezzük.

a) Hányféleképpen végződhet a dobássorozat?

b) Hány esetben lesz a dobott számok összege 12?

15.6.18. Egy matematika dolgozat maximális pontszáma 50 pont. A 12 fős csoportban mindenki elért legalább 30 pontot, a dolgozatok átlaga 38 pont lett. Négyen írtak maximális pontszámot, 3-3 tanuló írt 30, illetve 32 pontos dolgozatot. Hányféleképpen valósulhatott ez meg?

15.6.19. Egy kalapban 3 piros, két kék, és egy zöld golyó van.

a) Hányféleképpen húzhatjuk ki őket, ha nem tesszük vissza a húzás után, és az egyforma színű golyókat nem különböztetjük meg?

b) Hány féleképpen húzhatunk háromszor, ha az egyforma színű golyókat nem különböztetjük meg, és visszatesszük őket a húzás után?

15.6.20. Hét fiatal, 3 lány és négy fiú munkát szeretnének vállalni. Két szerszámboltba csak fiúkat keresnek, 3 bölcsődébe csak lányokat, és négy áruházba fiúkat és lányokat is keresnek, és sehol nincs létszámkorlátozás.

- a) Hányféleképpen helyezkedhet el a hét fiatal?
- b) Hányféleképpen helyezkedhet el a hét fiatal, ha a 3 lány és a 4 fiú közül egyaránt 2-2 fő mindenképpen ugyanazon a munkahelyen (de nem feltétlenül külön a többitől) szeretne dolgozni?

15.6.21.

- a) Az 1,2,3,4,5,6,7 számokat rendezd 3 csoportba úgy, hogy egy csoportban ne szerepeljenek olyan számok, melyek közül a kisebb osztója valamelyik nagyobbak!
- b) A megadott számok közül az első hatból képezz 2 db számhármast. Hány ilyen számhármast pár létezik?

15.6.22.

- a) Az 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 számokat rendezd 4 csoportba úgy, hogy egy csoportban ne szerepeljenek olyan számok, melyek közül a kisebb osztója valamelyik nagyobbak!
- b) A megadott számok közül az első nyolcból képezz 2 db számnégyest. Hány ilyen számnégyes pár létezik?

15.6.23. Adott két egyenes. Az egyiket kijelölünk 5, a másikon 6 különböző pontot. Hány háromszög, négyszög, ötszög képezhető ezek közül, ha

- a) a két egyenes párhuzamos?
- b) a két egyenes nem párhuzamos?

15.6.24. Adott egy szabálytalan, négyszög alapú gúla. (Minden lapja különböző), és három szín: piros, kék, és zöld. Hányféleképpen lehet a gúlát ezekkel a színekkel kiszínezni, ha a színek között ott van a

- a) piros, vagy kék
- b) piros és kék

15.6.25. Adott egy szabálytalan, háromszög alapú gúla. (Minden lapja különböző), és hat szín: piros, kék, zöld, barna, sárga, lila. Hányféleképpen lehet a gúlát ezekkel a színekkel kiszínezni, ha minden szín csak egyszer használható fel, és a színek között ott van a

- a) piros, vagy kék
- b) piros és kék

16. Valószínűesszámítás

16.1. Klasszikus modell

16.1.1. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege 8?

16.1.2. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege legfeljebb 5?

16.1.3. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege legfeljebb 10?

16.1.4. Dobjunk fel három kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege legalább 17?

16.1.5. Dobjunk fel három kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok összege legalább 6?

16.1.6. Egy kockával addig dobunk, míg a dobott szám nem 6-os. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy:

- a) 3-szor dobtunk
- b) legalább 3-szor dobunk
- c) legfeljebb 3-szor dobunk

16.1.7. Egy kockával addig dobunk, míg a dobott szám nem 6-os. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy:

- a) 5-ször dobtunk
- b) legalább 4-ször dobunk
- c) legfeljebb 4-szer dobunk

16.1.8. Dobjunk fel két kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok szorzata 0-ra végződik?

16.1.9. Dobjunk fel három kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége annak, hogy a dobott pontok szorzata 0-ra végződik?

16.1.10. Az *AALGEBR* betűket találomra egymás mellé írva, mennyi annak a valószínűsége, hogy az *ALGEBRA* szót írjuk le?

16.1.11. A 32 lapos kártyacsomagból 4 lapot húzunk ki egymás után, visszatevés nélkül.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodikra királyt húztunk?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első és utolsó király lesz?

16.1.12. A 32 lapos kártyacsomagból 5 lapot húzunk ki egymás után, visszatevés nélkül.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy másodikra pirosat húztunk?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első és utolsó piros lesz?

16.1.13. A 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúzunk 6 lapot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy e hat lap között mindegyik szín előfordul?

16.1.14. Egy csomag magyar kártyát jól összekeverünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 4 ász egymás után helyezkedik el?

16.1.15. Mennyi a valószínűsége, hogy ha valakinek az 52 lapos francia kártyából 13 lapot kiosztanak, akkor legfeljebb 3 ásza lesz?

16.1.16. Mennyi a valószínűsége, hogy 7 kockával dobva pontosan 3 db 1 lesz benne?

16.1.17. Mennyi a valószínűsége, hogy 6 kockával dobva pontosan 2 db 1-es, és 1 db 2-es lesz benne?

16.1.18. Egy pénzérmét 10-szer egymás után feldobunk. Ha fejet kapunk, azt F-fel, ha írást, azt I-vel jelöljük. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az F és I betűknek ez a 10 elemű sorozata tartalmaz két azonos betűt egymás után?

16.1.19. Egy pénzérme egyik oldalán 5-ös, másik oldalán 4-es van. Feldobjuk háromszor. Milyen összegeket, milyen valószínűséggel kaphatunk?

16.1.20. Egy pénzérme egyik oldalán 5-ös, másik oldalán 6-os van. Feldobjuk négyszer. Milyen összegeket, milyen valószínűséggel kaphatunk?

16.1.21. Egy dobozban 12 db piros golyó van és még valamennyi fehér és zöld. Annak a valószínűsége, hogy pirosat vagy fehérét veszünk ki találomra $\frac{2}{3}$. Annak, hogy fehérét vagy zöldet választunk ki találomra $\frac{3}{5}$. Mennyi fehér és mennyi zöld golyó van a dobozban?

16.1.22. Egy dobozban 18 db piros golyó van és még valamennyi fehér és zöld. Annak a valószínűsége, hogy pirosat vagy fehérét veszünk ki találomra $\frac{9}{11}$. Annak, hogy fehérét vagy zöldet választunk ki találomra $\frac{8}{11}$. Mennyi fehér és mennyi zöld golyó van a dobozban?

16.1.23. Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van. Annak a valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva, az fehér vagy fekete lesz: $\frac{3}{5}$; hogy piros vagy fekete színű lesz: $\frac{2}{3}$. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?

16.1.24. Legalább hányszor kell két kockát egyszerre feldobni, hogy 0,9-nél nagyobb valószínűséggel kapjunk 6-t?

16.1.25. Legalább hányszor kell két kockát egyszerre feldobni, hogy 0,98-nél nagyobb valószínűséggel kapjunk 5 vagy 6-t?

16.1.26. Két testvér ugyanabba a 27-es létszámú osztályba jár. Egy gyors sorakozónál mindenki beáll valahova.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy a két testvér között pontosan 10-en állnak?

b) Hogyan változik az eredmény, ha kör alakban helyezkednek el?

16.1.27. A 32 lapos magyar kártyából 4 lapot véletlenszerűen kiválasztunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kihúzott lapok között pontosan egy piros és egy ász lesz?

16.2. Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül

16.2.1. Egy dominókészletben a dominók mindkét térfelén elhelyezett pöttyök száma 0-9-ig lehetséges. Kiválasztunk 2 dominót. Mi a valószínűsége, hogy ezek a dominó szabályai szerint összeilleszthetők, azaz az egyik dominó valamelyik térfelén lévő pöttyszám megegyezik a másik dominó valamely térfelén lévő pöttyszámmal?

16.2.2. Egy dominókészletben a dominók mindkét térfelén elhelyezett pöttyök száma 0-8-ig lehetséges. Kiválasztunk 2 dominót. Mi a valószínűsége, hogy ezek a dominó szabályai szerint összeilleszthetők, azaz az egyik dominó valamelyik térfelén lévő pöttyszám megegyezik a másik dominó valamely térfelén lévő pöttyszámmal?

16.2.3. Nyolc szabályos pénzérmét feldobunk. a) Mekkora a valószínűsége, hogy több írás lesz, mint fej? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások különbségének abszolútértéke 2-nél nagyobb?

16.2.4. Hét szabályos pénzérmét feldobunk. a) Mekkora a valószínűsége, hogy több írás lesz, mint fej? b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások különbsége legalább 2?

16.2.5. 100 alma közül 10 férges. Mennyi a valószínűsége, hogy válogatás nélkül 5 almát kivéve, közöttük lesz férges alma?

16.2.6. Egy kalapban 3 fekete és 4 fehér golyó van. Egyesével kihúzzuk a golyókat. a) Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó golyó fehér lesz? b) Hétszer húzunk most is, de minden egyes húzás után visszatesszük a kihúzott golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb egyszer húzunk fehéret?

16.2.7. Egy kalapban 3 fekete és 3 fehér golyó van. Egyesével kihúzzuk a golyókat. a) Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó golyó fehér lesz? b) Hétszer húzunk most is, de minden egyes húzás után visszatesszük a kihúzott golyót. Mi a valószínűsége annak, hogy legfeljebb kétszer húzunk fehéret?

16.2.8. Egy kalapban 8 fehér és 12 fekete golyó van. Kihúzunk 6 golyót. Adjuk meg a következő események valószínűségét! A kiválasztottak között:

- a) Mind a 6 fehér
- b) 3 fekete
- c) legfeljebb 1 fehér
- d) legalább 2 fekete

16.2.9. Egy kalapban 14 golyó van, megszámozva 1-től 14-ig az egész számokkal. Kihúzunk hármat. Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok

- a) Szorzata
 - b) Összege
- osztható hárommal?

16.2.10. Egy kalapban 17 golyó van, megszámozva 1-től 17-ig az egész számokkal. Kihúzunk hármat. Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott számok

- a) Szorzata
 - b) Összege
- osztható hárommal?

16.2.11. Egy 20 fős társaságban van 6 fiatal, 9 középkorú, a többi nyugdíjas. Kiválasztunk közülük 7 főt. Adjuk meg a következő események valószínűségét! A kiválasztottak között:

- a) 3 fiatal
- b) 2 fiatal, 4 középkorú és 1 nyugdíjas
- c) legfeljebb 1 nyugdíjas
- d) van köztük fiatal

16.2.12. Egy üzemben naponta 120 terméket állítanak elő, amiből átlagosan 5% selejt. Egyik nap kiválasztunk 8-at az aznap legyártott termékek közül, úgy hogy a kiválasztottakat nem tesszük vissza. Adjuk meg a következő események valószínűségét! A kiválasztottak között:

- a) nincs selejtes
- b) legalább 2 selejtes

16.2.13. Egy iskola diákjainak 2%-a zseni. Kiválasztunk 10 főt Adjuk meg a következő események valószínűségét! A kiválasztottak között:

- a) pontosan 3 zseni?
- b) legfeljebb 2 zseni
- c) legalább 2 zseni

16.2.14. Egy üzemben a legyártott termékek közül 10-et kiválasztva, annak a valószínűsége, hogy van selejtes a kiválasztottak között 0.40126. Hány %-a selejt a naponta legyártott termékeknek?

16.2.15. Egy üzemben a legyártott termékek közül 7-et kiválasztva, annak a valószínűsége, hogy van selejtes a kiválasztottak között 0.19202. Hány %-a selejt a naponta legyártott termékeknek?

16.2.16. Egy üzemben a legyártott termékek közül átlagosan 4% selejt. Hány darabot válasszunk ki a termékek közül, hogy annak a valószínűsége, hogy van közöttük selejt 0.2786?

16.2.17. Egy üzemben a legyártott termékek közül átlagosan 3% selejt. Hány darabot válasszunk ki a termékek közül, hogy annak a valószínűsége, hogy van közöttük selejt 0.3062?

16.2.18. Egy kalapban van 6 piros, és 5 kék golyó.

- a) Kiválasztunk 4 golyót visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy különböző színűek?
- b) Kiválasztunk 4 golyót visszatevéssel. Mi a valószínűsége, hogy 2 piros és 2 kék lesz a kiválasztottak között?

16.3. Geometriai valószínűség

16.3.1. Egy 20 cm oldalú négyzet alakú céltáblára 5 cm sugarú kört rajzolunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a találat ezen a körön kívül éri a céltáblát?

16.3.2. Egy céltábla koncentrikus körökből áll egy 25 cm oldalú négyzetlapon. A 10 pontot érő 1 cm sugarú, a 9 pontot érő 2 cm sugarú, és így tovább, az 1 pontot érő 10 cm sugarú. Egy lövés után mennyi a valószínűsége, hogy:

- a) Legalább 8 pontot lövünk
- b) Pontosán 5 pontot lövünk
- c) Nincs érvényes találatunk?

16.3.3. Egység sugarú kör alakú céltáblára lövünk. A találat valószínűsége egyenletes eloszlású. A céltáblát koncentrikus körökkel 10 részre akarjuk osztani úgy, hogy minden részbe egyenlő valószínűséggel essen a találat. Mekkoraak legyenek a sugarak?

16.3.4. Egy szabályos tízsög beírható körének sugara 5 cm. Kiválasztjuk a sokszög egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott három szomszédos csúcs (pl. ABC) által meghatározott háromszög belső pontját választottuk ki?

16.3.5. Egy szabályos nyolcszög legrövidebb átlója 10 m. Kiválasztjuk a sokszög egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy egy adott három szomszédos csúcs (pl. ABC) által meghatározott háromszög belső pontját választottuk ki?

16.3.6. Egy téglalap csúcspontjainak koordinátái: A(0,0), B(0,1), C(4,1), D(4,0) Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha az ABCD téglalap egy belső pontját kiválasztjuk, akkor az az $5x+2y=4$, illetve $5x+2y=6$ egyenesek által határolt síkrészből való?

16.3.7. Egy téglalap csúcspontjainak koordinátái: A(0,0), B(0,1), C(2,1), D(2,0) Mekkora a valószínűsége annak, hogy ha az ABCD téglalap egy belső pontját kiválasztjuk, akkor az

a) a $2x+5y=7$ egyenes „feletti” síkrészből való?

b) a $2x+5y=5$ egyenes „alatti” síkrészből való?

c a $2x+5y=7$ és a $2x+5y=5$ egyenesek által határolt síkrészből való?

16.3.8. Az $x^2+y^2+4x-6y+9=0$ egyenletű kör egy belső pontját kiválasztva, mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a P(-2,-3) ponttól 1 egységtől nagyobb távolságra van?

16.3.9. Az $x^2+y^2-8x+10y+25=0$ egyenletű kör egy belső pontját kiválasztva, mekkora a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott pont a P(4,-5) ponttól 3 egységtől nem nagyobb távolságra van?

16.3.10. A (0,7) intervallumon véletlenszerűen felvesszünk egy P pontot. Annak valószínűsége, hogy ez a 3-nak r sugarú környezetébe esik 0,2. Határozzuk meg az r értékét!

16.3.11. Egy r sugarú kör területén felvesszünk egy P pontot. Ezt követően a körlapon véletlenszerűen választunk egy pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága:

$$d > \sqrt{2} \cdot r ?$$

16.3.12. Egy egységnyi szakaszon véletlenszerűen kijelölünk két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy az így keletkezett három szakaszból egy háromszög szerkeszthető?

16.3.13. Egy r sugarú körvonalon véletlenszerűen kijelölünk három pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a három pont egy hegyesszögű háromszöget alkot?

16.3.14. Egy egységnyi szakaszt egy tetszőleges ponttal két részre osztunk, majd a nagyobbikat még egy ponttal szintén két részre. Mennyi a valószínűsége, hogy a kapott három szakaszból egy háromszög szerkeszthető?

16.3.15. Válasszunk három szakaszt véletlenszerűen a $(0, d)$ intervallumból. Mennyi a valószínűsége, hogy a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

16.3.16. Véletlenszerűen választunk az egységnyinél kisebb élhosszúságú téglatestet. Mennyi a valószínűsége, hogy a téglatest testátlója az egységnél kisebb?

16.3.17. Az A és B várost 450 km kábel köti össze. A kábel meghibásodása egyenletes eloszlású az egész szakaszon. Mennyi a valószínűsége, hogy az első hiba az A várostól 180 km-nél távolabbi helyen következik be?

16.3.18. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kijelölünk két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a köztük lévő távolság kisebb, mint d , ahol $0 < d < 1$?

16.3.19. Egy házaspár megbeszélte, hogy 9 és 10 óra között találkoznak egy téren. Az érkezés a megbeszélte időn belül véletlenszerű. Mennyi a valószínűsége, hogy az először érkezőnek nem kell 20 percnél többet várnia a másikra?

16.3.20. Egy házaspár megbeszélte, hogy 9 és 10 óra között találkoznak egy téren. Az érkezés a megbeszélte időn belül véletlenszerű. Mennyi a valószínűsége, hogy nem fognak találkozni, ha csak 15 percet várnak a másikra?

16.3.21. . Egy kikötőbe 12 órán belül véletlenszerűen két hajó érkezik. Az elsőnek érkező hajó rögtön elkezd a kirakodást. Az egyik hajónak 1 órát, a másiknak 2 órát vesz igénybe a rakodás. Ha valamelyik hajó rakodik, akkor a másiknak várakoznia kell. Mennyi a valószínűsége, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell a kirakodásra?

16.3.22. Két darab egymás mellett futó 200 m hosszú kábelben szeretnének kijelölni egy-egy szakaszt. Milyen hosszú szakaszt kell választani, hogy 0,5 valószínűséggel ne kerüljenek még részben sem egymás mellé a kiválasztott részek?

16.3.23. Legyen egy n hosszúságú szakasz egyik végpontja P . Ezen a szakaszon választunk két pontot véletlenszerűen. Legyenek ezek Q és R . Mennyi a valószínűsége, hogy a Q pont közelebb van a P -hez, mint az R -hez?

16.3.24. A $[0,1]$ intervallumon felveszünk véletlenszerűen két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezek a pontok közelebb vannak egymáshoz, mint a 0 pont és a hozzá közelebb eső pont távolsága?

16.3.25. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen választunk két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont közelebb lesz egymáshoz, mint bármelyikük a végpontokhoz?

16.3.26. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen választunk két pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy a létrejövő három szakasz egyike sem hosszabb, mint egy adott h hosszúság, ahol $\frac{1}{3} \leq h \leq 1$?

16.4. Feltételes valószínűség

16.4.1. Három kockát feldobunk. Feltéve, hogy a dobott számok között nincs két egyforma, mennyi a valószínűsége, hogy legalább az egyik 6-os van?

16.4.2. Ha nagyon sok kétgyerekes család közül kiválasztunk véletlenszerűen egyet, és megtudjuk, hogy legalább az egyik gyerek lány, akkor mennyi a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?

16.4.3. Három kockával dobunk. Mekkora a valószínűsége, hogy az egyik kockával 6-ost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12.

16.4.4. Bizonyítsa be, hogy ha $P(A) = 0,7$ és $P(B) = 0,8$, akkor $P(A|B) \geq 0,625$!

16.4.5. Hat azonos alakú doboz közül az első 5-ben 1-1 golyó van, mégpedig fehér és kék. A hatodik dobozban 4 fehér és 1 kék golyó van. Az egyik találomra választott dobozból véletlenszerűen kivesszünk egy golyót. A kivett golyó fehér lett. Mennyi a valószínűsége, hogy a hatodik dobozból való?

16.4.6. Öt kalap közül az elsőben 1 fehér és 1 fekete, a másodikban 2 fehér és 1 fekete, a harmadikban 3 fehér és 1 fekete, a negyedikben 4 fehér és 1 fekete, az ötödikben pedig 5 fehér, és 1 fekete golyó van. Az egyik találomra választott kalapból véletlenszerűen kivesszünk egy golyót.

a) A kivett golyó fehér lett. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik dobozból való?

b) A kivett golyó fekete lett. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobozból való?

16.4.7. Kimutatták, hogy egy ország lakosságának 20%-a dohányos, nekik 85%-a szenved egy bizonyos típusú betegségben, míg a nem dohányosoknak mindössze 4%-a. Kiválasztunk egy embert.

a) A kiválasztott beteg. Mennyi a valószínűsége, hogy dohányzik?

b) A kiválasztott egészséges. Mennyi a valószínűsége, hogy nem dohányzik?

16.4.8. Kimutatták, hogy egy iskola diákjainak 5%-a nagyon magas IQ-val rendelkezik. Közülük 95%-a kitűnő, míg a többieknek mindössze 45%-a. Kiválasztunk egy diákot.

a) A kiválasztott nem kitűnő. Mennyi a valószínűsége, hogy magas IQ-val rendelkezik?

b) A kiválasztott kitűnő. Mennyi a valószínűsége, hogy nem rendelkezik magas IQ-val?

16.4.9. Van egy-egy szabályos „dobótetraéderünk”, és dobókockánk. Mindegyik test lapjaira egytől kezdve felírtuk az első néhány pozitív egészet, tehát a tetraéderre 1-től 4-ig, a kockára 1-től 6-ig. Feldobunk két szabályos érmét. Ha mindkettő fej, akkor a kockával, egyébként a tetraéderrel dobunk. 1-est dobtunk. Mennyi az esélye, hogy pontosan egy fejet dobtunk?

16.4.10. Van egy-egy szabályos „dobótetraéderünk”, és dobókockánk. Mindegyik test lapjaira egytől kezdve felírtuk az első néhány pozitív egészet, tehát a tetraéderre 1-től 4-ig, a kockára 1-től 6-ig. Feldobunk két szabályos érmét. Ha van közöttük fej, akkor a kockával, egyébként a tetraéderrel dobunk. 1-est dobtunk. Mennyi az esélye, hogy nem dobtunk fejet?

16.5. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték

16.5.1. Szabályos dobókockával dobunk. A ζ valószínűségi változó jelentse a dobott értéket. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.2. Két szabályos dobókockával dobunk. A ζ valószínűségi változó jelentse a dobott számok összegét. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.3. Egy dobókocka egy oldalán 1-es, két oldalán 2-es, és három oldalán 3-as szerepel. Egyszer dobunk a kockával. A ζ valószínűségi változó jelentse a dobott értéket. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.4. Egy 20 fős társaságban 12 nő van. Kiválasztunk 4 embert. A ζ valószínűségi változó jelentse a kiválasztott nők számát. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.5. Egy kalapban 6 fekete és 4 fehér golyó van. Kiválasztunk három golyót. A ζ valószínűségi változó jelentse a kiválasztott fehérek számát. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.6. Egy célra lövéskor 0.2 a találat valószínűsége. Háromszor lövünk a célra. A ζ valószínűségi változó jelentse a találatok számát. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.7. Influenzajárvány idején gyakran előfordul, hogy minden 10.-ik ember megfertőződik az influenza vírussal. Kiválasztunk két embert véletlenszerűen a járványos időszakban. A ζ valószínűségi változó jelentse a kiválasztottak között a megbetegedett emberek számát. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.5.8. Profi focisták 85%-a értékesíti az általuk végrehajtott büntetőket. Egy profi focista az edzésen 4 büntetőt lő gyakorlásképpen. A ζ valószínűségi változó jelentse a sikerrel végrehajtott büntetők számát. Adjuk meg ζ eloszlását és várható értékét!

16.6. Vegyes feladatok

16.6.1. A lottóban legyen minden szelvény telitalalatának valószínűsége k ($0 < k < 1$).

- a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy valaki egy szelvénnel játszva legalább egy telitalálata lesz, ha egy nap két húzás van, és egy adott szelvénnel mindkét húzásnál nyerhet?
- b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy valaki két szelvénnel játszva telitalálatot ér el, ha egy nap egy húzás van, és valaki két (lehet egyforma is) szelvénnel nyer?
- c) Egy játékos számára az a) vagy a b) verzió az előnyösebb?

16.6.2. Egy rendezvényen lottóhúzást szerveznek. Egy szelvényen 20 szám (az első 20 pozitív egész) található, ebből kell 4-et megjelölni. Csak a telitalalat, vagy a három találat nyer. Egy szelvény ára 500 Ft. A telitalalat értéke 10.000 Ft, a három találaté 2.000 Ft. Határozzuk meg a következő események valószínűségét!

- a) Egy szabályosan kitöltött szelvény nyer.
- b) A legkisebb kihúzott szám az 5-ös, illetve a legnagyobb kihúzott számok a 11 és 15.
- c) A kihúzott számok a húzás sorrendjében csökkenő, vagy növekvőleg követik egymást.
- d) 10 véletlenszerűen (nem feltétlenül különbözően kitöltött szelvény közül legfeljebb 1 lesz telitalálatos.
- e) 1000 eladott szelvény esetén mekkora lesz a szervezők lottóhúzásból származó bevétele?

16.6.3. Egy metrószerelvény egy ajtajának esetén a kinyílás valószínűsége k . Ez minden ajtó esetén egyforma. Mi a valószínűsége annak, hogy:

- a) Egy megállóban a 10 ajtó közül legalább egy kinyílik?
- b) Egy megállóban a 10 ajtó közül legfeljebb kettő nyílik ki?
- c) Mekkora k értéktől fog az ajtók közül mind kinyílni legalább 90%-os valószínűséggel?

16.6.4. András és Béla évek óta teniszeznek. Tapasztalatok alapján elmondható, hogy András nyeresének valószínűsége k .

- a) Mi a valószínűsége annak, hogy 5 lejátszott meccsből legalább 1-et András nyer?
- b) Mekkora k értéktől lesz annak a valószínűsége legalább 0.8, hogy Béla legfeljebb 1 meccset nyer, ha kétszer játszanak?
- c) Három lejátszott meccs esetén mekkora k érték esetén lesz András győztes meccseinek várható értéke 2?

16.6.5. 4 lány és 4 fiú moziba megy.

- a) Leülnek egymás mellé egy sorban. Mi a valószínűsége, hogy fiúk és lányok felváltva ülnek?
- b) Amikor vége az előadásnak, egymás után sorban jönnek ki az ajtón. Mi a valószínűsége annak, hogy az első 4 között két fiú és két lány lesz?
- c) Mind a 8-an felírják a nevüket egy cédulára, és belerakják egy kalapba. Ezután sorban kihúzzák a cédulákat úgy, hogy minden húzás után visszateszik a kihúzott nevet. Mi a valószínűsége, hogy az első 5 húzás után egy adott nevet kétszer is kihúztak?

17. Analízis

17.1. Sorozatok tulajdonságai, mértani sor

17.1.1. Jellemezzük az $a_n = \frac{3n+1}{n+2}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

17.1.2. Jellemezzük az $a_n = \frac{3-4n}{3n+1}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

17.1.3. Jellemezzük az $a_n = \frac{2n+3}{n-3}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

17.1.4. Jellemezzük az $a_n = \frac{5n+1}{2n-5}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

17.1.5. Jellemezzük az $a_n = \frac{6n-5}{5n+4}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

17.1.6. Jellemezzük az $a_n = \frac{4n+3}{n-4}$ sorozatot monotonitás szempontjából!

17.1.7. Határozzuk meg az $a_n = \frac{5n^2+9n-3}{7n^2-2n+1}$ sorozat határértékét!

17.1.8. Határozzuk meg az $a_n = \frac{2n^2-5n+9}{7n+1}$ sorozat határértékét!

17.1.9. Határozzuk meg az $a_n = \frac{9n^3-8n+7n^2}{5-3n^4}$ sorozat határértékét!

17.1.10. Határozzuk meg az $a_n = \frac{4n^3-2n+7}{5-3n-n^2}$ sorozat határértékét!

17.1.11. Határozzuk meg az $a_n = \frac{8n^2-2n+7}{5+3n-7n^2}$ sorozat határértékét!

17.1.12. Határozzuk meg az $a_n = \frac{4n^3-2n+7}{n^3-5-3n}$ sorozat határértékét!

17.1.13. Jellemezzük az $a_n = \frac{n+7}{2n+4}$ sorozatot korlátosság szempontjából!

17.1.14. Jellemezzük az $a_n = \frac{2n+9}{3n+5}$ sorozatot korlátosság szempontjából!

17.1.15. Jellemezzük az $a_n = \frac{n+2}{2n-3}$ sorozatot korlátosság szempontjából!

17.1.16. Jellemezzük az $a_n = \frac{3n+2}{2-n}$ sorozatot korlátosság szempontjából!

17.1.17. Jellemezzük az $a_n = \frac{2n+5}{3n-7}$ sorozatot korlátosság szempontjából!

17.1.18. Jellemezzük az $a_n = \frac{4n-3}{5-3n}$ sorozatot korlátosság szempontjából!

17.1.19. Az $a_n = \frac{3n+2}{2n-1}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetébe?

17.1.20. Az $a_n = \frac{n+1}{n+4}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe?

17.1.21. Az $a_n = \frac{n+3}{1-2n}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetébe?

17.1.22. Az $a_n = \frac{5n-2}{3n-1}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-4}$ sugarú környezetébe?

17.1.23. Az $a_n = \frac{3n+2}{7-2n}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetébe?

17.1.24. Az $a_n = \frac{3n-4}{6-5n}$ sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe?

17.1.25. Jellemezzük az $a_n = \frac{3n-4}{n+4}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe?

17.1.26. Jellemezzük az $a_n = \frac{2n+3}{7n+4}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-2}$ sugarú környezetébe?

17.1.27. Jellemezzük az $a_n = \frac{5n-1}{n-3}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából.

Tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe?

17.1.28. Jellemezzük az $a_n = \frac{4n-5}{6-2n}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából.

Tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-4}$ sugarú környezetébe?

17.1.29. Jellemezzük az $a_n = \frac{3n-11}{2n-5}$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából.

Tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték $\varepsilon=10^{-3}$ sugarú környezetébe?

17.1.30. Adott egy 2 cm oldalú négyzet. Középvonalaival bontsuk 4 egybevágó négyzetre. Válasszuk ki a bal felső sarokban lévő négyzetet, és ezt is bontsuk a középvonalaival 4 egybevágó részre. Ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a szóban forgó négyzetek kerületeinek és területeinek az összegét! (Beleértve a kiindulási négyzetet is!)

17.1.31. Adott egy 6 cm oldalú négyzet. Oldalaival párhuzamos harmadoló vonalaival bontsuk 9 egybevágó négyzetre. Válasszuk ki a bal felső sarokban lévő négyzetet, és ezt is bontsuk az előzőhöz hasonlóan 9 egybevágó részre. Ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a szóban forgó négyzetek kerületeinek és területeinek az összegét! (Beleértve a kiindulási négyzetet is!)

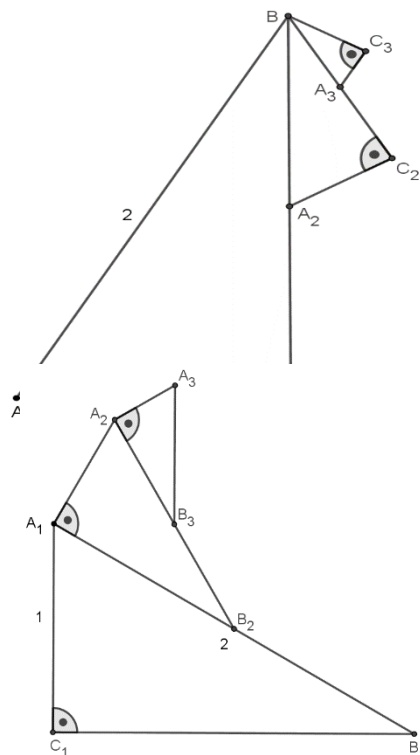
17.1.32. Adott egy 3 cm oldalú négyzet. Szomszédos felezőpontjait összekötve újabb négyzetet kapunk. Ennek szomszédos felezőpontjait összekötve megint négyzet keletkezik. Ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg az eredeti négyzettől eltekintve a kapottak kerületeinek és területeinek az összegét!

17.1.33. Egy szabályos háromszög oldala 4 cm. A felezőpontjait összekötve újabb háromszöget kapunk. Ennek a felezőpontjait is kössük össze, és ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a kapott háromszögek kerületeinek és területeinek az összegét! (Beleértve az eredeti háromszöget is!)

17.1.34. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 10 cm. A derékszögű csúcsához tartozó magasság mentén bontsuk két háromszögre. Ezek közül tekintsük a bal oldalit. Ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a kapott háromszögek kerületeinek és területeinek az összegét! (Beleértve az eredeti háromszöget is!)

17.1.35. Adott az A_1BC_1 derékszögű háromszög, melynek átfogója 2 egység, a B csúccsal szemközti befogó 1 egység. A C_1B befogó felezőpontja A_2 . Rajzoljunk az eredetivel hasonló derékszögű háromszöget az ábra alapján a C_1B befogóra, melynek átfogója A_2B . Ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig! Határozzuk meg a feladatban szereplő háromszögek területének és kerületének összegét!

17.1.36. Adott az $A_1B_1C_1$ derékszögű háromszög, melynek átfogója 2 egység, a B_1 csúccsal szemközti befogó 1 egység. A B_1A_1 átfogó felezőpontja B_2 . Rajzoljunk az eredetivel hasonló háromszögeket az ábrán látható módon, és az eljárást a végtelenségig folytassuk. Határozzuk meg az így kapott $C_1A_1A_2A_3\dots$ törött vonal hosszát, illetve a háromszögek területének és kerületének összegét!



17.1.37. Adott egy 12 cm oldalú négyzet. Egyik csúcsából kiindulva bontsuk az oldalakat 5:7 arányban. A kapott osztópontokat kössük össze, és így egy újabb négyzetet kapunk. Az előbbi eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a kapott négyzetek kerületeinek és területeinek az összegét!

17.1.38. Adott egy 1 cm oldalú négyzet. Egyik csúcsából kiindulva bontsuk az oldalakat 3:4 arányban. A kapott osztópontokat kössük össze, és így egy újabb négyzetet kapunk. Az előbbi eljárást folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a kapott négyzetek kerületeinek és területeinek az összegét!

17.1.39. Egy szabályos ötszögnek a kerületét jelöljük k_1 -el, területét t_1 -el. Kicsinyítsünk a harmadára, és az így kapott ötszög kerületét k_2 -vel, területét t_3 -al. Folytassuk ezt az eljárást a végtelenségig. Határozzuk meg, hogy a kiindulási ötszög kerülete hány %-a a $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n + \dots)$ határértéknek, illetve a területe hány %-a a $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots)$ határértéknek!

17.1.40. Egy szabályos hatszög oldalainak hossza 3 cm. Tekintsük az oldalfelezőpontok segítségével kapott hatszöget, majd ennek az oldalfelező pontjaival kapott hatszöget is. Ezt folytassuk a végtelenségig. Határozzuk meg a kapott hatszögek kerületeinek és területeinek az összegét! (beleértve a kiindulási hatszöget is!).

17.2. Függvények határértéke

Határozzuk meg a következő határértékeket!

$$17.2.1. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x+2} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{x+2} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{x+2}$$

$$17.2.2. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

$$17.2.3. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x}{x^4+x^2+1} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-x}{x^4+x^2+1} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{x^4+x^2+1}$$

$$17.2.4. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-9}{x^2-3x} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$$

$$17.2.5. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{25-x^2} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{25-x^2} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{25-x^2}$$

$$17.2.6. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-8x+7} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x^2-8x+7} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2+2x-3}{x^2-8x+7}$$

$$17.2.7. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$$

$$17.2.8. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-7x+5}{3x^2-5x+2} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{2x^2-7x+5}{3x^2-5x+2} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2-7x+5}{3x^2-5x+2}$$

$$17.2.9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x}$$

$$17.2.10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-7x+10} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-7x+10} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-6x^2+5x}{x^2-7x+10}$$

$$17.2.11. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3-8}{x-2} \quad \text{ c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-8}{x-2}$$

$$17.2.12. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^4 + 27x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^4 + 27x} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^4 + 27x}$$

17.3. Függvények deriválása, a derivált függvény alkalmazásai

Deriváljuk a következő függvényeket!

$$17.3.1. \text{ a) } f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + x - 1 \quad \text{b) } f(x) = x^5 - \frac{1}{x^4} - x + 5 \quad \text{c) } f(x) = x^7 - \frac{1}{x^6} - \pi$$

$$17.3.2. \text{ a) } f(x) = 5x^4 - \frac{7}{x} + 6x - 3 \quad \text{b) } f(x) = 2x^3 - \frac{6}{x^5} - 9x \quad \text{c) } f(x) = 4x^3 - \frac{12}{x^2} - e^2$$

$$17.3.3. \text{ a) } f(x) = \sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{x} \quad \text{b) } f(x) = \sqrt[6]{x} - \frac{6}{\sqrt[5]{x^4}} + 3\sqrt{x} \quad \text{c) } f(x) = 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$17.3.4. \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{5x^4 - 10x^2}{2x} \quad \text{c) } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$17.3.5. \text{ a) } f(x) = \frac{1 - x^2}{x + 1} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x + 2} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x - 3}$$

$$17.3.6. \text{ a) } f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x^3 + 125}{x^2 - 5x + 25} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^4 - 16}{x - 2}$$

$$17.3.7. \text{ a) } f(x) = \ln x \cdot \cos x \quad \text{b) } f(x) = (4x^3 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 12) \\ \text{c) } f(x) = (-x^4 + 5x^2 - 3) \cdot \sin x$$

$$17.3.8. f(x) = 2 \ln x \cdot e^x \quad \text{b) } f(x) = 3 \ln x \cdot (2x - e) \quad \text{c) } f(x) = 5 \cos x \cdot (x^5 - 7x + 1)$$

$$17.3.9. \text{ a) } f(x) = \frac{2x^3 + 5x - 6}{x^2 - 2x} \quad \text{b) } f(x) = \frac{x + 12}{x^2 - 15x + 23} \quad \text{c) } f(x) = \frac{x^3 + 2x - 15}{x - 2}$$

$$17.3.10. \text{ a) } f(x) = \frac{\sin x}{3x - 2} \quad \text{b) } f(x) = \frac{-3 \cos x}{3x^2 - 5x + 2} \quad \text{c) } f(x) = \frac{2 \ln x}{x^4 - 2x + 1}$$

$$17.3.11. \text{ a) } f(x) = e^{2x-3} \quad \text{b) } f(x) = \ln(5x^2 - 3x + 1) \\ \text{c) } f(x) = \cos(7x - x^2)$$

$$17.3.12. \text{ a) } f(x) = \ln(3x^2 - 2x + 5) \quad \text{b) } f(x) = \sin(5x - 6) \quad \text{c) } f(x) = \cos^2 x$$

$$17.3.13. \text{ a) } f(x) = 3 \ln^4 x \quad \text{b) } f(x) = e^{5 \sin x} \quad \text{c) } f(x) = \cos(\sin(x))$$

Határozzuk meg a következő függvények P pontbeli érintőjének egyenletét!

17.3.14. a) $f(x) = x^2 - x + 2$, $P(1,2)$ b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$, $P(0,-5)$

17.3.15. a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + x$, $P(-1,-6)$ b) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 4$, $P(2,-8)$

17.3.16. a) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 1$, $P(1,2)$ b) $f(x) = x^4 - 5x^2 - 2x + 1$, $P(1,-5)$

Határozzuk meg a következő függvények x_0 abszcisszájú pontbeli érintőjének egyenletét!

17.3.17. a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = 2$ b) $f(x) = -3x^2 + 7x - 6$, $x_0 = -1$

17.3.18. a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x_0 = -2$ b) $f(x) = 5x^3 - 2x - 1$, $x_0 = 0$

17.3.19. a) $f(x) = x^4 - 7x^2 + 2$, $x_0 = 1$ b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12x - 3$, $x_0 = 3$

Határozzuk meg a következő függvények monotonitását, szélsőértékét, konvexitását, inflexiós pontját! 17.3.20-24.

17.3.20. a) $f(x) = -3x^2 + 12x + 7$ b) $f(x) = 4x^2 - 24x + 13$

17.3.21. a) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 - 10$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 1$, $x \in]-10, 10[$

17.3.22. a) $f(x) = 3x^4 - 24x^2$ b) $f(x) = -3x^4 - 8x^3$, $x \in]-6, 6[$

17.3.23. a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x}$

17.3.24. a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

17.3.25. Adott a valós számok halmazán értelmezett $g(x) = x^3 + px^2 + 3x$ függvény. a) Mekkora p érték esetén lesz a $x = -3$ lokális szélsőérték-hely? Maximuma, vagy minimuma van a függvénynek ezen a helyen? b) Az a) pontban kiszámított p érték esetén van-e még az $x = -3$ -tól különböző szélsőérték-hely?

17.3.26. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x^3 + px^2 - 30x$ függvény. a) Mekkora p érték esetén lesz a $x = 6$ lokális szélsőérték-hely? Maximuma, vagy minimuma van a függvénynek ezen a helyen? b) Az a) pontban kiszámított p érték esetén van-e még az $x = 6$ -tól különböző szélsőérték-hely?

17.3.27. Egy üzemben egy termék darabszáma és önköltsége közötti összefüggés: $f(x) = 444,6 - 42,2x + 1,5x^2 - 0,015x^3$. Ebben x a darabszámot jelenti, f(x) pedig az önköltséget Ft-

ban. Mekkora darabszámhoz tartozik a minimális önköltség? Mekkora ez a minimális önköltség?

17.3.28. Egy üzemben egy termék darabszáma és önköltsége közötti összefüggés: $f(x) = 0.1x^3 - 21x^2 + 1470x + 4169$, ahol $x \in [0, 250]$. Ebben x a darabszámot jelenti, $f(x)$ pedig az önköltséget Ft-ban. Mekkora darabszámhoz tartozik a minimális önköltség? Mekkora ez a minimális önköltség?

17.3.29. Egy termék kg-ban kifejezett kereslete és annak p forintos egységára között az $f(p) = -4p + 280$ összefüggés áll fent. Hány forintos egységár mellett lenne az árbevétel maximális, és hány Ft ez a maximum? Mekkora kereslet tartozik ehhez az egységárhoz?

17.3.30. Egy termék kg-ban kifejezett kereslete és annak p forintos egységára között az $f(p) = -5p + 420$ összefüggés áll fent. Hány forintos egységár mellett lenne az árbevétel maximális, és hány Ft ez a maximum? Mekkora kereslet tartozik ehhez az egységárhoz?

17.3.31. Valamely termék nyereségfüggvénye: $N(x) = -2x^2 + 250x - 270$. Költségfüggvénye: $K(x) = 70x + 2$. Milyen x mellett vesz fel maximális értéket az árbevétel függvénye? (x az eladott mennyiséget jelenti).

17.3.32. Valamely termék nyereségfüggvénye: $N(x) = -3x^2 + 210x - 240$. Költségfüggvénye: $K(x) = 60x + 3$. Milyen x mellett vesz fel maximális értéket az árbevétel függvénye? (x az eladott mennyiséget jelenti).

17.3.33. Egy repülő költségeit a kerozinfogyasztás és egyéb költségek jelentik. Az óránként felhasznált kerozin K értéke függ a sebességtől, ezt a $K(x) = 0.03x^3$ írja le, ahol x (100km/h) a sebesség. Az egyéb kiadások 480 eurót tesznek ki óránként. Mekkora sebesség esetén lesz kilométerenkénti költség minimális?

17.3.34. Régebben a gőzmozdonyok üzemeltetési költségeit a fűtőanyagfogyasztás, a mozdonyvezető óránkénti díja, és egyéb költségek határozták meg. Az óránként felhasznált fűtőanyag F értéke $F(x) = 0.005x^3$ módon függött x (km/h) sebesség esetén. A mozdonyvezetők díja óránként 250 Ft. Az egyéb költségek 1000 Ft-t tettek ki óránként.

17.3.35. Két európai Duna menti nagyváros között hajójáratokat üzemeltet egy cég. Egy járat legalább 30 utas esetén indul, és maximum 210 főt képes elszállítani. Az utasonkénti részvételi díjat a következő módszer szerint alakítják: 50 fő alatt fix 400 euró a költség fejenként. 50 vagy attól több utas esetén annyiszor 1.15 euróval csökken a 400 euró, amennyivel több utas van, mint 50. Hány utas esetén lesz a társaság bevétele egy járaton a legtöbb? Mekkora ez a bevétel?

17.3.36. Két nagyváros között repülőjáratokat üzemeltet egy cég. Egy járat legalább 10 utas esetén indul, és maximum 36 főt képes elszállítani. Az utasonkénti részvételi díjat a következő módszer szerint alakítják: 20, vagy annál kevesebb utasszám alatt fejenként 16.000 Ft a költség. 20-tól több utas esetén annyszor 400 Ft-al csökken a 16.000 Ft-os viteldíj, amennyivel több utas van, mint 20. Hány utas esetén lesz a társaság bevétele egy járaton a legtöbb? Mekkora ez a bevétel?

17.4. Integrálás, és alkalmazásai

Határozzuk meg a következő függvények határozatlan integráljait!

17.4.1. a) $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^2} + x - 1$ b) $f(x) = x^5 - \frac{1}{x^4} - 3x + 5$ c) $f(x) = 5x^7 - \frac{3}{x^6} - 2\pi$

17.4.2. a) $f(x) = \frac{x^3 - 64}{x - 4}$ b) $f(x) = \frac{x^3 + 125}{x^2 - 5x + 25}$

17.4.3. a) $f(x) = 2 \cos x + \frac{3}{x} - 3e$ b) $f(x) = 2e^x - \frac{5}{x} + 4\pi$

17.4.4. a) $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x - 2}$ b) $f(x) = (4x^3 - 3x + 2) \cdot (x^2 + 12)$

Számítsuk ki a következő határozott integrálokat!

17.4.5. a) $\int_0^1 (4x^2 - 3x) dx$ b) $\int_0^2 (-3x^2 + 4x) dx$ c) $\int_1^3 (2x^4 - 3x^2 + 5x) dx$

17.4.6. a) $\int_0^\pi (\sin x + 1) dx$ b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2 \cos x) dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x - 1) dx$

17.4.7. a) $\int_1^e \left(\frac{2}{x} - 3 \right) dx$ b) $\int_0^1 (5e^x + 2x) dx$ c) $\int_e^{e^2} \left(\frac{5}{x} - 2e^x \right) dx$

17.4.8. Határozzuk meg a 'p' valós paraméter értékét, ha

a) $\int_0^p (2x - 6) dx = -9$ b) $\int_p^6 (x^3 + x) dx = 336$ c) $\int_1^p (2x + p) dx = 14$

17.4.9. Határozzuk meg az 'm' valós paraméter értékét, ha $m \in [0, 2\pi]$ és

$$\text{a) } \int_{\frac{\pi}{2}}^m (2 \sin x) dx = 2 \qquad \text{b) } \int_{\frac{\pi}{2}}^m \left(-\frac{1}{2} \cos x \right) dx = 1$$

17.4.10. Határozzuk meg az 'c' valós paraméter értékét, ha $c \in]0, 2\pi]$ és

$$\text{a) } \int_0^c (\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x) dx = 0 \qquad \text{b) } \int_0^c (\sqrt{3} \cos x - \sin x) dx = 0$$

17.4.11. Határozzuk meg a 'p' valós paraméter értékét, ha

$$\text{a) } \int_1^p \frac{2}{x} dx = 2 \qquad \text{b) } \int_0^p e^x dx = e^2 - 1$$

17.4.12. Határozzuk meg mekkora az $f(x)$ függvény és az x tengely által határolt zárt síkidom területe?

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 3x + 2 \qquad \text{b) } f(x) = -x^2 + 6x - 5 \qquad \text{c) } f(x) = 2x^2 - 2x - 12$$

17.4.13. Határozzuk meg mekkora az $f(x)$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területe az adott intervallumon?

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in [0, 5] \qquad \text{b) } f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x, x \in [0, 3]$$

17.4.14. Határozzuk meg mekkora az $f(x)$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területe az adott intervallumon?

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 8, x \in [1, 4] \qquad \text{b) } f(x) = x^4 - x^3 + x^2, x \in [-1, 1]$$

17.4.15. Határozzuk meg mekkora az $f(x)$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területe az adott intervallumon?

$$\text{a) } f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 6x, x \in [-1, 5] \qquad \text{b) } f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 9x^2, x \in [-2, 4]$$

17.4.16. Határozzuk meg mekkora az $f(x)$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területe?

$$\text{a) } f(x) = \sin x, x \in]0, 2\pi] \qquad \text{b) } f(x) = 2 \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{4} \right]$$

17.4.17. Határozzuk meg mekkora az $f(x)$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területe?

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{2} \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6} \right] \qquad \text{b) } f(x) = 1.5 \cos x, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3} \right]$$

17.4.18. Határozzuk meg mekkora a függvények által határolt zárt síkidom területe?

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $g(x) = 2x - 4$ b) $h(x) = -2x$, $i(x) = x^2 + 2x + 3$

17.4.19. Határozzuk meg mekkora a függvények által határolt zárt síkidom területe?

a) $f(x) = x - 0.5x^2$, $g(x) = 2x - x^2$ b) $h(x) = -x + 3$, $i(x) = x^2 + 1$

17.4.20. Határozzuk meg mekkora a függvények által határolt zárt síkidom területe?

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $g(x) = 1 - x^2$ b) $h(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ $i(x) = (x - 1)^2$

17.4.21. Határozzuk meg mekkora a függvények által határolt zárt síkidom területe?

a) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$ b) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{3} \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$

17.4.22. Határozzuk meg mekkora a függvények által határolt zárt síkidom területe?

a) $f(x) = 0.5 \sin x$, $g(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{3}}$, $x \in [0, 1.5\pi]$

b) $f(x) = \frac{3}{2} \sin x$, $g(x) = \sqrt{3} \cos x$, $x \in [0, 3\pi]$

17.4.23. Határozzuk meg mekkora a függvények által határolt zárt síkidom területe?

$f(x) = 0.5 \sin 2x$, $g(x) = \frac{1}{2}(2 \sin x + \sin 2x)$, $x \in [0, \pi]$

17.4.24. Határozzuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = -4x^2 + p^2$ függvény

és az x tengely által bezárt terület háromszorosa legyen a $g(x) = \frac{p^2 - 4x^2}{p^2}$ függvény és az x tengely által bezárt területnek!

17.4.25. Határozzuk meg az m ($m > 1$) valós paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = x^2 + 3x + 4m$

függvény és a $g(x) = mx^2 + 3x + 4$ függvények által bezárt terület nagysága $\frac{32}{3}$ legyen!

17.4.26. Határozzuk meg a , b , c értékét, az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény az 1 abszcisszájú pontban érinti a $g(x) = 3x^2$ függvényt, és az y tengelyt a -10-ben metszi! Határozzuk meg a két függvény és az x tengely által bezárt terület nagyságát!

17.4.27. Határozzuk meg a , b , c értékét, az $f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény az 2 abszcisszájú pontban érinti a $g(x) = x^2$ függvényt, és az y tengelyt a -8-ban metszi! Határozzuk meg a két függvény és az x tengely által bezárt terület nagyságát!

18. Bizonyítási módszerek

18.1. Direkt bizonyítás

18.1.1. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges véges halmaz, akkor

$$|A| - |A \setminus B| = |A \cap B|$$

18.1.2. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B két tetszőleges véges nem üres halmaz, akkor

$$|(Ax B) \setminus (Bx A)| = |(Bx A) \setminus (Ax B)|$$

18.1.3. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$(A \rightarrow B) \text{ és } (\neg A \rightarrow \neg B) = A \leftrightarrow B$$

18.1.4. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$(A \rightarrow B) \text{ kizvagy } (B \rightarrow A) = (\neg(A \text{ vagy } B)) \leftrightarrow (A \text{ és } B)$$

18.1.5. Bizonyítsuk be, hogy egy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1 maradékot ad!

18.1.6. Bizonyítsuk be, hogy három egymást követő szám köbének összege osztható 9-cel!

18.1.7. Legyen $(a + b)(b + c) = 0$ és $abc \neq 0$. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőséget!

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a + b + c}$$

18.1.8. Legyen $a + b + c = 0$ és $a^3 + b^3 + c^3 = 0$! Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőséget!

$$a^n + b^n + c^n = 0, \text{ ahol } n > 0 \text{ páratlan szám}$$

18.1.9. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget, ahol x tetszőleges valós szám!

$$1 \leq \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} \leq 3$$

18.1.10. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi egyenletnek mindig van pozitív egész megoldása!

$$x^2 - y^2 = p^2, \text{ ahol } p > 2 \text{ egész szám}$$

18.1.11. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$12 < (\log_2 7)^2 + 36(\log_7 2)^2 < 13$$

18.1.12. Bizonyítsuk be, hogy bármely valós x esetén igaz a következő egyenlőtlenség!

$$x^2 \log_a 4b + 2x \log_a \frac{2}{b} + \log_a \left(\frac{b}{2}\right)^2 > 0, \text{ ahol } a > 1 \text{ és } b > 2$$

18.1.13. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2k+1)$, ahol k egész szám!

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan 2\alpha + \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

18.1.14. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget tetszőleges α esetén!

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 1 - \sin 2\alpha$$

18.1.15. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszögben van olyan oldal, amely nem nagyobb a másik két oldal számtani közepénél!

18.1.16. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex sokszög külső szögeinek összege nem függ a sokszög oldalszámától!

18.1.17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy téglatest egy csúcsba futó éleinek aránya 2:5:14, akkor a testátló és az élek hosszának aránya racionális szám.

18.1.18. Bizonyítsuk be, hogy az n oldalú ferde hasábian az oldallapok lapszögeinek összege:

$$(n-2) \cdot 180^\circ$$

18.1.19. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

18.1.20. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \cdots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$$

18.2. Indirekt bizonyítás

Bizonyítsuk be az alábbi számokról, hogy irracionálisak!

18.2.1. A $\sqrt{2}$ irracionális szám.

18.2.2. A $\sqrt{3}$ irracionális szám.

18.2.3. A $\sqrt{5}$ irracionális szám.

18.2.4. A $\sqrt{6}$ irracionális szám.

18.2.5. A $\sqrt{17}$ irracionális szám.

18.2.6. A $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ irracionális szám.

18.2.7. A $\sqrt{a}$ irracionális szám, ahol $a > 0$ egész és nem négyzetszám.

18.2.8. A $\sqrt[3]{72}$ irracionális szám.

18.2.9. A $\sqrt[6]{2}$ irracionális szám.

18.2.10. Az $\sqrt[5]{4}$ irracionális szám.

18.2.11. A $\sqrt[10]{10}$ irracionális szám.

18.2.12. Az $\sqrt[7]{200}$ irracionális szám.

18.2.13. A $\sqrt[k]{a}$ irracionális szám, ahol az a nem k -adik hatványa egy természetes számnak.

18.2.14. A $\log_2 5$ irracionális szám.

18.2.15. Az $\log_5 10$ irracionális szám.

18.2.16. A $\log 15$ irracionális szám.

18.2.17. A $\log(2^m \cdot 5^n)$ irracionális szám, ha m és n különböző nem negatív egész számok.

18.2.18. A $\tan 5^\circ$ irracionális szám.

18.2.19. A $\sin 15^\circ$ irracionális szám.

18.2.20. Bizonyítsuk be, hogy az $\log_n(n+1)$ irracionális szám, minden n pozitív egész számra!

18.2.21. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész szám esetén a $\log n$ és $\log(n+1)$ számok közül legalább az egyik irracionális.

18.2.22. Bizonyítsuk be a következő állításokat!

Minden irracionális szám tizedes tört alakjában legalább egy számjegy végtelen sokszor szerepel.

Minden irracionális szám tizedes tört alakjában legalább két számjegy végtelen sokszor szerepel.

18.2.23. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok prímszám létezik.

18.3. Teljes indukciós bizonyítás

18.3.1. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 3 osztója a $n^3 + 2n$ számnak.

18.3.2. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 4 osztója az $n^4 - 2n^3 + n^2$ kifejezésnek.

18.3.3. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

Az 5 osztója a $2^{4n+1} + 3$ kifejezésnek.

18.3.4. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 6 osztója az $n^3 + 5n$ kifejezésnek.

18.3.5. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 7 osztója a $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ kifejezésnek.

18.3.6. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 8 osztója az $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ kifejezésnek.

18.3.7. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 9 osztója az $7^n + 3n - 1$ kifejezésnek.

18.3.8. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 11 osztója a $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ kifejezésnek.

18.3.9. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 13 osztója a $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ kifejezésnek.

18.3.10. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

16 osztója a $3^{2n+2} + 8n - 9$ kifejezésnek.

18.3.11. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 17 osztója a $7^{2n} + 2^{5n+4}$ kifejezésnek.

18.3.12. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 18 osztója a $2^{2n} + 24n - 10$ kifejezésnek.

18.3.13. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 19 osztója az $5^{2n-1} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 2^{2n-1}$ kifejezésnek.

18.3.14. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 21 osztója az $5^{2n+1} + 4^{n+2}$ kifejezésnek.

18.3.15. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 23 osztója a $2^{7n+3} + 3^{2n+1} \cdot 5^{4n+1}$ kifejezésnek.

18.3.16. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 27 osztója a $10^n + 18n - 1$ kifejezésnek.

18.3.17. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 57 osztója a $7^{n+2} + 7^{n+1} + 7^n$ kifejezésnek.

18.3.18. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 64 osztója a $3^{2n+2} - 8n - 9$ kifejezésnek.

18.3.19. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 81 osztója a $10^n \cdot (9n - 1) + 1$ kifejezésnek.

18.3.20. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 99 osztója a $3^{n+3} \cdot 2^{2n+2} - 108$ kifejezésnek.

18.3.21. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 120 osztója az $n^5 - 5n^3 + 4n$ kifejezésnek.

18.3.22. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 133 osztója a $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ kifejezésnek.

18.3.23. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 144 osztója a $n \cdot 13^{n+1} - (n + 1) \cdot 13^n + 1$ kifejezésnek.

18.3.24. Bizonyítsuk be a következő oszthatóságot!

A 2^n osztója az $(n + 1)(n + 2) \cdot \dots \cdot (2n)$ kifejezésnek.

18.3.25. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

18.3.26. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

18.3.27. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

18.3.28. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

18.3.29. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$$

18.3.30. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = \frac{n(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{4}$$

18.3.31. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \dots + n \cdot (3n + 1) = n \cdot (n + 1)^2$$

18.3.32. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$(1 + 1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$$

18.3.33. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \dots - \frac{n - 1}{n!} = \frac{1}{n!}$$

18.3.34. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

18.3.35. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

18.3.36. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} = \frac{n}{n + 1}$$

18.3.37. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

18.3.38. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

18.3.39. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

18.3.40. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)}$$

18.3.41. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

18.3.42. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

18.3.43. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$(2+1)(2^2+1) \cdots (2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$$

18.3.44. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\frac{1 \cdot 2!}{2} + \frac{2 \cdot 3!}{2^2} + \cdots + \frac{n \cdot (n+1)!}{2^n} = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$$

18.3.45. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget, (ha $n > 1$)!

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

18.3.46. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}, \text{ ahol } n > 1$$

18.3.47. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \text{ ahol } n > 1.$$

18.3.48. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} > 1$$

18.3.49. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < n$$

18.3.50. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} < 4^{n-1}, \text{ ahol } n > 4.$$

18.3.51. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$2^n > n^2, \text{ ahol } n > 4 \text{ és } n \text{ egész.}$$

18.3.52. Bizonyítsuk be a következő egyenlőtlenséget!

$$3^n > n^3, \text{ ahol } n > 3 \text{ és } n \text{ egész.}$$

18.3.53. Bizonyítsuk be, hogy n darab egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2+n+2}{2}$ részre osztja!

18.3.54. Bizonyítsuk be, hogy n darab kör a síkot legfeljebb $n^2 - n + 2$ részre osztja!

18.3.55. Legyen $a + b = 2$ és $a^2 + b^2 = 4$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^n + b^n = 2^n, \text{ ahol } n > 2 \text{ egész szám.}$$

18.3.56. Tegyük fel, hogy $a + \frac{1}{a}$ egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $a^n + \frac{1}{a^n}$ is egész, ahol n pozitív egész!

18.3.57. Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget!

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \cdot \sin x}, \text{ ahol } \sin x \neq 0 \text{ és } n \text{ természetes szám.}$$

18.3.58. Egy sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 1$, és $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n = 2^n - 1.$$

18.3.59. Egy sorozatra teljesülnek az alábbiak:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3} \text{ és } a_{n+2} = \frac{a_n \cdot a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}}$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}$$

18.3.60. Egy sorozatra teljesül, hogy $a_1 = 2$, és $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_n = 3^{n-1} + 1.$$

18.3.61. Hol a hiba az alábbi bizonyításban?

Állítás: Minden fiúnak ugyanolyan színű a szeme.

Bizonyítás: Teljes indukcióval. A fiúk száma legyen n . Az $n = 1$ esetre nyilván igaz. Már csak az $n - r$ ől, $(n + 1) - re$ való átmenetet kell igazolni. Beszéljük meg a 3-ról 4-re történő lépést, az általános eset ehhez hasonló. Legyen a négy fiú K, L, M, N. Állítólag K, L és M ($n = 3$) szeme színe ugyanolyan. Az L, M és N szeme szintén ugyanolyan, ($n = 3$) miatt. Tehát mind a négy fiúnak ugyanolyan színű a szeme.

18.3.62. Hol a hiba az alábbi bizonyításban?

Állítás:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$, ez igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} = \frac{3}{2} - \frac{1}{k}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(k-1) \cdot k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{k} + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.63. Hol a hiba az alábbi bizonyításban?

Állítás: Bármely pozitív n természetes számra igaz, hogy $a^{n-1} = 1$, ahol $a > 0$ tetszőleges szám.

Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$, ez igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$a^{k-1} = 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$a^{(k+1)-1} = a^k = \frac{a^{k-1} \cdot a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.64. Hol a hiba az alábbi bizonyításban?

Állítás: A 3 osztója a $2^n + 3^n + 5^n$ kifejezésnek, ahol n természetes szám.

Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Az állítás $n = 0$ esetén igaz, mert $2^0 + 3^0 + 5^0 = 1 + 1 + 1 = 3$, ami osztható 3-mal.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

A 3 osztója a $2^k + 3^k + 5^k$ kifejezésnek, ahol k természetes szám.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 3 osztója a $2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1}$ kifejezésnek, ahol k természetes szám.

Alkalmazzuk a következő átalakításokat:

$$2^{k+1} + 3^{k+1} + 5^{k+1} = 2 \cdot 2^k + 3 \cdot 3^k + 5 \cdot 5^k = 2 \cdot (2^k + 3^k + 5^k) + 3^k + 3 \cdot 5^k$$

Az indukciós feltevés miatt $2^k + 3^k + 5^k$ osztható 3-mal (így ennek 2-szerese is), míg 3^k és $3 \cdot 5^k$ többszörösei 3-nak, így ezek is oszthatók 3-mal, s ezért a három tag összege is osztható 3-mal. Ezzel az állítást beláttuk.