Megoldások

Tartalomjegyzék

2. Halmazok 5
2.1. Halmazműveletek 5
2.2. Halmazok számossága, logikai-szita 8
2.3. Vegyes feladatok 10
3. Logika 13
3.1. Szöveges feladatok 13
3.2. Igaz-Hamis. 17
3.3. Állítások megfordítása, illetve állítások tagadása 21
3.4. Logikai műveletek 23
3.5. Vegyes feladatok 30
4. Statisztika 38
4.1. Statisztikai jellemzők 38
4.2. Diagrammok 42
5. Számelmélet 45
5.1. Oszthatóság 45
5.2. Prímszámok, összetett számok 61
5.3. Vegyes feladatok 81
6. Algebra 93
6.1. Hatványozás, nevezetes azonosságok 93
6.2. Szorzattá alakítás 96
6.3. Polinomok, algebrai törtek 98
6.4. Gyökvonás 102
6.5. Logaritmus azonosságok 109
6.6. Vegyes feladatok 114
7. Első-és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek 119
7.1. Elsőfokú egyenletek 119
7.2. Másodfokú egyenletek 122
7.3. Paraméteres egyenletek 126
7.4. Abszolutértékes egyenletek 136
7.5. Irracionális egyenletek 144
7.6. Egyenlőtlenségek 153

7.7. Egyenletrendszerek 166
7.8. Szöveges feladatok 175
7.9. Vegyes feladatok 179
8. 8. Exponenciális és logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek 197
8.1. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek 197
8.2. Logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek 207
8.3. Egyenletrendszerek 220
8.4. Vegyes feladatok 230
9. Függvények 241
9.1. Elemi függvények 241
9.2. Irracionális és magasabb fokú függvények 249
9.3. Exponenciális és logaritmus függvények 253
9.4. Trigonometrikus függvények 259
9.5. Összetett függvények, inverz függvények 267
9.6. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása 272
9.7. Függvények jellemzése 293
9.8. Függvények határértéke 296
9.9. Teljes függvényvizsgálat 304
9.10. Vegyes feladatok 326
10. Koordinátageometria 356
10.1. Vektorok, osztópontok 356
10.2. Egyenesek 363
10.3. Körök 368
10.4. Parabolák 375
10.5. Tartományok 378
11. Trigonometria 380
11.1. Szögfüggvények derékszögű háromszögben, szinusz-és koszinusz tétel 380
11.2. Addíciós-tételek alkalmazása 386
11.3. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek 396
11.4. Vegyes feladatok 443
12. Síkgeometria 455
12.1. Háromszögek 455
12.2. Négyszögek 459
12.3. Sokszögek 463

12.4. Kör ... 463
12.5. Hasonlóság ... 467
12.6. Vegyes feladatok ... 470
13. Térgeometria ... 472
13.1. Hasábok, hengerek ... 472
13.2. Gúlák, kúpok ... 477
13.3. Csonkagúla, csonkakúp ... 480
13.4. Egymásba írt testek, gömbök ... 483
14. Sorozatok ... 486
14.1. Számsorozatok, rekurzív sorozatok ... 486
14.2. Számtani és mértani sorozatok ... 487
14.3. Kamatos kamat, hiteltörlesztés, járadékszámítás ... 494
14.4. Vegyes feladatok ... 497
15. Kombinatorika ... 501
15.1. Permutációk, variációk ... 501
15.2. Kombinációk ... 503
15.3. Binomiális-tétel, Pascal-háromszög ... 506
15.4. Skatulya-elv ... 507
15.5. Gráfok ... 508
15.6. Vegyes feladatok ... 510
16. Valószínűségszámítás ... 516
16.1. Klasszikus modell ... 516
16.2. Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül ... 521
16.3. Geometriai valószínűség ... 525
16.4. Feltételes valószínűség ... 535
16.5. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték ... 538
16.6. Vegyes feladatok ... 540
17. Analízis ... 543
17.1. Sorozatok tulajdonságai, mértani sor ... 543
17.2. Függvények határértéke ... 548
17.3. Függvények deriválása, a derivált függvény alkalmazásai ... 548
17.4. Integrálás, és alkalmazásai ... 553
18. Bizonyítási módszerek ... 556
18.1. Direkt bizonyítás ... 556

18.2. Indirekt bizonyítás 562
18.3. Teljes indukciós bizonyítás 569

2. Halmazok

2.1. Halmazműveletek

2.1.1. Ha 1023 valódi részhalmaza van, akkor a részhalmazok száma összesen 1024, ami kettőnek 10-ik hatványa, így a keresett halmaz 10 elemű.

2.1.2. H={1,2,3,4,6,12}, tehát |H|=6, így a részhalmazainak száma 64.

2.1.3.

a) [-4,4[$\cap \overline{Z^-}$ = {0,1,2,3}. Így 16 db részhalmaza van, ezek: ∅, {0}, {1}, {2}, {3},{0,1}, {0,2}, {0,3}, {1,2}, {1,3},{2,3}, {0,1,2}, {0,1,3}, {0,2,3}, {1,2,3}, {0,1,2,3}.

b) ({ $\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}$ }\Q*)∪{π}={1,2,π }. Részhalmazai: ∅, {1}, {2}, {π},{1,2}, {1,π}, {2,π}, {1,2,π}

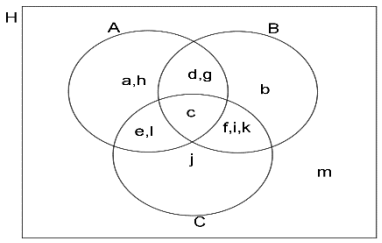
2.1.4. a) R

b) Mivel a jobb oldalon lévő $\left(Z \cap Q^x\right)$ üres halmaz, így a bal oldalon lévő halmazzal való metszete is üres halmaz

2.1.5. a) Q

b) Z

2.1.6.



a) $\overline{\overline{(A \setminus B)} \cap \overline{(C \cup B)}} = \overline{\overline{\{a,h,e,l\}} \cap \overline{(b,c,d,f,g,i,j,k,l)}} =$

$\overline{\{b,c,d,f,g,h,i,j,k,m\} \cap \{a,h,m\}} = \overline{\{a\}} =$

$\{b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m\}$

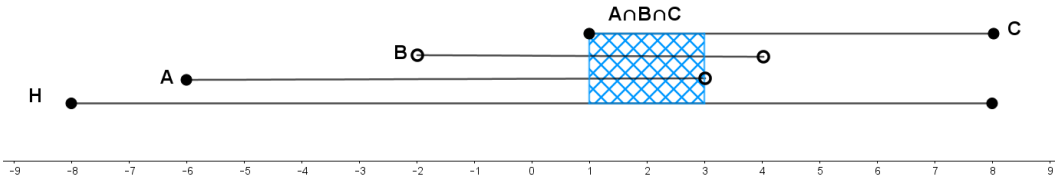
b) $(A \cup C) \setminus \left[\left(A \cup \overline{B}\right) \setminus \left(B \cap \overline{C}\right)\right] = \{a,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\} \setminus$

$\left[\{a,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m\} \setminus \{b,d,g\}\right] = \{a,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l\} \setminus \{a,c,e,f,h,i,j,k,l,m\} =$

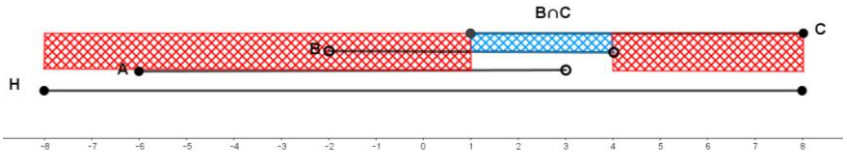
$\{d,g\}$

2.1.7. a) {9,10} b) {7,8}

2.1.8. a) Az ábrából látható, hogy a három halmaz metszete az [1,3[intervallum (kék mintázattal), ennek komplementere [-8,1[∪[3,8].



b) Az ábrán látható kékkel a B és C halmazok metszete [1,4[, pirossal pedig ennek komplementere: [-8,1[∪ [4,8]. Az A és C uniójának komplementere pedig [-8,6[.



Ezen halmazok különbsége a b) rész megoldása : [6,1[∪ [4,8].

2.1.9. Az előzőhöz hasonlóan

a) [3,8[

b)]-5,-1]

2.1.10. a) A={2,4,5,7,8,9}, B={1,7,9}, C={2,3,6,7,8}.

b) $\overline{(A\cap B)\cup(A\cap C)}\cup(B\cap C)$={1,3,4,5,6}

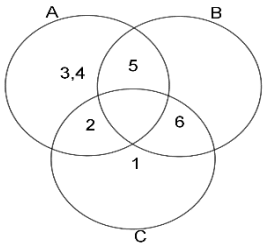
2.1.11. A∩C=[1,3[, A\C=]-1,1[, B∩C=]2,3], C∪D=[0,3]. A D intervallum részhalmaza az A intervallumnak. A B és a D diszjunkt, metszetük üres halmaz.

2.1.12. Mindkét egyenlőtlenség teljesül:]-3,2], csak az első teljesül:]2,∞[, csak a második teljesül]-∞,-3], valamelyik teljesül: valós számok halmaza.

2.1.13. Az (i) feltétel értelmében nem lehet olyan elem, ami csak P és R-ben van. A szóban forgó 5 elem a három halmaz metszetének számossága. Az (i) és (vi) miatt a csak Q és R-ben lévő elemek száma 3. A (iii)-t figyelembe véve csak R-ben 4 db elem lesz. (P∩Q)\(Q∩R) az a halmaz, ami csak P és Q ban van. P\(Q∪R) pedig a csak a P-ben lévő elemeket jelent. Ezek száma a (iv) értelmében kétszerese az előzőnek, így ha a csak P és Q ban lévő elemek számát x-el jelöljük, akkor a csak P-ben lévő elemek száma: 2x. Az (ii) miatt ekkor a csak Q-ban lévő elemek száma 2x+7 kell hogy legyen. Az (v) feltétel miatt ekkor 2·2x=2x+10. Ebből x=5. Tehát a P halmazban 20, a Q-ban 30, az R halmazban 12 elem van. A három halmaz uniójában pedig 44 elem van.

2.1.14. B∩C = ∅ illetve B∪C = A.

2.1.15. A feladat feltételei: (1)A∩B={5}, (2)A\C={3,4,5}, (3)C\B={1,2}, (4)C∩ (A∪B)={2,6} (1) és (2) alapján az 5 elem A-nak és B-nek, de C-nek nem, minta hogy a 3,4-es is. Mivel A,B-nek az 5-ön kívül nem lehet több közös eleme, ezek csak az A-ban vannak. (3) miatt az 1 és 2-es C-nek eleme, de B-nek nem, így a 4-es miatt az 1 csak C-ben lehet, a 2-es pedig A-ban is ott kell, hogy legyen. A 6-osnak C-ben ott kell lennie, de ha nem lenne a B-ben is, akkor szerepelnie kellene a (3) miatt a C\B-ben, de ott nincs. Tehát a 3 halmaz elemei:



A={2,3,4,5}, B={5,6}, C={1,2,6}

2.1.16. Az előző feladathoz hasonlóan az A={2,7,9,10,11}. A B halmazra viszont több megoldás is lehetséges, így C-re is. A B halmaz biztos elemei 2,3,4, a 6-os és 8-as elhelyezkedése 4 féleképpen lehetséges. Így a megoldások:

	B halmaz	**C halmaz**
1.	{2,3,4,11}	{1,3,4,5,6,8,9,10,11}
2.	{2,3,4,6,11}	{1,3,4,5,8,9,10,11}
3.	{2,3,4,8,11}	{1,3,4,5,6,9,10,11}
4.	{2,3,4,6,8,11}	{1,3,4,5,9,10,11}

2.1.17. A={1,2,3,8,9,10}, B={1,2,3,6,7}, C={1, 3,4,5,6,8}

2.1.18.

a) A feladat feltételei alapján a B halmaznak biztos eleme csak az 1,5,7. A negyedik eleme a 2 vagy 7. Így a B={1,2,5,10} vagy B={1,5,7,10}

b) A feltételek alapján 6 lehetséges megoldás van, ezek:

	A halmaz	**B halmaz**	**C halmaz**
1.	{7,8,9,10}	{1,2,5,10}	{2,3,7,10}
2.	{3,7,9,10}	{1,2,5,10}	{2,7,8,10}
3.	{3,7,8,10}	{1,2,5,10}	{2,7,9,10}
4.	{2,8,9,10}	{1,5,7,10}	{2,3,7,10}
5.	{2,3,9,10}	{1,5,7,10}	{2,7,8,10}
6.	{2,3,8,10}	{1,5,7,10}	{2,7,9,10}

2.1.19. A={1,2,4,5,6,7,8}, B={1,2,3,5,6,7}, C={3,5,6,7,8,10}

2.1.20. A={1,2,4 }, B={2,3,5 }

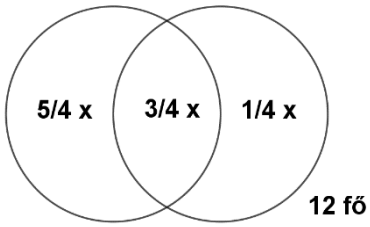
2.1.21. A={1,2,4, 6,8,9}, B={1,2,3,5,9,10,11}, C={1,3,4,7,11}

2.1.22. a)[(A∩B)∪(A∩C)∪(C∩B)]\(A∩B∩C) b) [C\(A∪B)]∪[(A∩B)\C]

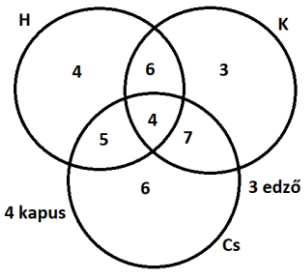
2.1.23. a) (A∪B∪C)\[(A∩B)∪(A∩C)∪(C∩B)] b) [C\(A∪B)]∪(A∩B∩C)

2.2. Halmazok számossága, logikai-szita

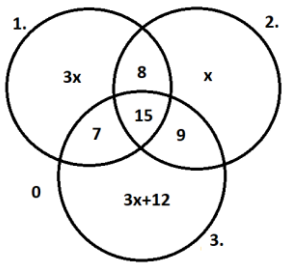
2.2.1. 10% = 12 fő, ők nem tanulnak angolul és németül sem. Mivel a németet tanulók háromnegyede mindkét nyelvet tanulja, ha x-el jelöljük a tagok számát, akkor 1/4x tanul csak németet, 3/4x mindkét nyelvet. Mivel angolra kétszer annyian járnak, a tagok száma 2x. Ebből 3/4x már be van írva a metszetbe, így aki csak angolra jár, 5/4x. Így akkor 120 = 9/4x+12, ebből x = 48, ennyien járnak német nyelvre. Angol nyelvet 96-an tanulnak.



2.2.2. A taktikai értekezleten a részt vett a 3 edző és a 4 kapus is. A metszetekből kiindulva beírhatjuk a halmazábrába a megfelelő számokat a következőképpen: 4 fő van a három halmaz metszetében, 10-4=6-an játszottak már hátvédet és középpályás, de csatárt nem, 9-4=5-en hátvédet és csatárt, így 4 fő volt, aki csak hátvédet játszott. A gondolatmenetet folytatva beírhatjuk a többi számot is. Ezután összeadjuk a kapott számokat, így 42 fő vett részt a taktikai értekezleten.



2.2.3. Legyen a csak a második kiránduláson részt vettek száma x. Ekkor a csak első kiránduláson részt vettek száma 3x. Mivel ők 12-en kevesebben voltak a csak harmadik kiránduláson részt vettek számával, ez utóbbiak száma 3x +12. A megfelelő halmazábra kitöltése után a 121 = 3x + 8 + 15 + 7 + x + 9 +3x + 12 egyenletet kell megoldani. Ebből x = 10. Így az első kiránduláson 60, a másodikon 42, míg a harmadikon 73 fő vett részt.



2.2.4. Az előző feladat alapján megoldandó a 30 = 9+ x +1 + 2 + 3 + 1 + x + 4 + 2x + 2 egyenlet. Ebből x = 2. Így fizika szakkörre jár 9, a kémiára 11, matematikára 14.

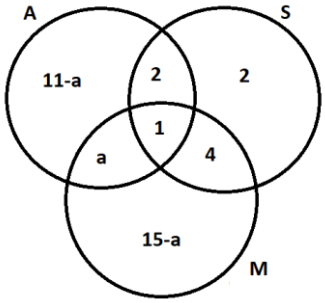
2.2.5. Jelöljük x-el a három halmaz közös részét, $x \in Z^+$. A logikai szita formula alapján:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |C \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$30 = 14 + 15 + 5 - (6 + 3x) + x = 28 - 2x$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok körében, így a feladatnak nincs megoldása

2.2.6. Mindhárom városba 9 fő jelentkezik. Bécsre összesen 47, Pozsonyra 18, Prágára 31 fő.

2.2.7. Az akcióhősös filmek halmazát jelöljük A-val, a sportautós filmekét S-el, a meseszereplőseket pedig M-el. Ekkor a halmazábrába beírva az adatokat, kihasználva, hogy összesen 30 film van: 30 = 14 + 6 + 15-a. Ebből a = 5. Tehát 4 olyan kedvenc filmje van Péternek, amelyekben meseszereplők vannak, de akcióhősök és sportautók nem.

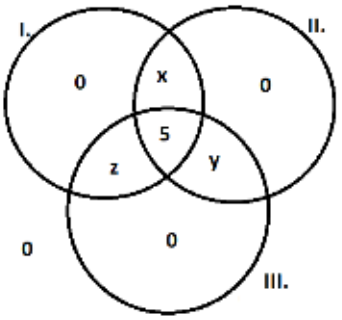


2.2.8.

a) 5

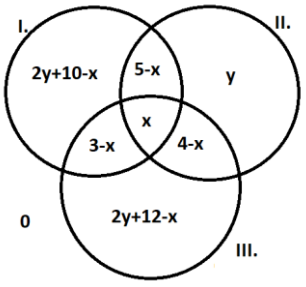
b) 4

2.2.9. A megfelelő halmazábra elkészítése után a brigád dolgozóinak 1%-a felírható a megadott adatok alapján $\frac{x+z+5}{67.5} = \frac{x+y+5}{70} = \frac{z+y+5}{75}$ alakban, amiből három egyenlet is felállítható. Ennek az egyenletrendszernek a megoldásai x = 10, y = 13, és z = 12. Így a brigádnak 40 dolgozója van. Az első kiránduláson 27, a másodikon 28, a harmadikon 30 dolgozó vett részt.



2.2.10. 20 diák van a csoportban, 8 olyan közülük, aki részt vett az első vagy harmadik versenyen, de a másodikon nem.

2.2.11. A mindhárom alkalommal prémiumot kapók száma legyen x, a csak a második alkalommal pedig y. Ekkor a második alkalommal prémiumot kapók száma y + 5-x + x + 4–x = y + 9 –x. Így az első alkalomhoz 2y+18-2x dolgozó tartozik, de a csak második alkalomhoz 2y+18-2x-(5-x+x+3-x) = 2y+10-x. A csak harmadik alkalomhoz (amikor eggyel voltak többen, mint a második alkalom esetén) pedig 2y+19-2x-(4-x+x+3-x) = 2y+12-x. Mivel a részleg dolgozóinak a száma 26, 2y+18-2x + y + 4-x + 2y+12-x = 26. Azaz 5y-4x+34=26, vagyis 5y = 4x – 8. Ebből az is



következik, hogy x legalább kettő, egyébként y negatív lenne. Mivel azok, akik pedig az első és harmadik alkalommal kaptak prémiumot, de a második alkalommal nem, 3 – x –en voltak következik, hogy x legfeljebb 3 lehet. Tehát x csak 2 vagy 3 lehet. Ha x = 3, akkor y=4/5, ami nem lehetséges, ha x = 2, akkor y = 0, és ez a megoldás, mert ebben az esetben az I. alkalommal 14 fő, a másodikon 7 fő, a harmadikon pedig 15 fő kap juttatást, ami eleget tesz a feladat feltételeinek.

2.2.12. Az előző feladathoz hasonlóan dolgozhatunk, a tangó és palotásban 4-en vesznek részt, tehát ha x –el jelöljük a mindhárom táncban szereplőket, akkor x legfeljebb 4. Ha y-al jelöljük a csak a keringősök létszámát, akkor a számosságok felírása után 5y = 4x – 2 egyenletet kapjuk, amiből következik, hogy x legalább egy. Tehát x lehetséges értékei 1,2,3,4, amiből csak az x = 3 esetén lesz y egész szám. Így mindhárom táncban három fő vesz részt.

2.2.13. 12 fő használja mindhárom eszközt.

2.2.14. Moziba és színházba 7, moziba és koncertre 5 fő jár.

2.2.15. 9 fő rendelkezik mindhárom végzettséggel, illetve 3 fő nem rendelkezik egyikkel sem.

2.3. Vegyes feladatok

2.3.1. $x^2=4x-3$ egyenlet megoldásai $x_1=1$, $x_2=3$. A másodfokú egyenlet gyöktényezős alakja alapján az előbbi egyenlet felírható $(x-1)(x-3)=0$ alakban is. Ezt ha x-1-el, illetve x-3-al bővítjük, a megoldáshalmaz nem változik, de az egyenlet harmadfokú lesz. Két ilyen harmadfokú egyenlet van, (1) $(x-1)^2(x-3)=0$, illetve (2) $(x-1)(x-3)^2=0$. Az előbbi ekvivalens a $x^3-5x^2-5x-3=0$, az utóbbi $x^3-7x^2+15x-9=0$ harmadfokú egyenlettel.

2.3.2. Az előző feladat alapján a keresett harmadfokú egyenletek $x^3+11x^2+24x-36=0$ illetve $x^3+4x^2-11x+6=0$

2.3.3. $4^{\sin x} \geq 2^{\lg 10^{\sqrt{2}}}$ egyenlőtlenség átalakítva $2^{2\sin x} \geq 2^{\sqrt{2}}$, innen az exponenciális függvény szigorú monoton növekedése miatt $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ egyenlőtlenséghez jutunk, aminek a megoldása az U halmazon [π/4, 3π/4], ez az intervallum lesz az A halmaz. A B halmaz hasonlóképpen $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ megoldása [2π/3, 4π/3]. $A \cap B = [2\pi/3, 3\pi/4]$, $A \setminus B = [\pi/4, 2\pi/3[$, $\overline{A \cup B} = [0, \pi/4[\cup]4\pi/3, 2\pi]$

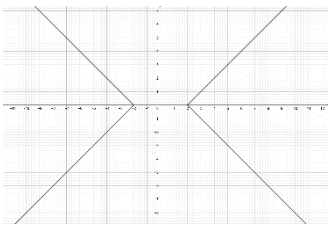
2.3.4. A=[π/4, π/2[, B=]π/3, π[, $A \cup B = [\pi/4, \pi[$, $\overline{B \setminus A} = [0, \pi/2[\cup\{\pi\}$

2.3.5. Az A halmazhoz tartozó egyenlőtlenség megoldása a]-1,5[lenne, de az értelmezési tartomány miatt A=]-1,1] ∪ [3,5[. A B halmazhoz tartozó egyenlőtlenség megoldása a [1.5, ∞[lenne, de az értelmezési tartomány miatt B=]3,∞[\{4}. Így $A \cup B =]-1,1] \cup [3,\infty[$, $A \cap B =]3,5[\setminus \{4\}$, $A \setminus B =]-1,1] \cup \{3,4\}$, $\overline{A} =]-\infty,-1] \cup]1,3[\cup [5,\infty[$

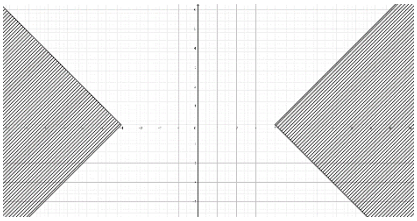
2.3.6. $A \cup B =]-\infty,-3] \cup [2,4]$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = [2,4]$, $\overline{A} =]-\infty,2[\cup]4,\infty[$

2.3.7. $A \cup B = [-1,3]$ $A \cap B, = [1,2[$ $A \setminus B = [-1,1[$ $\overline{A} =]-\infty,-1[\cup [2,\infty[$

2.3.8. Az első síknegyedben (x>0,y>0) x-y=2, azaz y=x-2. A második síknegyedben (x<0,y>0) -x-y=2, azaz y=-x-2. A harmadik síknegyedben (x<0,y<0) –x+y=2, azaz y=x+2. A negyedik síknegyedben (x>0,y<0) x+y=2, azaz y=2-x.

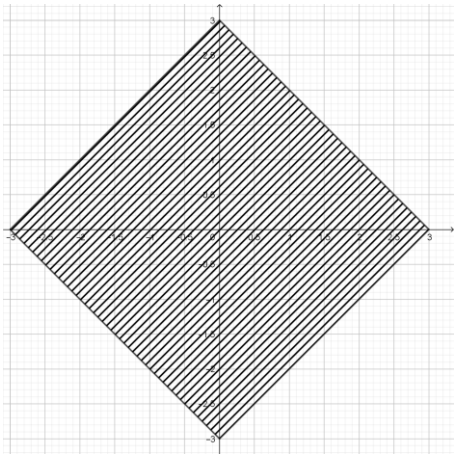


2.3.9. |x|-|y|≤4, Az első síknegyedben (x>0,y>0) x-y≥4, azaz y≤x-4. A második síknegyedben (x<0,y>0) -x-y≥4, azaz

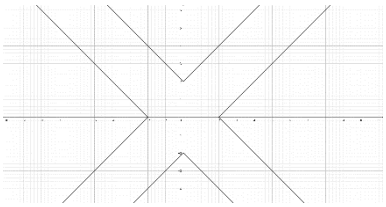


2.3.10. y≤-x-4. A harmadik síknegyedben (x<0,y<0) –x+y≥4, azaz y≥x+4. A negyedik síknegyedben (x>0,y<0) x+y≥4, azaz y≥4-x.

2.3.11. Az előző feladathoz hasonlóan:



2.3.12. Az előző feladatok alapján egyértelműen megállapítható a szimmetria a koordinátatengelyekre, illetve az origóra. Így elegendő az első síknegyedben vizsgálni. Ha x,y>0, akkor |x-y|=2. Ez jelenti az x-y=2, azaz y=x-2, illetve y-x=2, azaz y=x+2 félegyeneseket. Ezeket tükrözzük a tengelyekre és megkapjuk a megoldást:



2.3.13. A megadott számokból $2 \cdot 3^7$ db nyolcjegyű szám képezhető. Ezek között van olyan, ami csak 1-est illetve 2-est tartalmaz (2db), illetve csak 1-es és 2-est (2^8 db), 0-s és 1-est (2^7 db), 0-s és 2-est (2^7 db), ezek (512 db) nem tesznek eleget annak a feltételnek, hogy minden számjegy szerepel legalább egyszer. Így a megoldás $2 \cdot 3^7 - 512 = 3862$.

3. Logika

3.1. Szöveges feladatok

3.1.1. A feladatnak két különböző megoldása van.

számjegy	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**0**
darabszám	7	3	2	1	1	1	2	1	1	1
darabszám	11	2	1	1	1	1	1	1	1	1

3.1.2. A mondatok mindegyike mást állít, ezért nem lehet közöttük két igaz állítás. Egy állítás igaz vagy egy sem. Ha nincs igaz állítás, akkor 5 állítás lenne hamis, de ekkor (ellentétben a feltevéssel) az ötödik állítás igaz lenne. Egy lehetőség marad: Az állítások között 1 igaz van és 4 hamis. Tehát a negyedik állítás igaz.

3.1.3. Az első két állítás hamis, a következő három igaz.

3.1.4. A testvéred melyik utat mutatná a királylányhoz? A királyfi mind a két esetben az ellenkező irányba megy. Bármelyiket kérdezi, az a rossz irányt fogja mutatni.

Megjegyzés: (A tagadás tagadása, az igaz állítás.)

3.1.5. *B* mond igazat, *A* és *C* hazudik.

3.1.6. Igen. A játékos az *F- P* feliratú ládából vesz ki egy golyót. Két eset lehetséges:

1. eset: Tegyük fel, hogy a golyó *P*. Ekkor a ládában csak piros-piros lehet. Ebből következik, hogy a *F-F* ládában csakis *F-P* golyók lehetnek, vagyis a *P-P* ládában van a *F-F* golyó.

2. eset: Tegyük fel, hogy a golyó *F*. Ekkor a ládában csak fehér-fehér lehet. Ebből következik, hogy a *P-P* ládában csakis *F-P* golyók lehetnek, vagyis az *F-F* ládában van a *P-P* golyó.

3.1.7. Három egyenlő részre osztjuk az érméket (9-9-9). Kettő halmazt megmérünk, így el tudjuk dönteni, hogy melyikben van a hamis. Ezt az eljárást folytatjuk addig, amig a végén 3 darab marad. A megoldás: $27 = 3^3$, vagyis elég három mérés.

3.1.8. Nem tűnt el a pénz. A kérdés feltevése csalóka. A fogadósnál van 25, a fiúnál 2 és a vendégeknél 3 dollár. Tehát megvan a 30 dollár.

3.1.9. Egyenlő.

3.1.10.

1. Igen, megoldható az alábbi ábra szerint.

1	5	1
5		5
1	5	1

2. Igen, megoldható az alábbi ábra szerint.

3	1	3
1		1
3	1	3

3.1.11. A zebra az olaszé.

3.1.12. Igen. $2 \cdot 4938271605 = 9876543210$

3.1.13. Legyen a juhok száma *x*, a juhász életkora *y*. Ekkor:

$x(x-1) = y(x-2) + 15$, $y = \frac{x^2-x-15}{x-2}$, $y = x + 1 - \frac{13}{x-2}$

Az egyetlen *x*, amelyre $\frac{13}{x-2}$ egész szám és a feladatnak értelme van: $x = 15$. Ezt behelyettesítve az egyenletbe: $y = 15$.

3.1.14. Igen. $29400 = 24 \cdot 25 \cdot 49$. A keresett számok: 24 és 25.

3.1.15. Két megoldás is lehetséges. Az alábbi táblázatokban követhetjük az átöntéseket:

1. megoldás:

	8 literes	**5 literes**	**3 literes**
Kezdeti állapot	8	0	0
1. átöntés után	3	5	0
2. átöntés után	3	2	3
3. átöntés után	6	2	0
4. átöntés után	6	0	2
5. átöntés után	1	5	2
6. átöntés után	1	4	3
7. átöntés után	4	4	0

2. megoldás:

	8 literes	**5 literes**	**3 literes**
Kezdeti állapot	8	0	0
1. átöntés után	5	0	3
2. átöntés után	5	3	0
3. átöntés után	2	3	3
4. átöntés után	2	5	1
5. átöntés után	7	0	1
6. átöntés után	7	1	0
7. átöntés után	4	1	3
8. átöntés után	4	4	0

3.1.16. Két megoldás is lehetséges.

1. megoldás:

	Tele hordó	**Félig töltött hordó**	**Üres hordó**
1. Ember	2	3	2
2. Ember	2	3	2
3. Ember	3	1	3

2. megoldás:

	Tele hordó	**Félig töltött hordó**	**Üres hordó**
1. Ember	3	1	3
2. Ember	3	1	3
3. Ember	1	5	1

3.1.17. A feladatnak négy megoldása van:

$$25 = 1 \cdot 3 + 11 \cdot 2$$

$$25 = 3 \cdot 3 + 8 \cdot 2$$

$$25 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2$$

$$25 = 7 \cdot 3 + 2 \cdot 2$$

3.1.18. Először a kecskét vitte át a másik partra, majd visszament a farkasért. Átvitte a farkast, a kecskét pedig visszahozta. A kecskét otthagyta és a káposztát átvitte a farkashoz. Végül visszafordult és a kecskét is átvitte a túlsó partra.

3.1.19. A feltételek szerint a harmadik ember vásárolta lovak száma fél ló híján féllel több volt, mint azoké, amelyek végül is a ménesgazdánál maradtak, vagyis $5 + \frac{1}{2}$. A harmadik ember tehát 6 lovat vásárolt. Miután a második ember megvásárolta a lovakat, a gazdánál

$6 + 5 = 11$ ló maradt. Azoknak a lovaknak a száma, amelyeket a második ember vásárolt, fél ló híján féllel volt több, mint azoké, amelyek a gazdánál maradtak, vagyis $11 + \frac{1}{2}$.

A második ember tehát 12 lovat vásárolt. A gazdának 23 lova maradt, miután az első ember vásárolt. Az előbbihez hasonlóan kapjuk, hogy az első ember 24 lovat vásárolt.

3.1.20. A gondolt szám 3-mal való osztási maradékát megszorozzuk 70-nel, az 5-tel való maradékot 21-gyel és a 7-tel való maradékot 15-tel. Ezeknek az összegét elosztjuk 105-tel, és a maradék a gondolt szám.

Indoklás: Legyen *A* a gondolt szám, *p, q, r* pedig a 3-mal, 5-tel és 7-tel való osztási maradék. A $(70p + 21q + 15r) - A$ különbség osztható 3-mal, 5-tel és 7-tel is. Ez látható a következő egyenlőségekből:

$$(70p + 21q + 15r) - A = \begin{cases} 3(23p + 7q + 5r) - (A - p) \\ 5(14p + 4q + 3r) - (A - q) \\ 7(10p + 3q + 2r) - (A - r) \end{cases}$$

Ez a különbség tehát osztható a $3 \cdot 5 \cdot 7$ szorzattal, vagyis 105-tel. Mivel *A* kétjegyű szám, igaz rá, hogy $0 \leq A < 105$. Tehát $70p + 21q + 15r$ összeg maradéka 105-tel osztva éppen az *A*.

Megjegyzés: A 3-mal, 5-tel és 7-tel való osztási maradékok helyett másokkal is dolgozhatnánk.

3.2. Igaz-Hamis.

3.2.1. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetriatengelye van.	x	
2. Van olyan síkidom, amelynek végtelen sok szimmetriatengelye van.		x
3. Minden rombusznak két szimmetriatengelye van.	x	
4. Van olyan konkáv négyszög, amelyik tengelyesen szimmetrikus.		x
5. Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.		x

3.2.2. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha egy sokszög tengelyesen szimmetrikus, akkor szabályos.		x
2. Ha egy sokszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus.	x	
3. Van olyan tengelyesen szimmetrikus négyszög, amelynek szimmetria tengelye a négyszögnek pontosan egy csúcsán megy át.		x
4. A szabályos sokszög bármely szimmetria tengelye tartalmazza a sokszög legalább egy csúcsát.		x
5. Minden szabályos sokszögnek van olyan átlója, amelynek egyenese szimmetria tengelye a sokszögnek.		x

3.2.3. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha egy négyszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor rombusz.		x
2. Nincs olyan trapéz, amelyik középpontosan szimmetrikus.		x
3. Van olyan deltoid, amelyik középpontosan szimmetrikus.	x	
4. Minden szabályos sokszög középpontosan szimmetrikus.		x
5. A középpontosan szimmetrikus négyszögek mindegyike konvex.	x	

3.2.4. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Van olyan háromszög, amelyik forgás szimmetrikus.	x	
2. Ha egy síkidom forgás szimmetrikus, akkor végtelen sok olyan szög adható meg, amellyel az alakzat önmagába forgatható.	x	
3. Ha egy sokszög forgás szimmetrikus, akkor szabályos.		x

4. Van olyan szabályos sokszög, amely 30°-oselforgatással önmagába vihető.	x	
5. Ha egy sokszög forgás szimmetrikus, akkor minden szöge egyenlő		x

3.2.5. A megoldás:

Állítások	**Igaz**	**Hamis**
1. Ha az eltolásnak van fixpontja, akkor helybenhagyás.	x	
2. Az eltolásnak nincs invariáns egyenese.		x
3. Van olyan háromszög, amelynek a helybenhagyástól különböző eltolással önmagába vihető át.		x
4. Van olyan alakzat, amelynek a helybenhagyástól különböző eltolással önmagába vihető át.	x	
5. Két tengelyes tükrözés egymás utáni elvégzése egyetlen eltolással helyettesíthető.		x

3.2.6. A megoldás:

Állítások	**Igaz**	**Hamis**
1. A húrnégyszög átlója a négyszöget egy hegyesszögű és agy tompaszögű háromszögre bontja.		x
2. Ha egy trapéz szárai egyenlő hosszúak, akkor húrtrapéz.		x
3. A paralelogrammák közül csak a téglalap húrnégyszög.	x	
4. A rombuszok közül csak a négyzet húrnégyszög.	x	
5. A húrnégyszögben mindig van tompaszög.		x

3.2.7. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Ha két egyenlő szárú háromszögben egy-egy szög megegyezik, akkor a két háromszög, hasonló.		x
2. Ha két téglalapban az átlók ugyanakkora szöget zárnak be, akkor a téglalapok hasonlók.	x	
3. Két rombusz hasonló, ha átlóik aránya megegyezik.	x	
4. Két négyszög hasonló, ha megfelelő szögeik megegyeznek.		x
5. Ha két szabályos sokszögnek ugyanannyi oldala van, akkor a két sokszög hasonló.	x	

3.2.8. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Két szám legnagyobb közös osztója kisebb mindkét számnál.		x
2. Két szám legkisebb közös többszöröse nem kisebb, mint a két szám legnagyobb közös osztója.	x	
3. Két szám legkisebb közös többszörösének osztója, a két szám legnagyobb közös osztója.	x	
4. Ha két szám relatív prím, akkor a legkisebb közös többszörösük a két szám szorzata.	x	
5. Két prímszám összege nem lehet prím.		x

3.2.9. A megoldás:

Állítások	Igaz	Hamis
1. Egy 6 pontot tartalmazó teljes gráfban 15 él van.	x	
2. Ha egy teljes gráfnak páros számú éle van, akkor a pontok száma is páros.		x

3. Ha egy 51 pontú gráfban nincs kör, akkor legfeljebb 50 éle lehet.	x	
4. Nincs olyan 6 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege 11.	x	
5. Ha egy gráfban páratlan darab páratlan fokszámú csúcs van, akkor az egyszeresen bejárható.		x

3.2.10. A megoldás:

Állítások	**Igaz**	**Hamis**
1. Van olyan ötpontú egyszerű gráf, amelynek 11 éle van.		x
2. Ha egy ötpontú egyszerű gráf minden csúcsa legalább harmadfokú, akkor biztosan van negyedfokú csúcsa is.		x
3. Ha egy gráf minden pontjának a fokszáma legalább 2, akkor a gráf biztosan összefüggő.		x
4. Van olyan hatpontú fagráf, amelynek minden csúcsa páratlan fokszámú.	x	
5. Van olyan fagráf, amelyben a csúcsok számának és az élek számának összege páros.		x

3.3. Állítások megfordítása, illetve állítások tagadása

3.3.1. A megoldás:

1. Ha egy szám osztható öttel, akkor nullára végződik. Hamis.

2. Ha egy háromszög minden oldala egyenlő, akkor minden szöge egyenlő. Igaz.

3.3.2. A megoldás:

1. Ha egy négyszög minden szöge derékszög, akkor az téglalap. Hamis.

2. Ha egy négyszög téglalap, akkor átlói felezik egymást. Igaz.

3.3.3. A megoldás:

1. Ha egy háromszögben a két rövidebbik oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. Igaz.

2. Ha nem megyek iskolába, akkor szombat van. Hamis.

3.3.4. A megoldás:

1. Ha két szám szorzata nulla, akkor a két szám közül legalább az egyik nulla. Igaz.

2. Ha egy szám osztható kettővel, akkor osztható néggyel is. Hamis.

3.3.5. A megoldás:

1. Páros szám mindig két páratlan szám összege. Hamis.

2. Ha egy háromszög derékszögű, akkor két szögének az összege 90°. Igaz.

3.3.6. A megoldás:

1. Van olyan szerelem, amelyik nem múlik el.

2. Van olyan lány, aki nem szereti a csokoládét.

3.3.7. A megoldás:

1. Minden fiú szeret focizni.

2. Van olyan szám, ami nem osztható önmagával.

3.3.8. A megoldás:

1. Van olyan tehén, amelyik nem tarka.

2. Minden prímszám páratlan.

3.3.9. A megoldás:

1. Van olyan asszony, aki életének minden pillanatában azt teszi, amit szabad.

2. Van olyan férfi, aki olyanokat mond, amit később nem bán meg.

3.3.10. A megoldás:

1. A 12. C osztályban tanuló diákok nem tanulnak angolt vagy nem tanulnak németet.

2. Az ördög nem veri a feleségét és nem alszik.

3.4. Logikai műveletek

3.4.1. Egyik lehetséges megoldás: $(p \wedge h) \vee p$

3.4.2. Érték táblázattal végezzük a bizonyítást.

p	q	$\neg q$	$p \longrightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
i	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*
i	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*

3.4.3. Az 1. azonosság esetén:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*

A 2. azonosság esetén:

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*

3.4.4. Érték táblázattal végezzük a bizonyítást.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \longrightarrow q$	$\neg(\neg p \longrightarrow q)$
i	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	*h*

3.4.5. Érték táblázattal végezzük a bizonyítást.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$p \leftrightarrow q$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*

3.4.6. Érték táblázattal végezzük a bizonyítást.

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \longrightarrow q$	$\neg(p \longrightarrow q)$
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*
i	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*
h	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*

3.4.7. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*

i	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*

A megoldás: Az 5. sor kivételével minden más esetben igaz az egyenlet.

3.4.8. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \wedge \neg r$
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*i*	*h*	*i*	*h*
i	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*

A megoldás: Az 1. 3. 4. 5. sor kivételével minden más esetben igaz az egyenlet.

3.4.9. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \longrightarrow r$
i	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*i*	*h*

i	h	i	h	i
h	i	i	h	i
i	h	h	h	i
h	i	h	h	i
h	h	i	h	i
h	h	h	h	i

A megoldás: A 2. sor esetén teljesül az egyenlet.

3.4.10. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \longrightarrow \neg r$
i	i	i	h	h	h	i
i	i	h	h	i	h	i
i	h	i	h	h	h	i
h	i	i	i	h	i	h
i	h	h	h	i	h	i
h	i	h	i	i	i	i
h	h	i	i	h	h	i
h	h	h	i	i	h	i

A megoldás: A 4. sor esetén teljesül az egyenlet.

3.4.11. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
i	i	h	h	h	h	i
i	h	h	i	i	h	h

h	i	i	h	h	i	h
h	h	i	i	h	h	i

A megoldás: A 2. és a 3. sor esetén teljesül az egyenlet.

3.4.12. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \vee \neg q$	$p \wedge \neg r$	$(p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge \neg r)$
i	i	i	h	h	i	h	h
i	i	h	h	i	i	i	i
i	h	i	i	h	i	h	h
h	i	i	h	h	h	h	i
i	h	h	i	i	i	i	i
h	i	h	h	i	h	h	i
h	h	i	i	h	i	h	h
h	h	h	i	i	i	h	h

A megoldás: A 2., 4., 5. és a 6. sor esetén teljesül az egyenlet.

3.4.13. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

p	q	r	$\neg p$	$p \wedge i$	$\neg p \wedge h$	$(p \wedge i) \vee (\neg p \wedge h)$	$q \wedge r$	$[(p \wedge i) \vee (\neg p \wedge h)] \leftrightarrow (q \wedge r)$
i	i	i	h	i	h	i	i	i
i	i	h	h	i	h	i	h	h
i	h	i	h	i	h	i	h	h
h	i	i	i	h	h	h	i	h
i	h	h	h	i	h	i	h	h
h	i	h	i	h	h	h	h	i

h	h	i	i	h	h	h	h	i
h	h	h	i	h	h	h	h	i

A megoldás: Az 1. 6. 7. 8. sor kivételével minden más esetben igaz az egyenlet.

3.4.14. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

1.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \wedge q$
i	i	h	i	h
i	h	h	i	h
h	i	i	i	i
h	h	i	h	h

2.

p	$p \wedge i$
i	i
h	h

3.

p	q	$p \vee q \vee i$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

A megoldás: A 2. és a 3. egyenlet azonosság.

3.4.15. Érték táblázattal végezzük a feladat megoldását.

1.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$
i	i	h	h	h	h
i	h	h	i	i	h
h	i	i	h	h	i
h	h	i	i	h	h

2.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \longrightarrow q$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

3.

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \longleftrightarrow q$
i	i	h	h	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	h
h	h	i	h	i

A megoldás: A 2. egyenlet azonosság.

3.4.16. Az implikáció nem kommutatív és nem asszociatív.

3.4.17. A megoldás:

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

3.4.18. A megoldás: Igen, következik.

3.4.19. A megoldás: Nem következik.

3.4.20. A megoldás: Minden esetben igaz.

3.5. Vegyes feladatok

3.5.1. Három egyenlő részre osztjuk az érméket (27-27-27). Kettő halmazt megmérünk, így el tudjuk dönteni, hogy melyikben van a hamis. Ezt az eljárást folytatjuk addig, amig a végén 3 darab marad. A megoldás: $81 = 3^4$, vagyis elég négy mérés.

3.5.2. Az eredmény első számjegyéből ki kell vonni 2-t, a maradék a gondolt nap sorszáma. Indoklás: Valaki a hét x sorszámú napjára gondol $(1 \leq x \leq 7)$. Miután ezt a számot megszorozzuk 2-vel, és az eredményhez 5-öt adunk, akkor $2x + 5$-öt kapunk. Ezt először

5-tel, majd 10-zel szorozzuk:

$$[(2x + 5) \cdot 5] \cdot 10 = 100x + 250 = (2 + x) \cdot 100 + 50$$

Ha $1 \leq x \leq 7$, akkor $3 \leq x + 2 \leq 9$. Ha a $(2 + x)$-ből, vagyis a százasokból elveszünk kettőt, akkor megkapjuk az *x*-et, azaz annak a napnak a sorszámát, amelyre az illető gondolt.

3.5.3. Nem jár jobban. A fizetendő összeg:

$A = 1 + 2 + 4 + \cdots = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{23} = 2^{24} - 1 = 16.777.215$ Ft

3.5.4. A *B* hordó térfogata az *A* térfogatának $\frac{3}{5}$ része. A *C* hordó térfogata az *A* térfogatának $\frac{4}{9}$ része. Tehát a *B* és *C* hordó térfogata együtt $\frac{3}{5} + \frac{4}{9} = \frac{47}{45}$ része az *A* hordóénak. A feladat feltétele szerint az *A* hordó térfogatának $\frac{2}{45}$ része 4 vödör bornak felel meg.

Ebből: $A = 90, B = 90 \cdot \frac{3}{5} = 54, C = 90 \cdot \frac{4}{9} = 40$ vödör bor.

3.5.5. Az első kiöntés után 4 liter víz marad. Minden alkalommal, amikor kiöntünk 1 liter keveréket, a keverékben lévő víz $\frac{1}{5}$ részét öntjük ki. Ezért a második kiöntés után

$4 - \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{16}{5}$ liter víz marad, a harmadik kiöntés után pedig $3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{5} = \frac{59}{25}$ liter víz marad.

3.5.6. Az első kiöntés után 99 liter gyümölcslé marad. Minden alkalommal, amikor 1 liter keveréket kiöntünk, a keverékben lévő gyümölcslé $\frac{1}{100}$ részét öntjük ki. Ezért a második kiöntés után $99 - \frac{1}{100} \cdot 99 = 99 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$ liter gyümölcslé marad, a harmadik öntés után:

$$99\left(1 - \frac{1}{100}\right) - \frac{1}{100} \cdot 99 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right) = 99 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^2$$

Ezt folytatva azt kapjuk, hogy az *n*-edik kiöntés után:

$$99 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{n-1}$$

liter gyümölcslé marad. Tehát ha végül 50 liter gyümölcslé marad a hordóban, akkor teljesülnie kell a következő egyenlőségnek:

$$99 \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{n-1} = 50$$

Ez az egyenlőség az alábbi alakba írható:

$$99^n = 50 \cdot 100^{n-1}$$

Ennek az egyenlőségnek a baloldala bármely *n* pozitív egész számra páratlan, míg a jobb oldala páros. Ez ellentmondás, tehát nem lehet megoldani, hogy 50-50 liter legyen az arány.

3.5.7. Mivel a *C* hordó teletöltése után az *A*-ban $\frac{1}{5}$ rész marad, az *A* hordó térfogata $\frac{5}{4}$-szerese a *C*-nek. Mivel a *D* hordó teletöltése után a *B*-ben $\frac{1}{9}$ rész marad, a *B* hordó térfogata $\frac{9}{8}$-szorosa a *D*-nek. Tudjuk, hogy a *C* és a *D* hordó egyforma, így az *A* és *B* együttes térfogata:

$\frac{5}{4} + \frac{9}{8} = \frac{19}{8}$ szorosa a *C* hordó térfogatának. A feltételekből következik, hogy a *C* hordó térfogatának a $\frac{3}{8}$ része, 9 vödör bor. Ebből a *C* térfogata $9 : \frac{3}{8} = 24$ vödör, vagyis a *D* térfogata is 24 vödör. Az *A* térfogata pedig $\frac{5}{4} \cdot 24 = 30$ vödör, és a *B* hordóé $\frac{9}{8} \cdot 24 = 27$ vödör.

3.5.8. Először két fegyverhordozó evez át a túlsó partra. Ezután az egyik fegyverhordozó visszaviszi a csónakot, majd a harmadik fegyverhordozót átviszi a másik partra. Ezután a három fegyverhordozó közül az egyik visszamegy az első partra és ottmarad a lovagjával. A másik két lovag átmegy a másik partra a fegyverhordozójához. Ezután az egyik lovag a fegyverhordozójával visszafordul, őt otthagyja a parton és az ott lévő lovagot átviszi a másik

partra. Majd a másik parton lévő fegyverhordozó átkel az egyik partra, és magával viszi az egyik fegyverhordozót, végül visszamegy a másik fegyverhordozóért is. Szemléltetve:

$$\begin{cases} ABC \\ abc \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} ABC \\ \cdot\cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cdot\cdot\cdot \\ ab\ \cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} ABC \\ \cdot\cdot\cdot \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cdot\cdot\cdot \\ abc \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot\cdot C \\ \cdot\cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AB\ \cdot \\ ab\ \cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\ bc \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ABC \\ a\ \cdot\cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ABC \\ ab\ \cdot \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ABC \\ abc \end{cases}$$

3.5.9. A megoldás:

Állítások	**Igaz**	**Hamis**
1. Van olyan háromszög, amelynek pontosan két szimmetria tengelye van.		x
2. Van olyan síkidom, amelynek végtelen sok szimmetria tengelye van.	x	
3. Minden rombusznak két szimmetria tengelye van.		x
4. Van olyan konkáv négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus.	x	
5. Ha egy négyszögnek van két egyenlő oldala, akkor tengelyesen szimmetrikus.		x

3.5.10. A megoldás:

Állítások	**Igaz**	**Hamis**
1. Van olyan középpontosan szimmetrikus négyszög, amelyik konkáv.		x
2. Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor átlói egyenlők.		x

3. Ha egy négyszög átlói egyenlők, akkor az középpontosan szimmetrikus.		x
4. A középpontosan szimmetrikus négyszögben van két egyenlő nagyságú szög.	x	
5. Van olyan tengelyesen szimmetrikus sokszög, amelyik középpontosan szimmetrikus.	x	

3.5.11. A megoldás:

Állítások	**Igaz**	**Hamis**
1. Ha egy háromszög forgásszimmetrikus, akkor szabályos.	x	
2. Ha egy sokszög forgásszimmetrikus, akkor középpontosan is szimmetrikus.		x
3. Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor forgásszimmetrikus is.	x	
4. Minden szabályos sokszög forgásszimmetrikus.	x	
5. Van olyan konkáv sokszög, amelyik forgásszimmetrikus.	x	

3.5.12.

1. Ha egy háromszög szabályos, akkor tengelyesen szimmetrikus. Igaz.

2. Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor paralelogramma. Igaz.

3.5.13.

1. Ma este nem megyek moziba és nem olvasok.

2. Van olyan magyar egyetemista, akinek nincs nyelvvizsgája és nincs autója.

3.5.14.

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge q \wedge \neg r$
i	i	i	h	h
i	i	h	i	i

i	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*h*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*i*	*h*

A megoldás: Az 2. sor esetében igaz az egyenlet.

3.5.15.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
i	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*i*	*h*
i	*h*	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*h*	*i*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*h*	*h*	*h*	*h*

A megoldás: Az 1., 3., 4. sor esetében igaz az egyenlet.

3.5.16.

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*

i	*h*	*i*	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	*h*	*i*
h	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*
h	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*
h	*h*	*h*	*h*	*h*	*i*

A megoldás: Az 2. és a 3. sor kivételével minden esetben igaz az egyenlet.

3.5.17.

p	q	r	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \longrightarrow r$
i	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*
i	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*
h	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*

A megoldás: Az 2., 5. és a 8. sor kivételével minden esetben igaz az egyenlet.

3.5.18.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \vee r$
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*

i	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*

A megoldás: A 2., 5. és a 8. sor esetében igaz az egyenlet.

3.5.19.

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \wedge q) \leftrightarrow \neg r$
i	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
i	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	*h*	*i*	*h*
i	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*
h	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*

A megoldás: A 2., 4., 5. és a 8. sor esetében igaz az egyenlet.

3.5.20.

1.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg p \longrightarrow q$
i	*i*	*h*	*i*	*i*

i	h	h	i	i
h	i	i	i	i
h	h	i	h	h

Ez azonosság.

2.

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
i	i	h	h	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	h
h	h	i	h	i

Ez nem azonosság.

4. Statisztika

4.1. Statisztikai jellemzők

4.1.1. Az 5 szám legyen a,b,c,d,e. A 3 középső szám szórása 0, ez csak úgy lehetséges, hogy ezek egyformák. Így ekkor az 5 szám a,c,c,c,e. A medián egyenlő az átlaggal, vagyis $c=\frac{a+3c+e}{5}$. Ezt rendezve $2c=a+e$, $c=\frac{a+e}{2}=60$. Ebből $a=120-e$. A mértani közép alapján $36=\sqrt{a\cdot e}=\sqrt{(120-e)\cdot e}$. Ebből $a=12; e=108$. (Fordítva is lehetséges, de a megoldás szempontjából nincs jelentősége). Így az 5 szám: 12, 60, 60, 60, 108. Szórásuk $\sigma=\sqrt{\frac{(60-12)^2+3(60-60)^2+(108-60)^2}{5}}\approx 30.36$

4.1.2. A terjedelem és a mértani közép alapján a legkisebb 3, a legnagyobb 12. Mivel módusza és mediánja is hat, ez csak úgy lehetséges, hogy a két középső a 6-os. Az átlagból következik, hogy a számok összege 38. Tehát a maradék két szám összege 11. Így a lehetséges megoldások: I.: 3,3,6,6,8,12, II.: 3,4,6,6,7,12, III.: 3,5,6,6,6,12

4.1.3. Az 5 jegy összege 16. Legalább két kettes van benne. Így a maradék három szám összege 12. Erre a következő lehetőségek vannak: I.:2,5,5 vagy II.: 3,4,5 (4,4,4 nem lehet, mert akkor nem 2 lenne a módusz!). Így az 5 jegy: I.:2,2,2,5,5 vagy II.: 2,2,3,4,5. Az első esetben a szórás $\sigma_1=\sqrt{\frac{3(3.2-2)^2+2(3.2-5)^2}{5}}\approx 1.47$, az átlagtól való abszolút eltérés $A_1=\frac{3|3.2-2|+2|3.2-5|}{5}=1.44$. A II. esetben $\sigma_2\approx 1.17; A_2=1.04$

4.1.4. $\frac{3\cdot 62\%+4\cdot 55\%+5\cdot x\%}{12}=64.24\%$. Ennek megoldása x = 73%. Tehát 73%-ra kell megírnia a harmadik részt, hogy összességében meglegyen a 64.25%.

4.1.5. 76%

4.1.6. A 70 lány összeredménye 70·3,8 = 266. A fiúk számát jelöljük x-el, ekkor az ő összeredményük x·3,6. A kolisok összeredménye 20·3,9=78. A létszám 70+x, így a nem kolisok száma 50+x. Így az ő összeredményük (50+x)·3,68=184+3,68x. A fiúk és lányok összeredményeinek összege megegyezik a kolisok és nem kolisok összeredményeinek összegével. 266 + 3,6x = 78 + 184 + 3,68x. Ebből x = 50. Tehát az évfolyamon 120 diák volt.

4.1.7. 130 fős az évfolyam.

4.1.8. I. eset: az ötödik adat: 18. Ekkor az átlag 27.6, ez nem szerepel az adatok között, ez az eset nem lehet. II. eset: az ötödik adat: 30. Ekkor az átlag 30, ez szerepel az adatok között, viszont ekkor a módusz és a medián ugyanaz, ez az eset sem lehet. III. eset: az ötödik adat: 32. Ekkor az átlag 30.4, ez nem szerepel az adatok között, ez az eset nem lehet. IV. eset: az ötödik adat: 40. Ekkor az átlag 32, ez szerepel az adatok között, ebben az esetben a módusz (40) nem egyenlő a mediánnal (32), így ez a megoldás. Tehát az 5. adat a 40.

4.1.9. A hatodik adat 50 vagy 110.

4.1.10. A mért súlyok átlaga 7 kg, szórása 0.2 kg, átlagtól való abszolút eltérés 1.175 kg, így nem kap büntetést az árus.

4.1.11. A dobott számok összege 3.4·5=17, mivel legalább 2 db hármas van, a maradék három szám összege 11. Így az 5 lehetséges szám: 3,3,3,3,5 vagy 2,3,3,4,5 vagy 1,3,3,4,6, vagy 2,3,3,3,6

4.1.12. 1,2,2,5,6 vagy 2,2,2,4,6

4.1.13. A jegyek összege az átlag alapján 77. A megadott eddigi osztályzatok összege 62, így a 4 hiányzó dolgozat összege 15. Mivel a módusz a 4-es, ez csak úgy lehet, hogy a hiányzó osztályzatok: 4,4,4,3.

4.1.14. Egészítsük ki a táblázatot a megadott adatok alapján

Játékos	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10**
Dobási kísérletek	8	10	7	6	12	10	5	8	4	15
Dobószázalék	25%	30%	0%	50%	25%	70%	60%	75%	75%	40%
Dobott gól	2	3	0	3	3	7	3	6	3	6

Így ezen a mérkőzésen ez a csapat 37 gólt dobott. 10 játékos lépett a pályára, így az átlaguk 3.7. Szórásuk: $\sigma \approx 1.64$. A csapat dobószázaléka pedig mivel 85 dobási kísérlet volt 43.53%.

4.1.15. A 9 adat átlaga 90, szórása $\frac{9\sqrt{5}}{5} \approx 4.02$. A 10. adat x, utána az adatok összege 810+x, átlaga 81+0.1x. A szórás: $\sqrt{\frac{3(3-0.1x)^2+6(12-0.1x)^2+(0.9x-81)^2}{10}} < 6$. Zárójelbontás és rendezés

után $0.9x^2$-162x+6354 <0. Ennek zérushelyei $x_1 \approx 57.75$, $x_2 \approx 122.25$. Mivel a 10. adat egész szám, így a 10. adat lehetséges értékei 58,59… 121,122.

4.1.16. A négy adat átlaga 25, szórása megközelítőleg 3.08. Az ötödik adat lehetséges értékei az előző feladat alapján: 15,16… 34,35

4.1.17. a) Az eredetileg szűrt dolgozók létszám, korosztály, mért adatai és ezek relatív gyakoriságát a következő táblázat mutatja.

korosztály	**18-30**	**31-50**	**51-**
létszám	49	65	24
rendellenességgel rendelkező	9	20	15
relatív gyakoriság	$\frac{9}{49}$	$\frac{20}{65}$	$\frac{15}{24}$

b) A teljes létszámban az eredetileg rendellenességet mértek relatív gyakorisága $\frac{44}{133}$. Ha mindkét hiányzó, illetve egyik sem lenne rendellenes a relatív gyakoriság $\frac{46}{135}$ illetve $\frac{44}{135}$ lenne, egyik sem $\frac{1}{3}$. Viszont, ha csak az egyiknél mértek pozitív eredményt, akkor a negatív szűrővizsgálati eredménnyel rendelkezők relatív gyakorisága $\frac{45}{135}=\frac{1}{3}$. Tehát az eredeti vizsgálatnál hiányzó két dolgozó közül a pótvizsgálaton pontosan az egyiknél mutattak ki rendellenességet.

4.1.18. a) Medián: 3.5, átlag: $\frac{10}{3}$, szórás megközelítőleg 1.055.

Jegy	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
db	2	1	6	7	2
rel.gyak.	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{9}$

b) Mivel az új adatszám 21, a középső adat 4 a medián miatt. Az átlagból következik, hogy a jegyek összege 69. Így a hiányzó 3 jegy összege 9. Ez megvalósulhat úgy, hogy a hiányzó 3 jegy: (1) 4,4,1, vagy (2) (1) 5,3,1, vagy (3) 4,3,2, vagy (4) 5,2,2, vagy (5) 3,3,3. Ezek közül csak az első esetben valósul meg, hogy a medián 4. Így a hiányzó 3 dolgozat érdemjegye 1,4,4.

4.1.19. a) Az adatok összege 25, így maximum 8 db 3as lehet, és ekkor egy darab 1-es van még, a többi 0.

b) Az adatok összege 210. Ha a medián 1, akkor a sorbarendezett tagok között az 50. és az 51. is 1. Az összeg akkor lesz a legtöbb, ha az 50.-ik előtt csupa 1-es, az 51.-ik után pedig csupa 3-as szerepel. Ebben az esetben az összeg 198, így ez nem éri el a 210-et, tehát nem lehetséges, hogy a medián 1 legyen.

c) Az adatok összege 95. Ahhoz, hogy a módusz 2 legyen, legalább 26 darabnak kell lennie. Ez az összegből lefoglal 52-őt, így a maradék számok összege 43 kell, hogy legyen. 0-ból ekkor legfeljebb 25 lehet, így 1-esek és 3-asok száma 49. Ha mind 1-es lenne, az összeg akkor is meghaladná a 43-at, másrészt, ha csökkentjük az egyesek számát, az összeg még nagyobb lesz. Ha növeljük a kettesek számát, akkor bár növelhetjük a 0-k számát is, az összeg mindig több lesz, mint 95. A kettesek száma legfeljebb 47 lehet, ekkor ez 94-et foglal le az összegből, tehát ekkor még lehet 1 db 1-es, és 46 darab 0, ekkor még hiányzik a 100 db számhoz 6 db, úgy, hogy a nullák száma nem lehet több. Tehát a módusz ebben az esetben nem lehet 2.

4.1.20. Megoldás:

a) Legfeljebb 10 db kettes lehet benne, ha az átlag 0,4.

b) Igen, lehet, például 5 db 0, 30 db 1-es, 15 db 2-es.

c) Nem, mert legfeljebb 23 db-es lehet, ha a többi 0, akkor nem az 1-es a módusz, ha nem nulla, akkor pedig az átlag lesz több.

4.1.21. Az ’A’ osztály tanulóinak száma legyen a, a ’B’ osztály tanulóinak száma legyen b, a ’C’ osztály tanulóinak száma legyen c. Ekkor az ’A’ osztály tanulóinak az összsúlya 59.5a kg, a ’B’ osztályban ez 56b kg, a ’C’-ben pedig 58.5 kg. Az ’A’ és ’B’ -beli diákok súlyátlaga 57.5 kg, ebből 59.5a + 56b = 57.5a + 57.5b, ebből b=$\frac{4}{3}$a. Az ’A’ és ’C’ átlagából hasonlóan következik, hogy a = c. Mindhárom osztály tanulóinak súlyátlaga $\frac{59.5a+56b+58.5c}{a+b+c}=57.8$ kg.

4.1.22. Az előző feladat alapján az összlétszám testmagasságainak átlaga $\frac{1191}{7}\approx 170.14cm$

4.2. Diagrammok

4.2.1. A dolgozatot írt 25 fő jegyeinek gyakoriság táblázata

jegy	Jeles	Jó	Közepes	Elégséges	Elégtelen
db	9	8	3	3	2

Így a jegyek módusza jeles, mediánja jó, átlaga 4.08, szórása 1.145, átlagosabszolút eltérés 0.9. Akkor növekszik a szórás, ha két hiányzó dolgozat elégséges, e jegyek eltérése nagyobb az átlagtól.

4.2.2. Mivel 24 fő írta meg a dolgozatot egy főre 360/24 fok jut. Így az egyes jegyek gyakoriságát a következő táblázat mutatja:

Jeles	Jó	Közepes	Elégséges	Elégtelen
5	8	5	4	2

a) Így a kijavított 24 dolgozat átlaga $\bar{x} = \frac{82}{24} = \frac{41}{12}$, szórása megközelítőleg 1.22, az átlagtól való abszolút eltérés $\frac{5\cdot\left|\frac{41}{12}-5\right| + 8\cdot\left|\frac{41}{12}-4\right| + 5\cdot\left|\frac{41}{12}-3\right| + 4\cdot\left|\frac{41}{12}-2\right| + 2\cdot\left|\frac{41}{12}-1\right|}{24} \approx 1.05.$

b) A 24 kijavított dolgozat jegyeinek összege 82. A hiányzó két dolgozat után a csoportátlag 3.5, így a jegyek összege 26·3.5 = 91. Tehát a hiányzó két dolgozat jegyeinek összege 9, ez csak úgy lehetséges, hogy az egyik jeles, a másik jó.

4.2.3. Töltsük ki a táblázatot, a könnyebb áttekinthetőség érdekében bővítsük ki egy sorral! A kördiagramm alapján először az egységek összprémiumát írjuk be, majd az egy dolgozóra jutó jutalmat.

Egység	Beszerzők	Pénzügy	Számvitel	Raktár	Adminisztrá-ció	Vezetők
Létszám	8	7	8	12	10	5
Az egység prémiuma	2.000.000	1.500.000	1.000.000	2.000.000	500.000	3.000.000
Egy dolgozó prémiuma	250.000	214.286	125.000	166.167	50.000	600.000

Egy dolgozó átlagosan 200.000 Ft-ot kapott, így az egy dolgozóra eső szórás 148.645 Ft, ez 1000 Ft-ra kerekítve 149.000 Ft.

4.2.4. A kördiagramm alapján 163 cm magas lányból van 4, 165 cm magasból 3, illetve 169 cm magasból 5 fő, így a lányok magasságainak átlaga 166.5 cm, szórása megközelítőleg 2.53. A lányok testmagasságainak összege 1998, a fiúké 18*172 = 3096. Így a magasságok átlaga az osztályban 169.8 cm.

4.2.5. Az első diák pontszámainak átlaga $\bar{x} = \frac{31}{3}$, szórása megközelítőleg 1.97. A második diák első négy feladatára kapott pontok összege 39. Az átlagból következik, hogy pontszámainak összege $6 \cdot \frac{67}{6} = 67$. A hiányzó két feladatra kapott összpont 28. Így akkor az ezekre kapható pontszámok 14-14 vagy 13-15 pont.

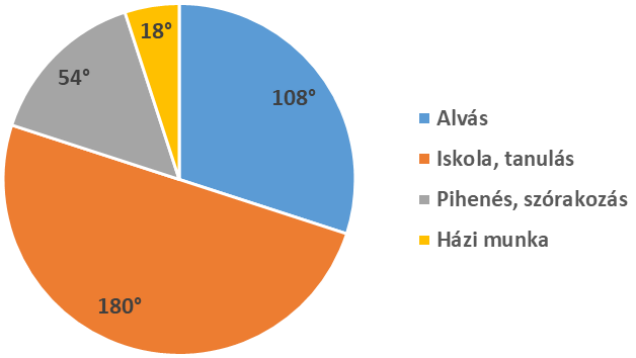
4.2.6. A diagramm alapján 8 adatból 2 db kettes, 1-1 db hármas és négyes, és 4 db 7-es van. Így a módusz már biztosan a 7 lesz. Az eddigi adatok összege 39. Ha a 9. adat m, akkor az átlag $\bar{x} = \frac{39+m}{9} > 4$. Ha x értéke 7-nél nagyobb vagy egyenlő, akkor a medián is 7, ez ellentmond annak, hogy szigorúan monoton növekvő sorozatot alkot az átlag, a módusz, és a medián, tehát ez nem lehetséges. Ha x 5-től kisebb, akkor a medián 4. Ekkor a szóba jöhető számtani sorozatok: 1,4,7, ez nem lehet, mert akkor 1 lenne az átlag, de annak 4-től nagyobbnak kell lennie. Tehát a hiányzó adat csak 5, vagy 6 lehet, és akkor ezek szerepelnek, mint medián is. Ha 5 a hiányzó adat, akkor az átlag $\bar{x} = \frac{44}{9}$, ez nem alkot számtani sorozatot az öttel és a héttel. Ha a kilencedik adat a hat, akkor ez a medián, az átlag 5, és ezek már számtani sorozatot alkotnak. Így a hat volt a hiányzó adat.

4.2.7. A hiányzó adat az ötös.

4.2.8. Először a hiányzó részeket töltsük ki! A házi munkához tartozó %-os adat 5% (18/360*5), így a pihenésre marad 15%.

Tevékenység	Százalékos arány	Kördiagrammban az ehhez a tevékenységhez tartozó középponti szög
Alvás	30%	**108°**
Iskola, tanulás	50%	**180°**
Pihenés, szórakozás	**15%**	**54°**
Házi munka	**5%**	18°

A testvérénél a tanulás és a házi munka aránya összességében 5%-al több, így a hozzájuk tartozó középponti szög 18°-al nő összességében. Mivel a tanulás-hoz tartozó középponti szög 2°-al nagyobb mértékben nő, így ez nő 10°-al, a házi munkáé pedig 8°-al.

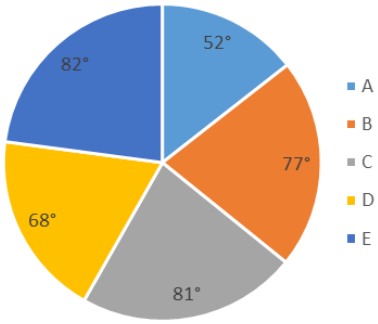


Így az új adatok:

Tevékenység	Százalékos arány	Kördiagrammban az ehhez a tevékenységhez tartozó középponti szög
Alvás	**30%**	**108°**
Iskola, tanulás	**52.8%**	**190°**
Pihenés, szórakozás	**10%**	**36°**
Házi munka	**7.2%**	**26°**

4.2.9. A maximum pontok összege 60, így átlaguk 15, ez egyenlő módusszal és mediánnal, ez csak úgy lehet, hogy a 2. és 3. feladat maximum pontszáma 15. A maradék 30 ponton úgy osztozik az első és negyedik feladat, hogy ez utóbbira kétszer annyi jut, tehát 10 illetve 20 pont. A monoton növekedés miatt az egyes feladatokra adható maximális pontok 10,15,15,20. Így a diákok szerzett pontjai és összpontjai a következő képpen alakulnak:

	1. feladat	**2. feladat**	**3. feladat**	**4. feladat**	**Összesen**	**Kpi.-i szög egészre kerekítve**
A	8	6	9	6	29	52°
B	9	12	12	10	43	77°
C	7	9	15	14	45	81°
D	8	12	6	12	38	68°
E	10	9	12	15	46	82°
Max. pont	10	15	15	20		



Az összpontszámok átlaga 40, az átlagtól való abszolút eltérés pedig 5.4.

5. Számelmélet

5.1. Oszthatóság

5.1.1. A megoldás: 2000220

5.1.2. A megoldás: 300330

5.1.3. A megoldás: 4000440

5.1.4. A megoldás: 7777777770

5.1.5. A megoldás:123654 vagy 321654

5.1.6. A megoldás: 102000564

5.1.7. A megoldás: 381654729

5.1.8. A megoldás: 123475869

5.1.9. Legyen a szám $100A + 28$ alakú! Ekkor a $100A$ is osztható 28-cal, vagyis A osztható 7-tel. Az A számjegyeinek összege: $28 - 10 = 18$, tehát A osztható 9-cel is, vagyis 63 többszöröse. A legkisebb ilyen többszörös, melyben a számjegyek összege 18, a 189. A keresett szám: $100 \cdot 189 + 28 = 18928$.

5.1.10.

a, Tekintsük a következő összefüggéseket:

$$(n+4)(n+5) = n^2 + 9n + 20 < n^2 + 10n + 23 \ < (n+5)(n+5) = n^2 + 10n + 25$$

Tehát igaz az állítás.

b, Bontsuk fel a kifejezést az alábbi módon:

$$n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$$

Ahhoz, hogy ez osztható legyen 121-gyel, a következő alakúnak kell lennie:

$$(n+7)(n-4) = 121A + 88$$

Vagyis $(n+7)\ vagy\ (n-4)$ osztható 11-gyel. Ezek viszont egyszerre oszthatók vagy nem oszthatók 11-gyel, tehát $(n+7)(n-4)$ osztható 121-gyel.

5.1.11. Alakítsuk át a hatjegyű számot az alábbi módon:

$$\overline{abcabc} = \overline{abc000} + \overline{abc} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$$

5.1.12. A 27 osztója az $\overline{abc}$ számnak. Alakítsuk a számot az alábbi módon:

$$\overline{bca} = 10 \cdot \overline{abc} - 999 \cdot a = 10 \cdot \overline{abc} - 27 \cdot 37 \cdot a$$

Az első és a második tag is osztható 27-tel, tehát igaz az állítás.

5.1.13. A 41 osztója az $\overline{abcde}$ számnak. Alakítsuk a számot az alábbi módon:

$$\overline{bcdea} = 10 \cdot \overline{abcde} + a - 100000 \cdot a = 10 \cdot \overline{abcde} - 99999 \cdot a$$

Az első és a második tag is osztható 41-gyel, tehát igaz az állítás.

5.1.14. Az előző két feladathoz hasonlóan oldjuk meg. Az eredeti szám legyen A , melynek utolsó számjegye a . A számjegy áthelyezésével kapott szám legyen B . Ekkor:

$$10 \cdot B - 999999 \cdot a = A$$

Azaz:

$$10 \cdot B = 999999 \cdot a + A = 999 \cdot 1001 \cdot a + A = 999 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot a + A$$

Az első és a második tag is osztható 7-tel, tehát igaz az állítás.

5.1.15. A kifejezést a következő módon tudjuk átalakítani:

$$(a - 6b) = (5a - 4b) - 2(2a + b)$$

Az utóbbi kifejezés mindkét tagja osztható 13-mal, tehát igaz az állítás.

5.1.16. A kifejezést a következő módon tudjuk átalakítani:

$$4(100a + b) = 399 \cdot a + (a + 4b)$$

Az utóbbi kifejezés mindkét tagja osztható 7-tel, tehát igaz az állítás.

5.1.17. A kifejezést a következő módon tudjuk átalakítani:

$$4(3a + 4b) = 12a + 16b = 11a + 11b + a + 5b = 11(a + b) + (a + 5b)$$

Az utóbbi kifejezés mindkét tagja osztható 11-gyel, tehát igaz az állítás.

5.1.18. 1. Alakítsuk át a törtet:

$$\frac{n+7}{n-5}=\frac{n-5+12}{n-5}=1+\frac{12}{n-5}$$

Ez a kifejezés akkor lesz egész, ha az $(n-5)$ osztója 12-nek. Vagyis: $n=6,7,8,9,11\ vagy\ 17$ lehet.

2. Alakítsuk át a törtet:

$$\frac{2n-2}{n+3}=\frac{2n+6-8}{n+3}=\frac{2(n+3)-8}{n+3}=2-\frac{8}{n+3}$$

Ez a kifejezés akkor lesz egész, ha az $(n+3)$ osztója 8-nak. Vagyis: $n=1\ vagy\ 5$ lehet.

3. Alakítsuk át a törtet:

$$\frac{n^2+5}{n+1}=\frac{n^2-1+6}{n+1}=\frac{n^2-1}{n+1}+\frac{6}{n+1}=(n-1)+\frac{6}{n+1}$$

Ez a kifejezés akkor lesz egész, ha az $(n+1)$ osztója 6-nak. Vagyis: $n=0,1,2\ vagy\ 5$ lehet.

5.1.19. Ha $(n+13)$-nak és $(n-7)$-nek van közös osztója, akkor az osztója a különbségüknek is. Tehát ha lehet egyszerűsíteni, azok csakis a 20 osztói közül kerülhetnek ki. Vagyis: 2,4,5,10 vagy 20.

5.1.20. 1. Ha $(3n+1)$-nek és $(5n+2)$-nek van közös osztója, akkor az osztója a

$3(5n+2)-5(3n+1)=15n+6-15n-5=1$-nek is.

2. Ha $(15n+2)$-nek és $(10n+1)$-nek van közös osztója, akkor az osztója a

$2(15n+2)-3(10n+1)=30n+4-30n-3=1$-nek is.

3. Ha $(6n+4)$-nek és $(8n+5)$-nek van közös osztója, akkor az osztója a

$4(6n+4)-3(8n+5)=24n+16-24n-15=1$-nek is.

5.1.21. 1. Ha a két kifejezésnek van közös osztója, akkor az osztója az alábbinak is:

$$7(8n+3)-8(7n+1)=56n+21-56n-8=13$$

Tehát a közös osztó csak a 13 lehet.

2. Ha a két kifejezésnek van közös osztója, akkor az osztója az alábbinak is:

$$8(5n+6)-5(8n+7)=40n+48-40n-35=13$$

Tehát a közös osztó csak a 13 lehet.

3. Ha a két kifejezésnek van közös osztója, akkor az osztója az alábbinak is:

$$2(n+7)-(2n+3)=2n+14-2n-3=11$$

Tehát a közös osztó csak a 11 lehet.

5.1.22. Legyen $n=5k\pm1, n=5k\pm2$ alakú, ahol *k* egész szám.

1. Ha $n=5k+1$, akkor $(5k+1)^2-1=25k^2+10k$. Ez osztható 5-tel.

2. Ha $n=5k-1$, akkor $(5k-1)^2-1=25k^2-10k$. Ez osztható 5-tel.

3. Ha $n=5k+2$, akkor $(5k+2)^2+1=25k^2+20k+5$. Ez osztható 5-tel.

4. Ha $n=5k-2$, akkor $(5k-2)^2+1=25k^2-20k+5$. Ez osztható 5-tel.

Az állítást az alábbi módon is megfogalmazhatjuk:

Ha *n* 5-tel nem osztható egész szám, akkor az 5 osztója az n^4-1 kifejezésnek.

5.1.23. Egy páratlan szám négyzete $(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1$ alakú, ahol k egész szám. A $k(k+1)$ minden egész esetén páros, mert szomszédosak. Tehát a kifejezés első tagja osztható 8-cal, vagyis 1 maradékot ad.

5.1.24. Legyen $n=7k\pm1, n=7k\pm2, n=7k\pm3$ alakú, ahol *k* egész szám.

1. Ha $n=7k\pm1$, akkor $(7k\pm1)^2=49k^2\pm14k+1$. Ez 1-et ad maradékul.

2. Ha $n=7k\pm2$, akkor $(7k\pm2)^2=49k^2\pm28k+4$. Ez 4-et ad maradékul.

3. Ha $n=7k\pm3$, akkor $(7k\pm3)^2=49k^2\pm42k+9$. Ez 2-t ad maradékul.

5.1.25. 1. Nézzük meg az $n=3k, n=3k\pm1$ alakú számok négyzeteinek 3-mal történő osztási maradékait, ahol *k* egész szám.

Ha $n=3k$, akkor $(3k)^2=9k^2$. Ez 0 maradékot ad.

Ha $n=3k\pm1$, akkor $(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1$. Ez 1 maradékot ad.

2. Nézzük meg az $n = 4k, n = 4k \pm 1, n = 4k \pm 2$ alakú számok négyzeteinek 4-gyel történő osztási maradékait, ahol *k* egész szám.

Ha $n = 4k$, akkor $(4k)^2 = 16k^2$. Ez 0 maradékot ad.

Ha $n = 4k \pm 1$, akkor $(4k \pm 1)^2 = 16k^2 \pm 8k + 1$. Ez 1 maradékot ad.

Ha $n = 4k \pm 2$, akkor $(4k \pm 2)^2 = 16k^2 \pm 16k + 4$. Ez 4 maradékot ad.

3. Nézzük meg az $n = 5k, n = 5k \pm 1, n = 5k \pm 2$ alakú számok négyzeteinek 5-tel történő osztási maradékait, ahol *k* egész szám.

Ha $n = 5k$, akkor $(5k)^2 = 25k^2$. Ez 0 maradékot ad.

Ha $n = 5k \pm 1$, akkor $(5k \pm 1)^2 = 25 \pm 10k + 1$. Ez 1 maradékot ad.

Ha $n = 5k \pm 2$, akkor $(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$. Ez 4 maradékot ad.

5.1.26. Írjuk fel az egész számot $n = 8k + l$ alakban, ahol *k,l* egész számok és $0 \leq l < 8$. Ekkor: $n^2 = (8k + l)^2 = 64k^2 + 16kl + l^2$. Vagyis az n^2 16-tal való osztási maradékát az l^2 16-tal való osztási maradéka határozza meg. Ezek pedig a 0,1,4,9. Tehát igaz az állítás.

5.1.27. A szabály felismeréséhez tudni kell, hogy 37 osztója 999-nek. Használjuk fel az $1000 = 999 + 1$. Ebből látható, hogy a 37-tel való oszthatóságot jobbról balra haladva hármas csoportosítás szerint osztjuk be az adott számot és megnézzük, hogy a háromjegyű szám osztható-e 37-tel. Pl. 57635843 esetén: $57 + 635 + 843 = 1535$, ezt többször is megismételhetjük. $1 + 535 = 536$. Ez a szám nem osztható 37-tel, tehát az eredeti sem.

5.1.28. A feltétel szerint $100a + 10b + c = 37k$, ahol $a \neq 0, 0 \leq a, b, c \leq 9$ *és* k pzitív egész. Ekkor:

$$100b + 10c + a = 10(10b + c) + a = 10(37k - 100a) + a = 370k - 999a$$

Mivel $999 = 37 \cdot 27$, ezért a 37 osztója a $\overline{bca}$ számnak. Ehhez hasonló módon igazolhatjuk, hogy 37 osztója a $\overline{cab}$ számnak is.

5.1.29. Legyen a 24 darab természetes szám $n, n + 1, n + 2, \cdots, n + 23$. Ekkor az összegük:

$$n + n + 1 + n + 2 + \cdots + n + 23 = 24n + \frac{24 \cdot 23}{2} = 24n + 12 \cdot 23$$

Mivel 24 nem osztója a második tagnak, ezért az állítás igaz.

5.1.30. Az előző feladat alapján belátható, hogy csak abban az esetben van megoldás, ha az n páratlan természetes szám. Legyen a $2k+1$ darab természetes szám $n, n+1, \cdots, n+2k$. Ekkor az összegük:

$$n+n+1+n+2+\cdots+n+2k=(2k+1)\cdot n+\frac{(2k+1)\cdot 2k}{2}=(2k+1)(n+k)$$

Ez a kifejezés osztható $(2k+1)$-gyel, tehát igaz az állítás.

5.1.31. A 11 tárgy súlya 66 egység, tehát egy-egy csoportba 22 egység kerülhet. A beosztás a következő:

1. csoport: 1,4,6,11. 2. csoport: 2,3,7,10. 3. csoport: 5,8,9.

5.1.32. Ilyen tárgyakat csakis akkor lehet három egyenlő súlyú csoportba osztani, ha $3<n$ és n vagy $n+1$ osztható 3-mal. Tegyük fel, hogy az *n* darab tárgy három egyenlő súlyú csoportba osztható. A súlyok összege:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

A feltétel szerint ennek osztója a 3. Ebből következik, hogy a 3 osztója n-nek vagy $(n+1)$-nek. Ha ezt bebizonyítjuk, akkor a csoportba osztás elvégezhető.

Bizonyítható, hogy $n=5,6,8,9$ esetén van megoldás. Minden további esetet ezekre vissza lehet vezetni. Ezek: $6k,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6l+5, ahol\ 1<k\ és\ 0<l$.

Ha $n=5$, akkor $1+4,\ 2+3,\ 5$.

Ha $n=6$, akkor $1+6,\ 2+5,\ 3+4$.

Ha $n=8$, akkor $1+2+3+6,\ 4+8,\ 5+7$.

Ha $n=9$, akkor $1+2+3+4+5,\ 6+9,\ 7+8$, és

$$(n+1)+(n+6)=(n+2)+(n+5)=(n+3)+(n+4)$$

Tehát minden ilyen számra igaz az állítás.

5.1.33.

1. A kifejezés osztható $11 + 7 = 18$-cal, ha n páratlan.

2. Átalakítva: $(17^n - 1) + n + 1$. Ez akkor és csakis akkor osztható 16-tal, ha 16 osztója $(n + 1)$-nek. Azaz $n = 16k - 1$, ahol *k* pozitív egész szám.

3. Átalakítva: $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n = n^5(n + 2) - n(n + 2) = (n + 2)n(n^4 - 1) =$

$$= (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n^2 + 1)$$

Négy egymást követő természetes szám minden pozitív egész esetén osztható 24-gyel. Ha a négy szám közül egyik sem osztható 5-tel, akkor $n = 5k + 2$ alakú, ahol *k* természetes szám, de ekkor 5 osztója $(n^2 + 1)$-nek. Tehát minden *n*-re igaz az eredeti állítás.

4. A $2n^2(n + 1) + 1$ alakból az $n = 3k, n = 3l \pm 1$ helyettesítéssel kapjuk, hogy nincs olyan *n* természetes szám, amelyre teljesülne az oszthatóság.

5. Ha *n* páros szám, akkor $2^n - 1$ osztható 3-mal, ezért $1^n + 2^n$ nem osztható 3-mal. Tehát az *n* nem lehet páros természetes szám. Ha *n* páratlan szám, akkor:

$$3^n + (2^n + 1^n) = 3^n + (2 + 1)(2^{n-1} - \cdots + 1)$$

Ez a kifejezés osztható 3-mal. Tehát, ha *n* páratlan természetes szám, akkor igaz az állítás.

6. Átalakítva:

$$n^3 + 3n^2 - n - 3 = n^2(n + 3) - (n + 3) = (n + 3)(n^2 - 1)$$

Ha *n* páros természetes szám, akkor ez a szorzat páratlan lenne, vagyis nem osztható 48-cal. Ha *n* páratlan természetes szám, akkor $n - 1, n + 1, n + 3$ három egymást követő páros szám. Ezek közül egy osztható 3-mal, a szorzat pedig $2^4 \cdot 3 = 48$-cal.

7. Az állítás azt jelenti, hogy van olyan *k* egész szám, melyre $n^2 + 3n + 5 = 121k$. Az $n^2 + 3n + (5 - 121k) = 0$ másodfokú egyenlet egész megoldásai felelnek meg. Ha van egész megoldás, akkor az egyenlet diszkriminánsa négyzetszám kell, hogy legyen.

$D = 484k - 11 = 11(44k - 1)$. Mivel 11 nem osztója a $44k - 1$ kifejezésnek, ezért ez nem négyzetszám. Tehát a feladatnak nincs megoldása.

5.1.34. 1. Átalakítva:

$$\frac{3n-9}{n+3}=\frac{3n+9-18}{n+3}=3-\frac{18}{n+3}$$

Ez akkor lesz egész szám, ha az $(n+3)$ osztója a 18-nak. Ezek pedig:

$n+3=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6,\pm9,\pm18$. Ezekből kapjuk a megoldásokat *n*-re.

2. Átalakítva:

$$\frac{3n^2+6n+10}{n+2}=3n+\frac{10}{n+2}$$

Ez akkor lesz egész szám, ha az $(n+2)$ osztója a 10-nek. Ezek pedig:

$n+2=\pm1,\pm2,\pm5,\pm10$. Ezekből kapjuk a megoldásokat *n*-re.

5.1.35. Átalakítva:

$$\frac{n^2+14n+40}{n^2+10n+24}=\frac{(n+7)^2-3^2}{(n+5)^2-1}=\frac{(n+4)(n+10)}{(n+4)(n+6)}=\frac{(n+10)}{(n+6)}=1+\frac{4}{n+6}$$

Ez akkor lesz egész szám, ha az $(n+6)$ osztója a 4-nek. Ezek pedig: $n+6=1,2,4$. Ebből:

$n=-5, n=-4, n=-2$. Mivel a feltétel szerint *n* természetes szám, így a feladatnak nincs megoldása.

5.1.36. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $\mathrm{n}=1$, akkor $2\cdot7^1+1=15$, valóban 3 osztója $15-$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $\mathrm{n}=\mathrm{k}$ esetén igaz, vagyis 3 osztója a $2\cdot7^{\mathrm{k}}+1$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $\mathrm{n}=\mathrm{k}+1$ esetén is igaz:

$$\text{A 3 osztója a } 2\cdot7^{\mathrm{k}+1}+1\text{kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$14\cdot7^{\mathrm{k}}+1=7\cdot\left(2\cdot7^{\mathrm{k}+1}+1\right)-6$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 3-mal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.37. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $7^1 + 3^2 = 16$, valóban 4 osztója $16-$nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 4 osztója a $7^k + 3^{k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 4 osztója a } 7^{k+1} + 3^{k+2}\text{kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$7 \cdot 7^k + 3 \cdot 3^{k+1} = 7 \cdot \left(7^k + 3^{k+1}\right) - 4 \cdot 3^{k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 4-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.38. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $3 \cdot 17^2 + 25^1 = 892$, valóban 4 osztója $892-$nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 4 osztója a $3 \cdot 17^{2k} + 25^k$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 4 osztója a } 3 \cdot 17^{2k+2} + 25^{k+1}\text{kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$289 \cdot 3 \cdot 17^{2k} + 25 \cdot 25^k = 289 \cdot \left(3 \cdot 17^{2k} + 25^k\right) - 264 \cdot 25^k$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 4-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.39. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $4 \cdot 6^1 + 5^1 - 4 = 25$, valóban 5 osztója $25-$nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 5 osztója a $4 \cdot 6^k + 5^k - 4$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 5 osztója a } 4 \cdot 6^{k+1} + 5^{k+1} - 4 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$24 \cdot 6^k + 5 \cdot 5^k - 4 = 6 \cdot \left(4 \cdot 6^k + 5^k - 4\right) - 5^k + 20 =$$

$$= 6 \cdot \left(4 \cdot 6^k + 5^k - 4\right) - 5 \cdot \left(5^{k-1} - 4\right)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 5-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.40. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $17^5 + 3 \cdot 9^2 = 1420100$, valóban 5 osztója $1420100-$nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 5 osztója a $17^{4k+1} + 3 \cdot 9^{2k}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 5 osztója a $17^{4k+5} + 3 \cdot 9^{2k+2}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$83521 \cdot 17^{4k+1} + 81 \cdot 3 \cdot 9^{2k} = 83521 \cdot \left(17^{4k+1} + 3 \cdot 9^{2k}\right) - 83440 \cdot \left(3 \cdot 9^{2k}\right)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 5-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.41. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $1^3 - 1 = 0$, valóban 6 osztója $0-$nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 6 osztója az $k^3 - k$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 6 osztója a $(k+1)^3 - (k+1)$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 + 3k^2 + 2k = k^3 - k + 3k^2 + 3k =$$

$$= k^3 - k + 3k(k+1)$$

Az első két tag különbsége a feltétel szerint osztható 6-tal. A harmadik tagban a k, illetve a k+1 két szomszédos szám, vagyis az egyikük páros, így ez a tag is osztható 6-tal. Tehát igaz az állítás.

5.1.42. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $1(2 + 1)(7 + 1) = 24$, valóban 6 osztója $24 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 6 osztója az $k(2k + 1)(7k + 1)$ kifejezésnek,

azaz 6 osztója a $14k^3 + 9k^2 + k$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 6 osztója a $(k + 1)(2k + 3)(7k + 8)$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$14k^3 + 51k^2 + 61k + 24 = 14k^3 + 9k^2 + k + 42k^2 + 60k + 24 =$$

$$= 14k^3 + 9k^2 + k + 6(7k^2 + 10k + 4)$$

Az első három tag összege a feltétel szerint osztható 6-tal. A negyedik tag szintén osztható 6-tal. Tehát igaz az állítás.

5.1.43. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $2^7 + 3 \cdot 5^2 = 203$, valóban 7 osztója $203 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 7 osztója a $2^{5k+2} + 3 \cdot 5^{2k}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 7 osztója a $2^{5k+7} + 3 \cdot 5^{2k+2}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$32 \cdot 2^{5k+2} + 25 \cdot 3 \cdot 5^{2k} = 32 \cdot \left(2^{5k+2} + 3 \cdot 5^{2k}\right) - 7 \cdot 3 \cdot 5^{2k}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 7-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.44. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $5 \cdot 9^0 + 2^1 = 7$, valóban 7 osztója $7 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 7 osztója a $5 \cdot 9^{k-1} + 2^{4k-3}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 7 osztója a } \quad 5 \cdot 9^k + 2^{4k+1} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$9 \cdot 5 \cdot 9^{k-1} + 16 \cdot 2^{4k-3} = 9 \cdot \left(5 \cdot 9^{k-1} + 2^{4k-3}\right) + 7 \cdot 2^{4k-3}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 7-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.45. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $3^2 + 7 = 16$, valóban 8 osztója $16 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 8 osztója a $3^{2k} + 7$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 8 osztója a } \quad 3^{2k+2} + 7 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$9 \cdot 3^{2k} + 7 = 9 \cdot \left(3^{2k} + 7\right) - 56$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 8-cal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.46. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $1^3 + 2^3 + 3^3 = 36$, valóban 9 osztója $36 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

$$\text{vagyis 9 osztója a } k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 \quad \text{kifejezésnek,}$$

$$\text{azaz 9 osztója a } 3k^3 + 9k^2 + 15k + 9 \text{ kifejezésnek.}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{vagyis 9 osztója a } (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + k^3 + 6k^2 + 12k + 8 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 =$$

$$= 3k^3 + 18k^2 + 42k + 36 = 3k^3 + 9k^2 + 15k + 9 + 9(k^2 + 3k + 3\ )$$

Az első négy tag összege a feltétel szerint osztható 9-cel. Az ötödik tag szintén osztható 9-cel, tehát igaz az állítás.

5.1.47. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $2^1 \cdot 3^2 + 5^3 = 143$, valóban 11 osztója $143 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

$$\text{vagyis 11 osztója a } 2^{2k-1} \cdot 3^{2k} + 5^{2k+1} \text{ kifejezésnek.}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 11 osztója a } 2^{2k+1} \cdot 3^{2k+2} + 5^{2k+3} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$4 \cdot 2^{2k-1} \cdot 9 \cdot 3^{2k} + 25 \cdot 5^{2k+1} = 36 \cdot 2^{2k-1} \cdot 3^{2k} + 25 \cdot 5^{2k+1} =$$

$$36 \cdot \left(2^{2k-1} \cdot 3^{2k} + 5^{2k+1}\right) - 11 \cdot 5^{2k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 11-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.48. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $7 \cdot 5^2 + 3^2 \cdot 2^3 = 247$, valóban 13 osztója $247 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

$$\text{vagyis 13 osztója a } 7 \cdot 5^{2k} + 3^{k+1} \cdot 2^{2k+1} \text{ kifejezésnek.}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A } 13 \text{ osztója a } 7 \cdot 5^{2k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+3} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$7 \cdot 25 \cdot 5^{2k} + 3 \cdot 4 \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{2k+1} = 25 \cdot \left(7 \cdot 5^{2k} + 3^{k+1} \cdot 2^{2k+1}\right) - 13 \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{2k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 13-mal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.49. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $7 \cdot 5 + 2^4 = 51$, valóban 17 osztója $51 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 17 osztója a $7 \cdot 5^{2k-1} + 2^{3k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A } 17 \text{ osztója a } 7 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+4} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$25 \cdot 7 \cdot 5^{2k-1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = 25 \cdot \left(7 \cdot 5^{2k-1} + 2^{3k+1}\right) - 17 \cdot 2^{3k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 17-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.50. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $6^2 + 19 - 2^2 = 51$, valóban 17 osztója $51 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 17 osztója a $6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A } 17 \text{ osztója a } 6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$36 \cdot 6^{2k} + 19 \cdot 19^k - 2 \cdot 2^{k+1} = 36 \cdot \left(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1}\right) - 17 \cdot \left(19^k - 2 \cdot 2^{k+1}\right)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 17-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.51. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 = 1216$, valóban 19 osztója $1216-$nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 19 osztója a $5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 19 osztója a $5^{2k+3} \cdot 2^{k+3} + 3^{k+3} \cdot 2^{2k+3}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$25 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2 \cdot 2^{k+2} + 3 \cdot 3^{k+2} \cdot 4 \cdot 2^{2k+1} = 50 \cdot 5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 12 \cdot 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1} =$$

$$= 12 \cdot \left(5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}\right) + 38 \cdot \left(5^{2k+1} \cdot 2^{k+2}\right)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 19-cel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.52. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $2^5 + 5 \cdot 3^4 = 437$, valóban 19 osztója $437-$nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 19 osztója a $2^{6k-1} + 5^k \cdot 3^{2k+2}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 19 osztója a $2^{6k+5} + 5^{k+1} \cdot 3^{2k+4}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$64 \cdot 2^{6k-1} + 45 \cdot 5^k \cdot 3^{2k+2} = 64 \cdot \left(2^{6k-1} + 5^k \cdot 3^{2k+2}\right) - 19 \cdot 5^k \cdot 3^{2k+2}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 19-cel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.53. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $5 \cdot 2 + 3^2 = 19$, valóban 19 osztója $19 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 19 osztója az $5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 19 osztója az $5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$8 \cdot 5 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} = 8 \cdot \left(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}\right) + 19 \cdot 3^{3k-1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 19-cel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.1.54. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $3^3 + 40 - 67 = 0$, valóban 64 osztója $0 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 64 osztója a $3^{2k+1} + 40k - 67$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 64 osztója a $3^{2k+3} + 40k - 27$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$9 \cdot 3^{2k+1} + 40k - 27 = 9 \cdot \left(3^{2k+1} + 40k - 67\right) - 320k + 576 =$$

$$= 9 \cdot \left(3^{2k+1} + 40k - 67\right) - 64 \cdot (5k - 9)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 64-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

5.2. Prímszámok, összetett számok

5.2.1. Átírva az egyenletet:

$$x^2 + 28x + 889 = (x + 14)^2 + 693 = p^2$$

Ebből:

$$p^2 - (x + 14)^2 = (p - x - 14)(p + x + 14) = 693$$

A következő egyenletrendszer alapján:

$$\begin{cases} p - x - 14 = a \\ p + x + 14 = b \end{cases}$$

$$p = \frac{a + b}{2}, \qquad x = \frac{b - a}{2} - 14$$

Mivel *a* és *b* csak páratlan lehet, *p* és *x* mindig egész szám lesz. Nem kaphatunk prímet, ha *a*-nak és *b*-nek van közös osztója, mert ha van, az is páratlan, ezért a 2-vel való osztás után is megmarad. A relatív prím *a, b* párokat még ellenőrizni kell, hogy összegük fele prím-e.

A $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Az előbbiek miatt a két 3-as tényezőnek vagy az *a*-ban vagy a *b*-ben kell maradnia, így a $693 = 9 \cdot 7 \cdot 11$ alak szerint a következő *a, b* párok lehetnek:

1. $a \cdot b = b \cdot a = 1 \cdot 693$, az összeg fele 347, ez prímszám.

2. $a \cdot b = b \cdot a = 9 \cdot 77$, az összeg fele 43, ez prímszám.

3. $a \cdot b = b \cdot a = 7 \cdot 99$, az összeg fele 53, ez prímszám.

4. $a \cdot b = b \cdot a = 11 \cdot 63$, az összeg fele 37, ez prímszám.

Tehát mind a négy felbontásból kapunk két-két megoldást. Az első esetben:

$$x = \frac{693 - 1}{2} - 14 = 332 \text{ és } x = \frac{1 - 693}{2} - 14 = -360$$

A többit is hasonlóan elvégezve a keresett értékek:

$$x = -360, -60, -48, -40, 8, 20, 32, 332$$

5.2.2. A kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$2x^2 - x - 36 = (2x - 9)(x + 4) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = p^2$$

Három eset lehetséges:

1. Ha $A = 1, B = p^2$, akkor:

$$\begin{cases} 2x - 9 = 1 \\ x + 4 = p^2 \end{cases}$$

Ebből: $x = 5$ és $p = 3$.

2. Ha $A = p^2, B = 1$, akkor:

$$\begin{cases} 2x - 9 = p^2 \\ x + 4 = 1 \end{cases}$$

Ebből: $x = -3$, nincs prím.

3. Ha $A = p, B = p$, akkor:

$$\begin{cases} 2x - 9 = p \\ x + 4 = p \end{cases}$$

Ebből: $x = 13$ és $p = 17$.

A keresett értékek: $x = 5$ és $x = 13$.

5.2.3. Az egyenletet átrendezve adódik: $2x = 3(30 - y - 2z)$

Mivel a jobb oldal osztható 3-mal, ezért az $x = 3$. Az $y + 2z = 28$, amiből következik, hogy *y* páros, tehát $y = 2$. Ezek szerint $z = 13$.

5.2.4. Az egyenlőség akkor teljesül, ha $n = p^k$ alakú, vagyis $p^{kp} = p^n$. Ebből a $kp = n$ adódik.

1. Ha $k = 1$, akkor $p = n$, azaz minden *p* prím megoldás.

2. Ha $k = 2$ és $p = 2$, akkor $n = 4$ megoldás.

3. Ha $2 < k$, akkor $kp = p^k$, azaz $k = p^{k-1}$. A $p^{k-1} = [(p - 1) + 1]^{k-1}$. A jobb oldal *k* tagból áll, melyek mindegyike legalább 1, ezért a $p^{k-1} \neq k$. Tehát az egyenletnek nincs más megoldása.

5.2.5. Belátjuk, hogy az egyenletnek nincs megoldása. Nézzük meg, hogy az egyes hatványok milyen maradékot adnak 15-tel osztva. A 2^x maradéka 1, 2, 4, vagy 8 lehet. Az 5^y maradéka 1, 5, vagy 10 lehet. A 19^z csak 1 vagy 4 maradékot adhat. Vagyis a baloldal az alábbi maradékokat adhatja:

$$(1+1), (1+5), (1+10), (2+1), (2+5), (2+10), (4+1), (4+5),$$

$$(4+10), (8+1), (8+5), (8+10)$$

Azaz: 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 14.

A jobb oldal viszont 1 vagy 4 maradékot adhat, így a két oldal nem lehet egyenlő.

5.2.6. Az egyenletből következik, hogy $p > q$ $és$ $p + q = (p - q)^2$.

A baloldal $(p - q) + 2q$ alakba írható, vagyis a $(p - q)$ osztója $2q$-nak. Mivel q prímszám, ezért a $2q$ osztói: 1, 2, q, és $2q$. Ha $p - q = 1$, akkor az első egyenlőségben $p + q = 1$, ami lehetetlen. Ha $p - q = q$ vagy $p - q = 2q$, akkor $p = 2q$ $vagy$ $p = 3q$, azaz a p nem prímszám. Így csak $p - q = 2$ lehetséges, azaz p és q iker prímek. Ezek alapján:

$$p = 2^{n-1} + 1 \text{ } és \text{ } q = 2^{n-1} - 1$$

Mivel a $2^{n-1} - 1$, 2^{n-1} , $2^{n-1} + 1$ számok közül pontosan egy osztható 3-mal és ez nem a középső, ezért p és q egyike 3-mal osztható. Ha $p = 3, akkor\ q = 1$, ami nem megoldás. Ha $q = 3, akkor\ p = 5$. Ekkor $8 = p + q = (p - q)^n = 2^n$ adódik, ahonnan $n = 3$.

5.2.7. 1, Ha $n = 3k$ alakú: Mivel n prím, csak a $k = 1$ eset lehetséges, azaz $n = 3$.

2, Ha $n = 3k + 1$ alakú: Ekkor az $n + 14$ összetett szám, tehát nincs ilyen megoldás.

3, Ha $n = 3k - 1$ alakú: Ekkor az $n + 4$ összetett szám, tehát nincs ilyen megoldás.

A megoldás: 3, 7, 17.

5.2.8. Minden $p \neq 3$ $prímszám$ $3k + 1$ $vagy$ $3k + 2$ $alak$ú, $ahol$ $k = 1, 2, \cdots$. Így három eset lehetséges:

1. Ha $p = 3$, akkor:

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = 71$$

Ez prímszám.

2. Ha $p = 3k + 1$, akkor:

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = 27k^3 + 36k^2 + 48k + 15$$

Ez a szám osztható 3-mal.

3. Ha $p = 3k + 2$, akkor:

$$p^3 + p^2 + 11p + 2 = 27k^3 + 63k^2 + 81k + 36$$

Ez a szám osztható 3-mal. Az egyetlen megoldás: $p = 3$.

5.2.9. A $p^q + q^p > 2$ és páratlan, vagyis az összeg egyik tagja ($pl. p^q$) páros, azaz $p = 2$ és és a q páratlan. Vizsgáljuk az összeget a következő alakban:

$$2^q + q^2 = (2^q + 1) + (q^2 - 1)$$

Mivel q páratlan, $(2^q + 1)$ osztható 3-mal. Ha q nem osztható 3-mal, akkor a négyzete 1 maradékot ad 3-mal osztva, vagyis $(q^2 - 1)$ szintén osztható 3-mal. Tehát azt kapjuk, hogy ha q páratlan és 3-mal nem osztható, akkor $2^q + q^2$ osztható 3-mal. Ez csak akkor prím, ha $2^q + q^2 = 3$, de ebből $q = 1$ következik, ami nem helyes. Azaz a q osztható 3-mal, de ekkor csak a $q = 3$ lehetséges. Az egyetlen megoldás: $p = 2$ $és$ $q = 3$.

5.2.10. Tudjuk, hogy egy szám négyzete 3-mal osztva 0 vagy 1 maradékot ad, attól függően, hogy a szám osztható-e 3-mal vagy sem. Ha a p nem osztható 3-mal, akkor a $p^2 + 8$ igen. Mivel ez 3-tól nagyobb, nem lehet prímszám. Tehát ha $p^2 + 8$ nem osztható 3-mal, akkor p-nek oszthatónak kell lennie 3-mal. Ilyen prímszám csak egy van, $p = 3$.

5.2.11. Végezzük el a következő átalakítást:

$$A = a^4 + 4 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 = (a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a) =$$
$$= [(a + 1)^2 + 1][(a - 1)^2 + 1]$$

Az A csak akkor lehet prím, ha $(a + 1)^2 + 1 = \pm 1$ $vagy$ $(a - 1)^2 + 1 = \pm 1$. Ha $1 < |a|$, akkor mindkét tényező nagyobb mint 1, tehát csak két megoldása van: $a = 1$ $és$ $a = -1$.

5.2.12. Végezzük el a következő átalakítást:

$$p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 = (p - 1)(p + 1) + 3$$

Ha $p \neq 3$, akkor a $(p-1)\ vagy\ (p+1)$ osztható 3-mal. Az összeg mindkét tagja osztható 3-mal, tehát maga az összeg is. Mivel $p^2+2>3$, ezért a 3 valódi osztó, tehát a p^2+2 nem prímszám. Vagyis a p^2+2 pontosan akkor prímszám, ha $p=3$.

5.2.13. A kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$p = n^3 - 7n^2 + 14n - 6 = (n-3)(n^2 - 4n + 2)$$

Négy esetet különböztethetünk meg:

1. Ha $(n-3)=1\ és\ (n^2-4n+2)=p$, akkor $n=4\ és\ (n^2-4n+2)=2$. Ez megoldás.

2. Ha $(n-3)=-1\ és\ (n^2-4n+2)=-p$, akkor $n=2\ és\ (n^2-4n+2)=-10$.

Ez nem megoldás.

3. Ha $(n^2-4n+2)=1$, akkor nem kapunk megoldást.

4. Ha $(n^2-4n+2)=-1$, akkor az $n=1$ eset megoldás.

5.2.14. Ha a $p+q$ is prímszám, akkor az egyikük csak a 2 lehet. Mivel a másik prímben

$q^2-q=q(q-1)$ páros pozitív szám, így csak $q=2$ lehetséges.

Ekkor: $p+q=p+2\ és\ p^2+q^2-q=p^2+2$

Végezzük el a következő átalakítást:

$$p^2+2=(p^2-1)+3=(p-1)(p+1)+3$$

Ha p nem osztható 3-mal, akkor a $(p-1),(p+1)$ számok egyike 3-mal osztható, így a jobb oldalon a 3 többszöröse áll, ami nem lehet prímszám. Az egyetlen lehetőség a $p=3$. Ekkor: $p+2=5\ és\ p^2+2=11$. Tehát ez jó megoldás, és ez az egyetlen.

5.2.15. A két természetes szám *a* és *b* reciprokai kisebbek $\frac{1}{pq}$ – nál, vagyis mindkettő nagyobb *pq*-nál. Legyen $a=pq+c\ és\ b=pq+d, ahol\ 0<c,d$ egész számok és

$a<b, c<d$ teljesüljön.

Az

$$\frac{1}{pq+c}+\frac{1}{pq+d}=\frac{1}{pq}$$

egyenletből rendezés után:

$cd=p^2q^2$ és $d=\frac{p^2q^2}{c}>c$ *alapján*: $c<pq$, azaz c a p^2q^2-nek pq-nál kisebb osztója, d pedig a társosztója. A p^2q^2 osztói:

$$1, p, p^2$$

$$q, pq, p^2q$$

$$q^2, pq^2, p^2q$$

Számuk 9, ha *pq*-t elhagyjuk, akkor 4 párt adnak *c, d,* így *a, b* számára. Tehát az $\frac{1}{pq}$ törtet 8-féleképpen bonthatjuk két különböző természetes szám reciprokának az összegére, ha különbözőknek tekintjük azokat is, melyek csak sorrendben térnek el egymástól. Ha ezeket nem tekintjük különbözőknek, akkor 4 felbontás lehetséges.

5.2.16. Csoportosítsuk a prímeket a 3-as maradékosztályok szerint. Egy-egy osztályból legfeljebb két számot vehetünk ki, mert ha három prím 3-mal osztva egyenlő maradékot ad, akkor az összegük osztható 3-mal. Ha mindegyik osztályból veszünk egyet, akkor azok összege is osztható 3-mal. Tehát legfeljebb két osztályból és mindegyikből legfeljebb két számot vehetünk. Így legfeljebb négy prímszámot adhatunk meg. Ilyen például: 7, 11, 13, 23 vagy 19, 23, 37, 41.

5.2.17. Mindkét oldal osztható 5-tel, tehát az egyik prímszám 5. Ha $p=5$, akkor

$qr=5+q+r$. Ebből:

$$q=1+\frac{6}{r-1}$$

Az $(r-1)$-nek a 6 osztójának kell lennie, hogy q egész legyen.

Így $r=2,3,4,7$ *és* $q=7,4,3,2$. A két középső eset nem prím megoldást ad. Tehát a keresett három prímszám: 2, 5, 7.

5.2.18. A 2, 4, 5, 6, 8 számjegyek nem lehetnek többjegyű prímszámok utolsó jegyei, de az 1, 3, 7, 9 számjegyek közül kell egyet-egyet választani, hogy kétjegyű prímszámot kapjunk. Mivel az egyjegyű prímszámok összegének is minimálisnak kell lennie, a következő két megoldást kapjuk:

$$2 + 3 + 5 + 41 + 67 + 89 = 207$$

$$2 + 3 + 5 + 47 + 61 + 89 = 207$$

Mindkét esetben az egyjegyű számok összege 10.

5.2.19. Az ilyen számokat a következő alakba tudjuk írni:

$$\overline{xyxyxy} = 10101 \cdot (10x + y) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot (10x + y)$$

Ebből következik, hogy a $(10x + y)$ a legnagyobb kétjegyű prímszám lehet, vagyis a 97, ami a 979797 számhoz tartozik.

5.2.20. Alakítsuk át a szorzatot:

$$(n+1)(n+2)\cdots 2n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n(n+1)(n+2)\cdots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} =$$

$$= \frac{2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n)\big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)\big)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$$

Tehát 2 a prímtényezős felbontásban az *n*-edik hatványon szerepel.

5.2.21. A $3 < p$ prímszám mindkét szomszédja páros, tehát osztható 2-vel.

A $p-1,\ p,\ p+1$ $egymást$ követő három természetes szám, tehát valamelyik osztható 3-mal. Mivel a p prím, az egyik szomszédja osztható 3-mal.Egy szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal. Ezzel az állítást igazoltuk.

5.2.22. 1, Ha $p < 30$: Az állítás igaz.

2, Ha $30 < p$: Ekkor p-ből levonjuk a 30 egy alkalmas többszörösét. ($p - 30k = maradék$) Mivel 30 $osztható$ $2-vel, 3-mal$ $és$ $5-tel, p$ viszont egyikükkel sem, így a maradék sem lehet ezekkel osztható. Tehát ugyanannyi maradékot ad $2-vel, 3-mal, 5-tel$ osztva, mint p . A maradékok a következők lehetnek: $1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Ezzel az állítást igazoltuk.

5.2.23. Igazoljuk, hogy az $a = 4k^4, ahol\ 1 < k, és\ k \in N$ alakú számokra igaz az állítás.

Megmutatjuk, hogy az $n^4 + 4k^4$ szám felbontható két egész szám szorzatára, melyek egyike sem egyenlő 1-gyel, azaz nem prímszám.

$$b = n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - 4n^2k^2 = (n^2 + 2k^2 - 2nk)(n^2 + 2k^2 + 2nk)$$

Itt a kisebbik tényezőre:

$$(n^2 + 2k^2 - 2nk) = (n - k)^2 + k^2 \geq 1$$

Az egyenlőség csak $n = k = 1$ esetén áll fenn. Tehát végtelen sok k $és$ $a = 4k^4$ szám felel meg az állításnak.

5.2.24. A feltétel szerint $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$. Legyen a tovább már nem egyszerűsíthető alakja $\frac{u}{v}$. Legyen *j* és *k* az a természetes szám, amivel egyszerűsítettünk. Felírható a következő:

$$a = ju, \qquad c = jv, \qquad d = ku, \qquad b = kv\,.$$

Eszerint:

$$a + b + c + d = j(u + v) + k(u + v) = (j + k)(u + v)$$

Ez pedig egy összetett szám, mert mindkét tényező értéke legalább 2. Ebből következik, hogy ha *x, y, u, v* olyan természetes számok, amelyekre $xy = uv$ és *n* tetszőleges természetes szám, akkor $(x^n + y^n + u^n + v^n)$ összetett szám. Ugyanis, ha $xy = uv$, akkor $x^n y^n = u^n v^n$, tehát az $a = x^n,\ b = y^n,\ c = u^n,\ d = v^n$ számokra alkalmazható az előző állítás.

5.2.25. Mivel *p* és *q* 3-nál nagyobb iker prímek, ezért a köztük lévő szám osztható 6-tal. Tehát a *p* és *q* számokat $6k + 1\ illetve\ 6k - 1$ alakban írhatjuk fel, ahol *k* egész szám. Hasonlóan *r* és *s* is $6l + 1\ illetve\ 6l - 1$ alakú, ahol *l* egész szám. A *p* és *r* 6-tal osztva vagy ugyanazt a maradékot adják vagy nem. A két lehetséges eset közül elég az egyiket vizsgálni a 12-vel való oszthatóságra, mert a másik eset csak -1-szeres szorzóban tér el.

$$A = (6k + 1)(6l + 1) - (6k - 1)(6l - 1)$$

$$B = (6k + 1)(6l - 1) - (6k - 1)(6l + 1)$$

A műveletek elvégzése után:

$$A = 12(k + l)$$

$$B = 12(l - k)$$

Mivel *k* és *l* egész számok, az *A* és *B* is osztható 12-vel.

5.2.26. Indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $A = 2^n - 1$ prímszám, de az *n* nem prímszám.

Legyen $n = a \cdot b, ahol\ 1 < a, b\ egész\ számok$. Ekkor:

$$A = 2^{ab} - 1 = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 2^a + 1\right)$$

Mivel $2 \leq a, ezért\ 3 \leq 2^a - 1$, a másik tényező pedig nem kisebb 5-től. Tehát az *A* összetett szám. Ez ellentmondás.

Az állítás megfordítása nem igaz. Ellenpélda: $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$.

5.2.27. Ha $3 < p$, akkor 24 osztója a $p^2 - 1$ számnak, mert $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ és mivel 3 nem osztója *p*-nek, ezért $p - 1$ és $p + 1$ közül az egyik osztható 3-mal. A p páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1 maradékot ad, tehát a 8 osztója a $p^2 - 1$ számnak. Mivel $(3, 8) = 1$, ezért a 24 osztója a $p^2 - 1$ számnak.

5.2.28. Legyen $p - 1$ és $p + 1$ ikerprímek, ahol $6 < p$. A két ikerprím összege $2p$, amiről be kell látni, hogy osztható 12-vel. Mivel p páros, ezért 4 osztója $2p$-nek. A $p - 1$ és $p + 1$ prímszámok, tehát 3 osztója *p*-nek. A $(3, 4) = 1$, ezét a 12 osztója $2p$-nek.

5.2.29. A $p = \frac{a^3+b^3}{2}$ egész szám és 4-gyel nem osztható, tehát a és b páratlan számok. Ezért a $c = \frac{a+b}{2}$pozitív egész szám. Alakítsuk *p*-t szorzattá és felhasználva a $b = 2c - a$ helyettesítést a következőt kapjuk:

$$p = c(3a^2 - 6ac + 4c^2) = c[3(c - a)^2 + c^2]$$

Ha $c \neq 1$, akkor $0 \leq 3(c - a)^2 + c^2 \neq 1$. Ebből következik, hogy *p* nem prím. Tehát $c = 1$.

Ekkor $p = 3a^2 - 6a + 4, illetve\ p = 3b^2 - 6b + 4$. Így beláttuk azt is, hogy $a + b = 2$ és mivel a és b pozitív egészek, ezért $a = b = 1$. Vagyis $\frac{a^3+b^3}{2} = 1$, ez pedig nem prímszám. Tehát nincs olyan *a* és *b* természetes szám, melyekre az $\frac{a^3+b^3}{2}$ prím lenne.

Az előző érvelés akkor is igaz, ha a és b egész számok. Ebben az esetben már van megoldás. Például $a = 3, b = -1$.

5.2.30. Legyen $p_1, p_2, \cdots, p_n$ prímszámok. Ekkor:

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{p_2 p_3 \cdots p_n + p_1 p_3 \cdots p_n + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{p_1 p_2 \cdots p_n}$$

A tört számlálója nem osztható p_1-gyel, mert az első tag nem osztható vele. Hasonlóan belátható, hogy a tört $p_2,\ p_3, \cdots, p_n$ prímek egyikével sem osztható. Tehát a tekintett összeg nem lehet egész szám. Ha $2 \leq n$, akkor a számláló nem lehet 1, tehát a keresett összeg nem lehet egész szám reciproka sem.

5.2.31.

$$p^4 - 5p^2 + 4 = (p^2 - 4)(p^2 - 1) = (p - 2)(p + 2)(p - 1)(p + 1)\ és\ 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Elég azt belátni, hogy $3^2 \cdot 5$ osztója a $p^4 - 5p^2 + 4$ kifejezésnek.

5.2.32. A $p - 1\ és\ p + 1$ számok párosak és valamelyikük osztható 3-mal.

1. Ha $3|p - 1$, akkor $p - 1 = 3k, ahol\ k = 1,2, \cdots$. Mivel $p - 1$ páros, ezért $k = 2n$ alakú, ahol $n = 1,2, \cdots$, azaz $p - 1 = 3(2n) = 6n$. Ebből $p = 6n + 1$.

2. Hasonlóan látható be a $3|p + 1$ eset is.

5.2.33. Először lássuk be, hogy létezik két olyan *x* és *y* egész szám, melyekre $x^2 - y^2 = p$. Az $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = p$. Négy esetet különböztethetünk meg:

1. $x - y = 1\ és\ x + y = p$

2. $x - y = p\ és\ x + y = 1$

3. $x - y = -1\ és\ x + y = -p$

4. $x - y = -p\ és\ x + y = -1$

Minden esetben a következőt kapjuk:

$$x^2 = \frac{p^2 + 2p + 1}{4} \quad és \quad y^2 = \frac{p^2 - 2p + 1}{4}$$

A megoldásból az is látszik, hogy x^2 $és$ y^2 egyértelmű.

5.2.34. Ha $n - 1$ $és$ $n + 1$ prímek, akkor *n* páros szám és mivel három egymás után következő szám egyike osztható 3-mal, ezért *n* osztható 3-mal, tehát *n* osztható 6-tal, kivéve, ha

$n - 1 = 3$ $vagy$ $n + 1 = 3$.

Továbbá n vagy többszöröse 5-nek vagy nem. Az első esetben *n* osztható 30-cal is, kivéve, ha $n = 6$. A második esetben, mivel az öt egymásután következő $n - 2, n - 1, n,$

$n + 1, n + 2$ számok egyike osztható 5-tel, vagy $n - 2$ vagy $n + 2$ osztható 5-tel. Tehát vagy $n - 12$ vagy $n + 12$ is osztható 5-tel. Azonban *n* osztható6-tal, ezért $n - 12$ és $n + 12$ is osztható 6-tal, azaz $n - 12$ vagy $n + 12$ osztható 30-cal. Amint láttuk, az állítás csak akkor igaz, ha $n \neq 2, n \neq 4, n \neq 6$.

5.2.35. A prímszámok egyike sem lehet 3. Ugyanis, ha $p \neq 3$ prímszám és $q = 3$, akkor a

$p^2 - 9$ nem osztható 3-mal, tehát nem osztható 24-gyel sem. A kifejezést alakítsuk át a következő módon:

$$p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$$

Ha *p* a 3-tól különböző prímszám, akkor $(p^2 - 1)$ osztható 24-gyel.

Ugyanis:

$(p^2 - 1) = (p - 1)(p + 1)$, ahol $(p - 1)$ és $(p + 1)$ két egymás utáni páros szám, tehát egyikük osztható 4-gyel, a szorzatuk pedig 8-cal. Mivel a *p* nem osztható 3-mal a $(p - 1)$ vagy $(p + 1)$ a 3 többszöröse, tehát szorzatuk osztható 3-mal. Hasonló módon belátható, hogy a $(q^2 - 1)$ is osztható 24-gyel, vagyis az állítás igaz.

5.2.36. A 3-nál nagyobb számokból álló ikerpár két szomszédos 3-mal nem osztható páratlan szám. Mivel három szomszédos szám közt mindig van páros és 3-mal osztható, az ikerpárokat elválasztó számok 6-tal oszthatók. Két iker prímszám összege a közéjük eső szám duplája, tehát osztható 12-vel.

5.2.37. Két iker prímszámmal szomszédos három szám, három egymás után következő páros szám, melyek közül legalább egy 4-gyel osztható. A három szomszédos szám a két iker prímszámmal együtt öt egymás után következő szám, melyek közül legalább egy osztható 3-mal, és egy 5-tel. Mivel ezek az osztható számok nem lehetnek 7-nél nagyobb prímszámok, ezért kell, hogy a három szomszédos szám közül legyen 3-mal, illetve 5-tel osztható szám. Mivel a 2, 3, és 5 relatív prímszámok, ezért a három szomszédos szám szorzata biztosan osztható $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$-nel.

5.2.38. Minden 3-nál nagyobb *p* prímszám, mivel 2-vel és 3-mal nem osztható, csak

$6k + 1\ vagy\ 6k - 1$ alakú lehet. Tehát:

$p^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12 \cdot (3k^2 \pm k) + 1 = 12K + 1$. Vagyis igaz az állítás.

5.2.39. A *k* számmal osztva a végtelen sok prímszámot, a maradékok száma véges: $0, 1, \cdots, k - 1$. Ha tehát a végtelen sok prímszámot a *k*-val való osztás maradéka szerint véges számú csoportba osztjuk, akkor kell lennie legalább egy olyan csoportnak, amelyben végtelen sok prímszám található. Ezek mindegyike *k*-val való osztásnál ugyanazt az *r* maradékot adja:

$$p_1 = k \cdot x_1 + r, p_2 = k \cdot x_2 + r, \cdots, ahol\ 0 \leq r < k.$$

Ezen sorozat bármely két tagjának különbsége osztható *k*-val:

$$p_i - p_j = a(x_i - x_j).$$

Tehát igaz az állítás.

5.2.40. Ha *a* és *b* nem relatív prímek, akkor van egy közös *k* prímosztójuk. Mivel *k* osztja *b*-t, osztja a *p, q, r* számok egyikét. Tételezzük fel, hogy *k* a *p* osztója. Ekkor az $a - p(q + r)$ különbség mindkét tagja osztható *k*-val, tehát a vele egyenlő *qr* szorzat is osztható *k*-val. Vagyis *q* és *r* egyike osztható *k*-val. Ezzel beláttuk, hogy a *p, q, r* számok nem relatív prímek. Tehát ha *p, q, r* számok páronként relatív prímek, akkor *a* és *b* relatív prímek.

Ha a *p, q, r* számok közül mondjuk *p*-nek és *q*-nak van egy közös *k* prímosztója, akkor a $q(p + r) + pr$ összeg, azaz az *a* is osztható *k*-val. Viszont *k*-val osztható a $b = pqr$ szorzat is, tehát *a* és *b* nem relatív prímek. Tehát az állítás megfordítása is igaz.

5.2.41. Indirekt módon bizonyítjuk. Legyenek az adott számok:

$a_1, a_2, \cdots, a_n, ahol\ 1 < a_i < (2n-1)^2\ és\ legyen\ a_i\ legkisebb\ prímosztója\ p_i.$ Mivel a_i nem prímszám, van p_i-n kívül még prímosztója, azaz $p_i^2 \leq a_i < (2n-1)^2$. Az így kapott p_i prímek különbözőek, mert ha $p_i = p_j$ lenne, akkor p_i osztója lenne a_i-nek és a_j-nek is, de a feltétel szerint a_i és a_j relatív prímek. Tehát kapunk n különböző prímet, melyek kisebbek $(2n-1)$-nél. Ez lehetetlen, hiszen $1\ és\ (2n-1)$ között $(n-2)$ darab páratlan szám van, és a 2-t kivéve minden prím páratlan. Tehát $1\ és\ (2n-1)$ között legfeljebb $(n-1)$ darab különböző prímszám található, ami ellentmondás. Vagyis az állítás igaz.

5.2.42. Két egész szám közös osztója osztja a különbségüket is. Tíz egymás utáni szám közül kettőt választva a különbség legfeljebb 9, azaz a a közös osztó is legfeljebb 9. Ha a legnagyobb közös osztó nem 1, akkor az osztható a 2, 3, 5, 7 valamelyikével, de akkor a választott számok is oszthatók. Tehát ha találunk a tíz szám között olyat, amelyik a 2, 3, 5, 7 egyikével sem osztható, akkor az a másik kilenchez relatív prím.

Tíz egymást követő szám között öt páratlan van, ezek közül legfeljebb kettő osztható 3-mal és legfeljebb egy-egy osztható 5-tel, illetve 7-tel. Mindig marad legalább egy páratlan szám, amelyik 3, 5, 7 egyikével sem osztható. Ez a szám megfelel a követelményeknek.

5.2.43. Legyen $x < n$, mely n-hez relatív prím, vagyis $(x, n) = 1$. Ha x páratlan szám, akkor $(x, 2\,n) = 1$. Ha x páros szám, akkor $(x, 2n) = 2$. Azonban most $(x + n)$ páratlan és $(x + n, 2n) = 1$, tehát vagy x vagy $(x + n)$ a $2n$-hez relatív prím. Ezekkel viszont kimerítettük a $2n$-hez relatív prímszámokat, mert ha $y\ (ahol\ y < n)$ az n-hez nem relatív prím, akkor sem y sem $y + n$ nem relatív prím a $2n$-hez.

Megfordítva: Ha $(z, 2n) = 1$, akkor z páratlan és $(z, n) = 1$. Két eset lehetséges: $z < n\ vagy\ n < z < 2n$. Utóbbi esetben $(z - n)$ az n-nél kisebb páros szám, úgy hogy $(z - n, n) = 1$.

5.2.44. 1. Ha egy p prímszám az a, b, c relatív prímszámok szorzatának osztója, akkor p az a, b, c számok csakis az egyikét osztja. Tegyük fel, hogy p az a osztója. Ekkor p az $ab + bc + ac$ összeg két tagját osztja, de nem osztója a bc tagnak, tehát nem lehet osztója az $ab + bc + ac$ összegnek sem. Így bármely p prímszám, mely az abc szorzatnak osztója, nem osztója az $ab + bc + ac$ összegnek, vagyis valóban relatív prímek.

2. Tegyük fel, hogy *abc* és $ab + bc + ac$ relatív prímek. Ebből következik, hogy az *abc* szorzat bármely két tényezője relatív prímszám. Ugyanis, ha pl. *a* és *b* számoknak volna közös osztójuk, akkor ez osztaná az *abc* szorzatot és a háromtagú összeg mindegyik tagját, tehát az összeget is. Azaz a feltevéssel ellenkező eredményre jutnánk.

5.2.45. Mivel *a, b, c* három egymást követő szám, ezért $a = b - 1$ és $c = b + 1$. Ezért:

$$b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 2b - 1$$

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = 2b + 1$$

Két szám közös osztója a két szám különbségének is osztója. Ebben az esetben a különbség 2, de ez nem lehet közös osztó, mert mindkét szám páratlan. Tehát a $2b - 1$ és $2b + 1$ valóban relatív prímek.

5.2.46. A két szám közül legyen $b > a$ és $n > |a|$ és $n > |b|, ahol\ b + n$ prímszám. Ekkor $1 \leq a + n \leq b + n$ teljesül. A $(b + n)$ csak eggyel és önmagával osztható, az $(a + n)$ viszont nem osztható $(b + n)$-nel, hiszen kisebb nála. Tehát az $(a + n)$ és $(b + n)$ relatív prímek. Az *n* számot pedig végtelen sok prímszám közül választhatjuk ki.

5.2.47. Ha a két törtet lehetne egyszerűsíteni, vagyis számlálója és nevezője valamely *p* prímszámmal osztható, akkor az $a \cdot b$ szorzat osztható *p*-vel, de *a* és *b* relatív prímek, tehát vagy *a* vagy *b* osztható *p*-vel. Tegyük fel, hogy *a* osztható *p*-vel. Mivel $a \pm b$ is osztható *p*-vel ekkor *b*-nek is osztója a *p*. Azonban így *a* és *b* nem relatív prímek. Tehát nem lehet egyszerűsíteni a két törtet.

5.2.48. A megoldásnál használjuk fel a következő állításokat. Két szomszédos egész szám szorzata:

(1) Mindig páros.

(2) Mindig 0,2 vagy 6-ra végződik.

(3) Hárommal osztva 0 vagy 2 maradékot ad.

1. Ez a kifejezés páratlan, tehát (1) miatt igaz az állítás.

2. Ez a kifejezés 3-mal osztva 1 maradékot ad, tehát (3) miatt igaz az állítás.

3. Ez a kifejezés 3-mal osztva 1 maradékot ad, tehát (3) miatt igaz az állítás.

4. Ez a kifejezés páratlan, tehát (1) miatt igaz az állítás.

5. Ez a kifejezés páratlan, tehát (1) miatt igaz az állítás.

5.2.49.

1. Ha $n = 2k + 1$, ahol *k* pozitív egész, akkor a következő alakba írható:

$$\frac{(2k+1)^2 - 1}{4} = \frac{4k^2 + 4k + 1 - 1}{4} = \frac{2k(2k+2)}{4} = \frac{4k(k+1)}{4} = k(k+1)$$

Tehát igaz az állítás.

2. Az előző feladatra vissza tudjuk vezetni:

$$\frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{4} = \frac{(n^2 + n + 1)^2 - 1}{4}$$

Tehát igaz az állítás.

5.2.50. Legyen $n = k(k+1)$, ahol *k* természetes szám. Ekkor:

$$9n + 2 = 9k(k+1) + 2 = 9k^2 + 9k + 2 = (3k+1)(3k+2)$$

Könnyen belátható, hogy az állítás megfordítása is igaz.

5.2.51. Az *n* természetes szám számjegyeinek szorzata nem lehet nagyobb a számnál, vagyis:

$0 < n^2 - 10n - 22 \leq n$. Ez a két egyenlőtlenség csak $n = 12$ esetén teljesül.

5.2.52. A szorzatot írjuk fel az alábbi módon:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

A páros tényezőkből emeljünk ki 2-t:

$$\frac{2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)\big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\big)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = 2^n\big(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)\big)$$

Tehát 2 az *n*-edik hatványon fordul elő a szorzatban.

5.2.53. A megoldásnál használjuk fel a következő állításokat. Egy szám nem lehet négyzetszám, ha:

(1) Utolsó számjegye 2,3,7,8.

(2) Osztható 3-mal, de 9-cel nem.

(3) Hárommal osztva 2 maradékot ad.

(4) Néggyel osztva 2 vagy 3 maradékot ad.

(5) Két szomszédos négyzetszám között van.

(6) Osztható n-nel, de nem osztható n^2-tel.

1. Az utolsó számjegye 8, tehát (1) miatt nem lehet négyzetszám.

2. A (2) miatt nem lehet négyzetszám.

3. Az (1) miatt nem lehet négyzetszám.

4. A (6) miatt nem lehet négyzetszám. 5-tel osztható, de 25-tel nem.

5. A (2) miatt nem lehet négyzetszám.

6. A (3) miatt nem lehet négyzetszám.

7. A (4) miatt nem lehet négyzetszám.

8. A (4) és (6) miatt nem lehet négyzetszám. 4-gyel osztható, de 16-tal nem.

9. A (2) miatt nem lehet négyzetszám.

10. Ha ez a szám négyzetszám lenne, akkor nem végződhetne 06-ra vagy 66-ra, mert akkor 4-gyel osztva 2 maradékot adna. Ezeken kívül 60-ra sem végződhet, csakis 00-ra. Ha ezt a számot 100-zal elosztjuk, akkor ismét négyzetszámot kell kapni. Ezt a gondolatot folytatva, látszik, hogy nem lehet négyzetszám.

5.2.54. A megoldásnál használjuk fel a következő állításokat. Egy szám nem lehet négyzetszám, ha:

(1) Utolsó számjegye 2,3,7,8.

(2) Osztható 3-mal, de 9-cel nem.

(3) Hárommal osztva 2 maradékot ad.

(4) Néggyel osztva 2 vagy 3 maradékot ad.

(5) Két szomszédos négyzetszám között van.

(6) Osztható n-nel, de nem osztható n^2-tel.

1. Alakítsuk át a számot az alábbi módon:

$$\overline{ababab} = 101010a + 10101b = 10101(10a + b) = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37(10a + b)$$

Ha $\overline{ababab}$ négyzetszám, akkor a $(10a + b)$ osztható lenne $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 = 10101$-gyel. Ez pedig lehetetlen.

2. Alakítsuk át a számot az alábbi módon:

$$\overline{ababab} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}$$

Ha $\overline{ababab}$ négyzetszám, akkor $\overline{abc}$ osztható lenne $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$-gyel. Ez pedig lehetetlen.

3. Alakítsuk át a számot az alábbi módon:

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111 \cdot (a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c)$$

Ha ez négyzetszám lenne, akkor 37-tel oszthatónak kellene lennie az $(a + b + c)$-nek. Ez pedig lehetetlen.

4. Az (5) szerint nem lehetséges. $n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2$

5. A feltétel szerint: $(n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1)$. Az n és $(n^2 - 1)$ relatív prímek, ezért mindkettőnek négyzetszámnak kell lennie, de az $(n^2 - 1)$ nem lehet négyzetszám.

6. A feltétel szerint: $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1$. Az előző feladat alapján ez nem lehet négyzetszám.

7. A (4) miatt nem lehetséges.

$$(2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 = 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2$$

Ez pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad.

8. A (3) miatt nem lehetséges.

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = 3n^2 + 6n + 5$$

Ez pedig 3-mal osztva 2 maradékot ad.

9. A (4) miatt nem lehetséges.

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 + n^2 + 6n + 9 =$$
$$= 4n^2 + 12n + 14$$

Ez pedig 4-gyel osztva 2 maradékot ad.

10. A feltétel szerint:

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2 + 2)$$

Ez pedig nem négyzetszám, mert $(n^2 + 2)$ nem osztható 5-tel, mert négyzetszám nem végződhet sem 3-ra, sem 8-ra.

5.2.55.

1. Ha $ab = n^2$ *és* $ab + a = m^2$ lenne, akkor $ab(ab + a) = a^2b(b + 1)$ is négyzetszám. A $b(b + 1)$ nem lehet négyzetszám, mert szomszédos természetes számok. Ezért

$ab(ab + a)$ és végül $ab + a$ sem lehet négyzetszám.

2. Legyen $x \leq y$. Ekkor $y^2 < y^2 + x \leq y^2 + y < (y + 1)^2$. Vagyis két szomszédos négyzetszám közé esik az $y^2 + x$, ami lehetetlen.

3. A kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2(n^2 + 1)$$

Ez a szorzat csak akkor lehet négyzetszám, ha $(n^2 + 1)$ is az lenne. Ez pedig nem lehetséges.

4. Ha *n* páros, akkor az összeg utolsó számjegye 3 vagy 7 lehet, vagyis nem lehet négyzetszám. Legyen $n = 2k$, ahol *k* pozitív egész. Ekkor:

$$2^{2k} + 3^{2k} = 4^k + 9^k$$

Ha *k* páratlan, akkor az összeg 3-ra végződik. Ha *k* páros, akkor az összeg 7-re végződik.

Ha *n* páratlan, akkor 3-mal osztva 2 maradékot ad, vagyis nem lehet négyzetszám.

Legyen $n = 2k + 1$, ahol *k* pozitív egész. Ekkor:

$$2^{2k+1} + 3^{2k+1} = 2 \cdot 4^k + 3^{2k+1}$$

Ha 3-mal osztjuk, akkor az első tag 2 maradékot ad, a második tag pedig 0-t.

5.2.56. Az $1 \leq n$ esetén $n^2 + n + 41 < (n + 6)^2$. Ha az eredeti kifejezés négyzetszám, akkor az csak $(n + k)^2$ alakú lehet, ahol $0 \leq k < 6$. Az egyetlen megoldás: $n = 40$.

5.2.57. Ha egy négyzetszámot 4-gyel osztunk, akkor az 0 vagy 1 maradékot ad. Ezt felhasználva, például a $4k + 2$ vagy a $4k + 3$ alakú számok.

5.2.58.

1. Ha páros a kitevő és *n* pozitív egész szám:

$$10^{2n} = 10^{2(n-1)} \cdot 10^2 = 10^{2(n-1)}(6^2 + 8^2) = (6 \cdot 10^{n-1})^2 + (8 \cdot 10^{n-1})^2$$

2. Ha páratlan a kitevő és *n* pozitív egész szám:

$$10^{2n+1} = 10 \cdot 10^{2n} = 10^{2n}(1 + 3^2) = 10^{2n} + 3^2 \cdot 10^{2n} = (10^n)^2 + (3 \cdot 10^n)^2$$

5.2.59. Legyen $a \cdot b = m^2$ *és* $b \cdot c = n^2$. Ekkor:

$$(ab) \cdot (bc) = (m \cdot n)^2 \text{ } \acute{e}s \text{ } (ac) \cdot b^2 = (m \cdot n)^2$$

Mivel $b^2 \neq 0$, ezért:

$$(ac) = \left(\frac{m \cdot n}{b}\right)^2$$

5.2.60. A 12 egymást követő pozitív egész szám összege osztható 3-mal. A 12 egymást követő négyzetszám összege 3-mal osztva 2 maradékot ad. Tehát igaz az állítás.

5.2.61.

1. Ha $2 < n$, akkor $(n-1)^2 < n^2 - n + 2 < n^2$. Tehát $n = 2$.

2. A kifejezést 3-mal osztva 2 maradékot ad, tehát nem lehet négyzetszám.

3. Ha $2 < n$, akkor $(n^2-1)^2 < n^4 - n + 2 < (n^2)^2$. Tehát $n = 2$.

4. A kifejezést 5-tel osztva 2 maradékot ad, tehát nem lehet négyzetszám.

5.2.62. Mivel a négyzetszám 6-ra végződik, az alap páros szám, vagyis $n = 2k$, ahol *k* pozitív egész. Azaz: $(2k)^2 = 10l + 6$, ahol *l* pozitív egész. A $4k^2 = 10l + 6$ kifejezésből:

$$k^2 = \frac{5l+3}{2}$$

Ezért *k* csak akkor lehet pozitív egész, ha *l* páratlan.

5.2.63. Az *A* számot csoportosítsuk négyesével az alábbi módon:

$$A = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^8(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \cdots +$$

$$+7^{4n-4}(7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4)(1 + 7^4 + 7^8 + \cdots + 7^{4n-4}) =$$

$$= 2800(1 + 7^4 + 7^8 + \cdots + 7^{4n-4}) = 28 \cdot 100(1 + 7^4 + 7^8 + \cdots + 7^{4n-4})$$

Mivel 100-zal is szorzunk, az utolsó két számjegy a 0.

5.2.64. Ha megvizsgáljuk az utolsó számjegyeket 0-tól 9-ig az ötödik hatványon, akkor az állítás igazolható. Vagyis:

$$0^5 = 0;\ 1^5 = 1;\ 2^5 = 32;\ 3^5 = 243;\ 4^5 = 1024;\ 5^5 = 3125;$$

$$6^5 = 7776;\ 7^5 = 16807;\ 8^5 = 32768;\ 9^5 = 59049$$

5.2.65. A bizonyítást teljes indukcióval oldjuk meg.

1. $n = 1$ esetén az előző feladat alapján igaz az állítás.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$m \text{ és } m^{4k+1} \text{ utolsó számjegye megegyezik.}$$

3. Bizonyítsuk be, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz!

$$m^{4k+5} = m^4 \cdot m^{4k+1}$$

Az indukciós feltétel miatt m és m^{4k+1} utolsó számjegye megegyezik, $m^4 \cdot m^{4k+1}$ utolsó számjegye tehát m^5 utolsó számjegyével egyezik meg. Ezt pedig az előző feladatban láthattuk, hogy az *m* utolsó számjegyével azonos.

5.3. Vegyes feladatok

5.3.1. Az *A* szám osztóiban a p_1 prímtényező $0,1,2,\cdots,\alpha_1$ hatványon szerepelhet, vagyis $(\alpha_1 + 1)$-féleképpen. Ehhez hasonlóan a p_2 prímtényező $(\alpha_2 + 1)$-féleképpen, és így tovább. Mivel az összes osztót úgy kapjuk, hogy mindegyik prímtényezőből veszünk értéket, ahány módon csak lehet. Tehát az összes osztók száma:

$$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$$

5.3.2. A keresett számok ${p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot {p_k}^{\alpha_k}$ alakban írhatók le. A feltétel szerint:

a, ${p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot {p_k}^{\alpha_k} = 10$. Mivel $10 = 2 \cdot 5$, ezért $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4$. Mivel a legkisebb pozitív egész számot keressük, ezért ez csak a $2^4 \cdot 3 = 48$ lehet. A 48 osztói: 1,2,3,4,6,8,12,16,24,48.

b, ${p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot {p_k}^{\alpha_k} = 12$. Mivel $12 = 2^2 \cdot 3$, ezért $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$. Mivel a legkisebb pozitív egész számot keressük, ezért ez csak a $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ lehet. A 60 osztói: 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60.

c, ${p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \cdots \cdot {p_k}^{\alpha_k} = 20$. Mivel $20 = 2^2 \cdot 5$, ezért $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 4$. Mivel a legkisebb pozitív egész számot keressük, ezért ez csak a $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$ lehet. A 240 osztói: 1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,20,24,30,40,48,60,80,120,240.

5.3.3.

1. Egy *A* szám osztóinak száma legyen $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ pozitív egészek. Ez a szorzat akkor és csak akkor páratlan, ha $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ páros számok, vagyis az *A* négyzetszám.

2. Az osztók számának párosságát az előző pont szerint is meg lehet állapítani. Nézzünk egy másik ötletet a megoldásra. Képezzük az *A* szám összes pozitív osztóiból rendezett párokat úgy, hogy (k_1, k_2) egy prímosztója *A*-nak, ha $A = k_1 \cdot k_2$ és $k_1 \leq k_2$. Az *A* összes pozitív osztóinak $d(A)$ száma nem több mint a rendezett párok számának kétszerese. Ha a szám nem négyzetszám, akkor egyenlőség áll fenn, tehát az osztók száma páros.

5.3.4. Képezzünk rendezett párokat az *A* szám pozitív osztóiból az előző feladatban leírtak szerint. Mivel az első helyre 1 és $\sqrt{A}$ közötti számok kerülhetnek, ezért $d(A) \leq 2\sqrt{A}$. Tehát igaz az állítás.

5.3.5. Képezzük a következő számokat:

$A_1 = 1$

$A_2 = 11$

$A_3 = 111$

$A_4 = 1111$

$A_5 = 11111$

$A_6 = 111111$, és így tovább.

Osszuk el 7-tel, illetve 8-cal a számokat. Ha 0 a maradék, akkor készen vagyunk. Ekkor a többszörös csupa 1-es számjegyből áll. Ha nem 0 a maradék, akkor kell, hogy legyen legalább két olyan szám, melynek a maradéka ugyanaz. (A skatulya-elv miatt.) Ezeket egymásból kivonva, a maradék 0, vagyis osztható az adott számmal.

A 7 osztója $A_6 = 111111$ számnak.

A 8 osztója $(A_4 - A_3)$-nak, azaz 1000-nek.

5.3.6. Képezzük a következő számokat:

$A_1 = 1$

$A_2 = 11$

$A_3 = 111$

$A_4 = 1111$

$A_5 = 11111$

$A_6 = 111111$, és így tovább.

$A_n = 11 \cdots 11$, ahol *n* darab 1-es számjegy van.

Osszuk el a számokat *n*-nel. Ha van olyan szám, ahol 0 a maradék, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs 0 maradék, akkor biztosan két olyan szám, amelyik *n*-nel osztva ugyanazt a maradékot adja. Ez a skatulya-elv szerint igaz. Legyenek ezek A_k és A_l, ahol $k < l$ pozitív egész szám. Ekkor az n osztója $A_l - A_k = 111 \cdots 10 \cdots 0$ számnak, ahol $l - k$ darab 1-es számjegy szerepel. Tehát igaz az állítás.

5.3.7. Alakítsuk át a kifejezést az alábbi módon:

$$\frac{64^n + 16 \cdot 8^n + 63}{8^{n+1} + 56} = \frac{8^n(8^n + 7) + 9(8^n + 7)}{8(8^n + 7)} = \frac{8^n + 9}{8}$$

Nincs olyan *n* természetes szám, amelyre ez a kifejezés egész szám lenne.

5.3.8. Indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $8p + 1$ négyzetszám. Ekkor ez egy páratlan szám négyzete:

$$8p + 1 = (2n + 1)^2$$

Mivel $3 < p, ezért\ 3 \leq n$ teljesül. Ebből:

$$8p = 4n^2 + 4n = 4n(n + 1)$$

$$p = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Az n és $n + 1$ közül az egyik páros és a fele egész. Így a p prímszámot két természetes szám szorzatára bontottuk, és $3 \leq n$ miatt mindkét tényező nagyobb 1-től. Ez ellentmondás, tehát a feltevés helytelen.

5.3.9. Tegyük fel, hogy ez a szám racionális. Ez azt jelentené, hogy a tizedes tört szakaszos lenne, azaz volna olyan *k* természetes szám, hogy a tizedes tört alakban egy helytől kezdve *k* egymás utáni számjegy rendre megegyezne az utána következő *k*-val, és így tovább.

Csebisev tétele értelmében minden prímszám és a kétszerese között van prímszám. Ebből többek között az is következik, hogy bármely *n* természetes számra van legalább két darab *n*-jegyű prímszám. Válasszuk *n*-et *k* többszörösére úgy, hogy két *n*-jegyű prímszám már a tizedes tört szakaszos részére essen. Ezt elég nagy többszörös esetén mindig megtehetjük.

A szakaszosság miatt az első prímszám minden számjegye, mivel *n* többszöröse *k*-nak, megismétlődik. Ez azt jelenti, hogy a két prímszám azonos jegyekből áll, azaz azonos. Ez nem lehet igaz, így az a feltevésünk, hogy a felírt tizedes tört racionális, helytelen. Tehát a szám irracionális.

5.3.10. Legyen $\left[\frac{n}{p}\right] = k, ekkor\ n = kp + m,\ ahol\ k, m\ egészek\ és\ 0 \leq m < p.$ Azt kell bizonyítani, hogy $\binom{n}{p}\ \ p - vel\ osztva\ k$ maradékot ad.

$$\binom{n}{p} = \frac{(kp+m)(kp+m-1)\cdots kp\cdots(kp+m-p+1)}{p!} =$$

$$= k \cdot \frac{(kp+m)\cdots(kp+1)(kp-1)\cdots(kp+m-p+1)}{(p-1)!}$$

A számlálóban eredetileg *p* darab egymás után következő szám állott, ezek maradékai *p*-vel osztva mind különbözőek, tehát valamilyen sorrendben *0,1,2,…,p-1*. Közülük a *p*-vel osztható maradt ki, ezért a kifejezés így alakítható:

$$\binom{n}{p} = k \cdot \frac{qp + (p-1)!}{(p-1)!} = \frac{kqp}{(p-1)!} + k$$

Ez *p*-vel osztva valóban *k*-t ad maradékul, hiszen az összeg első tagja osztható *p*-vel mivel egész szám és nevezője relatív prím *p*-hez.

5.3.11. Azt kell belátni, hogy az $a_n - 1 = 5^{2^{n-1}} - 1$ számnak legalább *n* darab különböző prímosztója van. Teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. Az $n = 1$ esetén az állítás igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz.

3. Lássuk be, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$a_{k+1} - 1 = 5^{2^k} - 1 = \left(5^{2^{k-1}} - 1\right)\left(5^{2^{k-1}} + 1\right) = (a_k - 1)(a_k + 1)$$

A feltevésünk miatt az $(a_k - 1)$ számnak legalább k darab különböző prímosztója van. Azt kell még igazolni, hogy az $(a_k + 1)$ számnak van olyan prímosztója, amely nem osztója $(a_k - 1)$-nek. Igaz a következő:

$$(a_k - 1, a_k + 1) = 2$$

Nyilvánvaló, ha $(a_k - 1, a_k + 1) = d$, akkor d osztója $a^k - 1$ és d osztója $a^k + 1$ és így d osztója az $(a^k + 1) - (a^k - 1) = 2$ kifejezésnek. Mivel $a^k - 1$ és $a^k + 1$ is páros, a 2 közös osztójuk, azaz a 2 osztója d-nek, tehát $d = 2$.

Az $(a - b)$ osztója az $a^n - b^n$ kifejezésnek. Ebből következik, hogy 4 osztója a $a^k - 1$ kifejezésnek és $(a_k - 1, a_k + 1) = 2$ miatt a 4 nem osztója $a^k + 1$ kifejezésnek. Mivel $a_k + 1 > 2$, az $(a_k + 1)$-nek a 2-n kívül kell, hogy legyen más prímosztója is,

ami $(a_k - 1, a_k + 1) = 2$ miatt $(a_k - 1)$-nek nem prímosztója.

5.3.12. Mivel $p_1 = 2, p_2 = 3$, ezért ha $3 \leq n$, akkor $1 + p_1 p_2 \cdots p_n$ 2-vel és 3-mal osztva 1-et ad maradékul, így minden prímosztója legalább 5.

Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, azaz a sorozat n-edik eleme 5.

Ekkor $1 + p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$ legnagyobb prímtényezője 5, tehát ennek a számnak 5-től különböző prímtényezője nem lehet. Ez azt jelenti, hogy $1 + p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$ az 5 valamilyen hatványa: $p_1 p_2 \cdots p_{n-1} = 5^k - 1$.

A jobb oldal osztható 4-gyel, mert $(a - b)$ osztója az $a^n - b^n$ kifejezésnek. A baloldalon $(n - 1)$ darab prím szorzata szerepel, melyek közül az első 2, a többi pedig 2-nél nagyobb. Ez a sorozat tehát nem osztható 4-gyel. Ez ellentmondás, tehát az 5 nem eleme a sorozatnak.

5.3.13. A tizenkét szomszédos szám közül hat páros, ezek egyike sem prímszám. A tizenkettő szám között négy osztható 3-mal, melyek fele páratlan. Ez a két páratlan szám szintén nem prímszám.

5.3.14. A gyökjel alatti szám a következő alakban is felírható:

$$225 \cdot 10^{2k} - 10^{k+2} + 10^{k+1} + 9 = 225 \cdot 10^{2k} - 10^k(100 - 10) + 9 = (15 \cdot 10^k - 3)^2$$

Tehát:

$$A - 3 = 15 \cdot 10^k - 3$$

Ebből:

$$A = 15 \cdot 10^k$$

Ez pedig csak a 2, 3, 5 prímtényezőket tartalmazza.

5.3.15. Indirekt módon bizonyítjuk.

1. Tegyük fel, hogy $\sqrt{p} = \frac{a}{b}, ahol\ (a,b) = 1\ és\ b \neq 0$. Ekkor:

$$pb^2|a^2 és\ p|a\ és\ p^2|a^2\ és\ p^2|pb^2\ és\ p|b^2\ és\ p|b$$

A $p|a\ és\ p|b$ ellentmond a feltételben szereplő $(a,b) = 1$ kikötésnek, tehát $\sqrt{p}$ irracionális.

2. Tegyük fel, hogy $\sqrt{p \cdot q} = \frac{a}{b}, ahol\ (a,b) = 1\ és\ b \neq 0$. Ekkor:

$$pqb^2|a^2 és\ p|a\ és\ p^2|a^2\ és\ p^2|pqb^2\ és\ p|qb^2$$

$$és\ mivel\ p\ nem\ osztója\ q - nak, ezért\ p|b^2\ és\ p|b$$

A $p|a\ és\ p|b$ ellentmond a feltételben szereplő $(a,b) = 1$ kikötésnek, tehát $\sqrt{p \cdot q}$ irracionális.

5.3.16.

1. Amennyiben $\sqrt{p^2+1}$ racionális szám, akkor egész szám is, azaz $\sqrt{p^2+1} = a > 0$. Tehát $p^2 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1), azaz\ (a-1)|p^2, ebből\ a - 1 = p\ vagy\ a - 1 = 1.$
Mindkét esetben ellentmondáshoz jutunk, hiszen $p^2 = p(p+2)\ illetve\ p^2 = 2 \cdot 3$ adódik.

2. Ha $\sqrt{p^2-1} = b > 0$ igaz lenne, akkor $b^2 = p^2 - 1$ miatt $b^2 < p^2, b < p$ teljesülne. Másrészt $(p-1)^2 < p^2 - 1, ha\ 1 < p$. Tehát $(p-1)^2 < b^2, (p-1) < b$. Ez pedig ellentmondáshoz vezet, ugyanis $p - 1 < b < p$ egész számok esetén nem lehetséges.

5.3.17. Ha n páratlan, akkor $2^n + 1 = (2+1)(2^{n-1} - 2^{n+2} \pm \cdots \pm 2^0)$. Ekkor $2^n + 1$ osztható lenne 3-mal, tehát $2^n + 1$ csak úgy lehet prím, ha $2^n + 1 = 3$ vagy *n* páros szám. Az *n*-nek nem lehet 2-nél nagyobb prímosztója, ugyanis ha $2 < p \text{ és } p|n \; azaz \; n = p \cdot k, k \neq 0,$ akkor $2^n + 1 = (2^k)^p + 1 = (2^k + 1)((2^k)^{p-1} - (2^k)^{p-2} \pm \cdots \pm 1) \; miatt \; 2^k + 1 | 2^n + 1$ lenne. Tehát az *n* prímtényezős felbontásában csak a 2 szerepelhet, azaz $n = 2^l$.

5.3.18. A $2^n - 1, 2^n, 2^n + 1$ három szomszédos természetes szám, tehát valamelyikük osztható 3-mal. Mivel 2^nnem osztható 3-mal, így $2^n - 1 \text{ és } 2^n + 1$ közül az egyik osztható 3-mal, tehát egyszerre nem prímszámok.

5.3.19. Induljunk ki a következő egyenlőségből:

$$2^{pq} - 2 = 2^{pq} - 2^p + 2^p - 2 = [(2^p)^q - 2^p] + (2^p - 2) \cdots \qquad (1)$$

A feltevés szerint $2^{pq} - 2$ osztható q-val, illetve a Fermat-tétel szerint $a^p - a$ osztható a p prímszámmal. Tehát az (1) jobb oldalán ha $a = 2^p$, akkor $(2^p)^q - 2^p$ osztható q-val. Ebből következik, hogy az (1) jobb oldalának második része, $(2^p - 2)$ osztható q-val. Azonban szintén a Fermat-tétel szerint $(2^p - 2)$ osztható *p*-vel is, így $(2^p - 2)$ osztható a pq szorzattal is. Mivel

$$2^{pq} - 2 = 2^{pq} - 2^q + 2^q - 2 = [(2^q)^p - 2^q] + (2^q - 2) \cdots \qquad (2)$$

Ezért hasonló gondolatmenettel bizonyítható, hogy $(2^q - 2)$ is osztható a pq szorzattal.

5.3.20. A kifejezést a következő alakban is felírhatjuk:

$$p(x + y) = 2xy$$

A jobb oldalon álló szorzat osztható *p*-vel, tehát *x* vagy *y* osztható *p*-vel. Mivel *x* és *y* szimmetrikusan szerepelnek az összefüggésben, akármelyik esetet vehetjük. Tegyük fel, hogy *y* a *p* többszöröse, azaz $y = kp$. Ekkor a $p(x + kp) = 2xkp$ egyenletből:

$$x = \frac{kp}{2k - 1}$$

Ha $k = 1$, akkor $y = x = p$, de ezt kizártuk.

Ha $k > 1$, akkor k *és* $2k-1$ számoknak nem lehet közös osztójuk, tehát $2k-1$ a p osztója kell, hogy legyen. Azaz $2k-1=1\ vagy\ 2k-1=p$. Azonban $2k-1=1$esetben $k=1$, de ezt kizártuk. Ezek szerint $2k-1=p$, illetve $k=\frac{p+1}{2}$ az egyedüli lehetőség. Ekkor:

$$x=\frac{p+1}{2} \text{ és y} = \frac{p(p+1)}{2}$$

Ellenőrzés:

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{\frac{p+1}{2}}+\frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}}=\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p(p+1)}=\frac{2}{p+1}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{p+1}\cdot\frac{p+1}{p}=\frac{2}{p}$$

5.3.21. A másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés alapján:

$$x_1\cdot x_2=1-b \text{ és } x_1+x_2=-a$$

Ebből:

$$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(1-x_1\cdot x_2)^2=(1+x_1^2)(1+x_2^2)$$

Ha $b\neq 1$, akkor $x_1\cdot x_2\neq 0$, vagyis a fenti szorzat tényezői 1-től nagyobbak és a feltétel szerint egész számok. Tehát az a^2+b^2 valóban összetett szám.

5.3.22. Legyen az *N* összetett szám legkisebb prímosztója p. Ekkor: $N=p\cdot q$. A feltétel szerint: $p^3>N=p\cdot q, vagyis\ p^2>q$. Ha q összetett szám volna, pl $q=q_1\cdot q_2$, akkor a feltétel értelmében $q_1>p$ *és* $q_2>p$. Ezek szerint $q_1\cdot q_2\geq p^2$ lenne, ami ellentmondás. Tehát q prímszám, ami az állítást igazolja.

5.3.23.

$$290304=2^9\cdot 3^4\cdot 7$$

1. $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Mivel p páratlan, ezért $(p-1)$ és $(p+1)$ két egymás után következő páros szám, melyek közül az egyik 4-gyel is osztható. Tehát p^2-1 osztható 2^3-nal. Továbbá $p-1, p, p+1$ három egymás utáni szám, vagyis az egyik biztosan osztható 3-mal, de a feltétel szerint ez nem lehet a p. Mivel 2^3 és 3 relatív prímek, ezért p^2-1 osztható $2^3\cdot 3-mal$ és így $(p^2-1)(q^2-1)$ osztható $2^6\cdot 3^2-nel$.

2. $p^6 - q^6 = (p^2 - q^2)(p^4 + p^2q^2 + q^4)$. Mivel p ***és*** q sem 2-vel, sem 3-mal nem osztható, ezért $p = 6a \pm 1, q = 6b \pm 1$ alakú és így:

$$p^2 - q^2 = (6a \pm 1)^2 - (6b \pm 1)^2 = 36(a^2 - b^2) \pm 12(a - b) =$$
$$= 12[3(a + b) \pm 1](a - b)$$

Ha $(a - b)$ páros, akkor $p^2 - q^2$ osztható 24-gyel, ha $(a - b)$ páratlan, akkor $3(a + b) \pm 1$ páros, vagyis $p^2 - q^2$ ekkor is osztható 24-gyel. Tehát $p^6 - q^6$ biztosan osztható 2^3-nal.

3. p^6-q^6= $(p^2 - q^2)[(p^2 - q^2)^2 + 3p^2q^2]$. Mivel a feltétel szerint

$p = 3a \pm 1$ $és$ $q = 3b \pm 1$ alakú, ezért:

$p^2 = 9a^2 \pm 6a + 1 = 3K + 1$ $és$ $q = 3L + 1$ alakú, vagyis:

$p^2 - q^2 = 3(K - L)$ és így $[(p^2 - q^2)^2 + 3p^2q^2]$ is osztható 3-mal. Tehát $p^6 - q^6$ osztható 2^3-nal.

4. Mivel *p* és *q* sem osztható 7-tel, ezért:

$$p = 7a \pm 1\ vagy\ p = 7a \pm 2\ vagy\ p = 7a \pm 3$$

$$q = 7b \pm 1\ vagy\ q = 7b \pm 2\ vagy\ q = 7b \pm 3$$

alakú. A binomiális tétel alapján:

$$(7k \pm 1)^6 = 7A + 1$$

$$(7k \pm 2)^6 = 7B + 64 = 7(B + 9) + 1$$

$$(7k \pm 3)^6 = 7C + 729 = 7(C + 104) + 1$$

Ezek alapján:

$p^6 - q^6 = 7D$ alakú, vagyis osztható 7-tel.

A felsorolt 1., 2., 3., 4. alapján:

$(p^2 - 1) \cdot (p^2 - 1) \cdot (p^6 - q^6)$ osztható $2^6 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 = 290304$-gyel.

5.3.24. Tegyük fel, hogy $(n; n+1) = m$. Ekkor $n = mk_1$ és $n+1 = mk_2$, ahol $(k_1; k_2) = 1$ és $k_1; k_2$ egész számok. Ebből $m(k_2 - k_1) = 1$. Vagyis $m = 1$ vagy $m = -1$. Tehát $(n; n+1) = 1$.

5.3.25. Legyen $(2^n - 1; 2^n + 1) = m$ és *n* pozitív egész. Ekkor $2^n - 1 = mk_1$ és

$2^n + 1 = mk_2$, ahol $(k_1; k_2) = 1$ és $k_1; k_2$ pozitív egész számok. A két egyenlőséget vonjuk ki egymásból: $2 = m(k_2 - k_1)$. Ebből $m = 1$ vagy $m = 2$. Mivel $2^n + 1$ páratlan szám, ezért csak az $m = 1$ lehet megoldás.

5.3.26. Legyen $(2^{2n} + 1;\ 2^n + 1) = m$, és *n* pozitív egész. Mivel

$(2^n)^2 + 1 = (2^n + 1)(2^n + 1) + 2$, továbbá *m* osztója a $(2^n)^2 + 1$ és $2^n + 1$ kifejezésnek is, ezért *m* osztója 2-nek is. Azonban a $2^{2n} + 1$ páratlan, tehát $m = 1$.

5.3.27. Legyen $(11a + 2b\,; 18a + 5b) = m$. Ezért m osztója $11a + 2b$ és $18a + 5b$ kifejezésnek, de *m* osztója $55a + 10b$ és $36a + 10b$ kifejezéseknek is. Vagyis *m* osztója

$55a + 10b - 36a - 10b$ kifejezésnek, azaz *m* osztója $19a$-nak. Hasonlóan igazolható, hogy *m* osztója $19b$-nek is. Mivel $(a; b) = 1$, tehát $m = 1$ vagy $m = 19$.

5.3.28. Legyen $(a; b) = m$. Ekkor $a = m \cdot k, b = m \cdot l$, ahol *k,l* pozitív egészek. Az *a,b*-re adott kikötés miatt $(k; l) = 1$. Legyen továbbá g az *a*-nak és *b*-nek egy többszöröse. Tehát a osztója g-nek és b osztója g-nek teljesül, vagyis $g = a \cdot t$ és $g = b \cdot s$, ahol *t,s* pozitív egész. Mivel *b* osztója *g*-nek, ezt úgy is írhatjuk, hogy $l \cdot m$ osztója $a \cdot t$-nek, vagyis $l \cdot m$ osztója $m \cdot k \cdot t$-nek. Ebből viszont következik, hogy l osztója $k \cdot t$-nek. Mivel k és l relatív prímek, l osztója *t*-nek, ami azt jelenti, hogy $t = l \cdot r$, ahol *r* pozitív egész. Ezt felhasználva kapjuk, hogy $g = a \cdot l \cdot r = m \cdot k \cdot l \cdot r$. Tehát az *a* és *b* minden közös többszöröse $m \cdot k \cdot l$-nek is, mivel ez a szám osztható *a*-val és *b*-vel is, ezért ez is egy közös többszörös. Ezért ez a legkisebb közös többszörös.

Azt kaptuk, hogy

$$[a; b] = m \cdot k \cdot l = \frac{m \cdot k \cdot l \cdot m}{m} = \frac{a \cdot b}{(a; b)}$$

ahol $m \neq 0$. Ebből rendezés után: $a \cdot b = (a; b) \cdot [a; b]$. Tehát igaz az állítás.

5.3.29. Legyen $(a;b)=m$. Ismert, hogy $m=ax+by$, ahol *x,y* egész szám. Szorozzuk az egyenlőség mindkét oldalát $\frac{[a;b]}{d}$-vel:

$$[a;b]\left(\frac{a}{m}x+\frac{b}{m}y\right)=[a;b]$$

$$a\frac{[a;b]}{m}x+b\frac{[a;b]}{m}y=[a;b]$$

Ekkor a következő két kifejezés, vagyis *k* és *l* egész számok:

$$\frac{[a;b]}{m}x=k;\ \frac{[a;b]}{m}y=l$$

Tehát található olyan *k* és *l* egész számok, melyekre:

$$[a;b]=a\cdot k+b\cdot l$$

5.3.30. A feltétel szerint $a+b=[a;b]$, ahol *a,b* pozitív egészek. Legyen $(a;b)=m$, akkor $a=mk; b=ml$, ahol *k,l* pozitív egészek és $(k;l)=1$.

Az

$$[a;b]=\frac{a\cdot b}{(a;b)}$$

egyenlőséget felhasználva kapjuk:

$$\frac{mk\cdot ml}{m}=m(k+l)$$

A $k\cdot l=k+l$ egyenlet egész megoldásait keressük, ahol $(k;l)=1$. Átrendezve kapjuk, hogy $k(l-1)=l$. Ebből: *k* osztója *l*-nek vagy $(l-1)$ osztója *l*-nek. A *k* osztója *l*-nek nem lehet a kikötések miatt. Az $(l-1)$ osztója *l*-nek csak akkor lehet, ha $l=0$ vagy $l=2$. Az $l=0$ esetén $a=0$ és $b=0$, de a kikötés szerint ezek pozitív egészek, tehát ez nem megoldás. Az $l=2$ esetén $2k+k+2$, amiből $k=2$. Ez ellentmond annak, hogy *k,l* relatív prímek. Tehát a feladatnak nincs megoldása.

5.3.31. Legyen $(a;b)=m$. Ekkor *m* osztója *a*-nak és *b*-nek miatt az egyenlőség csak akkor igaz, ha *m* osztója *p*-nek. Mivel a *p* prímszám, ezért $m=1$ vagy $m=p$ teljesül.

Az $m = p$ esetén az egyenlet:

$$[a; b] + p = a + b + p$$

$$[a; b] = a + b$$

Az előző feladatban láttuk, hogy ennek a természetes számok halmazán a megoldása $a = 0$ és $b = 0$. Ekkor p tetszőleges prímszám.

Az $m = 1$ esetén:

$$[a; b] + 1 = a + b + p$$

Ebből: $ab + 1 = a + b + p$, tovább alakítva: $(a - 1)(b - 1) = p$. Mivel p prímszám, ezért $a - 1 = 1$ vagy $b - 1 = 1$. Ebből a megoldások: $a = 2; b = p + 1$ vagy $b = 2; a = p + 1$. Feltettük, hogy $(a; b) = 1$, ezért p csak páros prímszám lehet, vagyis $p = 2$. Ezek alapján az összes megoldás:

$$a = 2; b = 3; p = 2$$

$$a = 3; b = 2; p = 2$$

$a = 0; b = 0; p$ tetszőleges prímszám

5.3.32. A megoldáshoz használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$\frac{[a; b]}{b} = \frac{a}{(a; b)}$$

$$\frac{[b; c]}{c} = \frac{b}{(b; c)}$$

$$\frac{[c; a]}{a} = \frac{c}{(c; a)}$$

A bizonyítandó összefüggés az alábbi alakba írható:

$$\frac{a}{(a; b)} + \frac{(b; c)}{b} + \frac{b}{(b; c)} + \frac{(c; a)}{c} + \frac{c}{(c; a)} + \frac{(a; b)}{a} \geq 6$$

Mivel egy pozitív szám és reciprokának összege nem kisebb 2-től, ezért az állítás igaz.

6. Algebra

6.1. Hatványozás, nevezetes azonosságok

6.1.1. A megoldás:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=ab(b-a)^{-1}$$

6.1.2. A megoldás:

$$(x^{-1}+y^{-1})^{-2}:(x+y)^{-2}=x^2y^2$$

6.1.3. A megoldás:

$$(x^{-2}-a^{-2})(a^{-1}-x^{-1})^{-1}=-\frac{a+x}{ax}$$

6.1.4. A megoldás:

$$\left(x^{\frac{3}{5}}+1\right)^2-\left(x^{\frac{2}{5}}+1\right)\left(x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{2}{5}}+1\right)=2\cdot\sqrt[5]{x^3}=2\cdot x^{\frac{3}{5}}$$

6.1.5. A megoldás:

$$\sqrt[3]{x^{-\frac{1}{2}}y^{-1}}\cdot x^{\frac{5}{6}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{y^{-1}y^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[18]{x^{12}y}$$

6.1.6. A megoldás:

$$\left[\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}\right)^{-1}\right]^{-2}\cdot\frac{4\sqrt{x}+4\sqrt{a}}{x-a}=\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{a}}$$

6.1.7. A megoldás:

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}}\right)\cdot\frac{ab^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{5}{6}}}{2a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

6.1.8. A megoldás:

$$\left(\frac{4x-9x^{-1}}{2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{1}{2}}}+\frac{x-4+3x^{-1}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)^2=9x$$

6.1.9. A megoldás:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot(a^{-1}+b^{-1})+\frac{2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^3}\cdot\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{ab}$$

6.1.10. A megoldás:

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y}+\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}\right)\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{x-y}-\frac{2y}{x-y}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^2}$$

6.1.11. A megoldás:

$$\left(8a^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}\cdot a\cdot\sqrt[4]{x^{\frac{4}{3}}}}\right)^{\frac{1}{3}}=2$$

6.1.12. A megoldás:

$$\frac{a-x}{a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x}=\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}$$

6.1.13. A megoldás:

$$(b+b^{-2})[(b^2+1)b^{-2}-b^{-1}]^{-1}=b+1$$

6.1.14. A megoldás:

$$(a^{-1}b^2-a^2b^{-1}):(a^{-3}-b^{-3})=a^2b^2$$

6.1.15. A megoldás:

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=(a^2+b^2)\cdot a^{-1}\cdot b^{-1}\cdot(b-a)^{-1}$$

6.1.16. A megoldás:

1. $(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$

2. $(x+2y+z)^2 = x^2+4y^2+z^2+4xy+4yz+2xz$

6.1.17. A megoldás:

1. $\left(ax-b+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2x^2+b^2+\frac{1}{4}-2axb+ax-b$

2. $(2a-3b-4)^2 = 4a^2+9b^2+16-12ab-16a+24b$

6.1.18. A megoldás:

1. $c^4+2c^3+3c^2+2c+1 = (c^2+c+1)^2$

2. $4x^4+12x^3+17x^2+12x+4 = (2x^2+3x+2)^2$

3. $a^4-4a^3+10a^2-12a+9 = (a^2-2a+3)^2$

6.1.19. A megoldás:

1. $(2a+3b)^3 = 8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$

2. $\left(\frac{2}{3}x-3y\right)^3 = \frac{8}{27}x^3-4x^2y+18xy^2-27y^3$

6.1.20. A megoldás:

1. $(4a^3+5b^2)^3 = 64a^9+240a^6b^2+300a^3b^4+125b^6$

2. $\left(\frac{1}{2}xy+\frac{x^2y}{3}\right)^3 = \frac{x^3y^3}{8}+\frac{x^4y^3}{4}+\frac{x^5y^3}{6}+\frac{x^6y^3}{27}$

3. $\left(0{,}2a^2b-\frac{5}{3}ab^2\right)^3 = 0{,}008a^6b^3-0{,}2a^5b^4+\frac{5}{3}a^4b^5-\frac{125}{27}a^3b^6$

4. $(x^n-1)^3 = x^{3n}-3x^{2n}+3x^n-1$

6.2. Szorzattá alakítás

6.2.1. A megoldás:

1. $3ax - 4by - 4ay + 3bx = (a + b)(3x - 4y)$

2. $10a^2 + 21xy - 14ax - 15ay = (5a - 7x)(2a - 3y)$

6.2.2. A megoldás:

1. $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$

2. $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$

3. $x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$

6.2.3. A megoldás:

1. $25(a - b)^2 - 16 = (5a - 5b - 4)(5a - 5b + 4)$

2. $\frac{4}{9}(x - y)^2 - 81 = \left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - 9\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + 9\right)$

6.2.4. A megoldás:

1. $(x - 2y)^2 - 4(x + y)^2 = -3x(x + 4y)$

2. $16(x - y)^2 - 25(x + y)^2 = (9x + y)(-x - 9y)$

6.2.5. A megoldás:

1. $25y^4 - 10y^2x + x^2 = (5y^2 - x)^2$

2. $-4\,x^4 + 2yx^2 - y^2 = -(x^2 - y)^2$

6.2.6. A megoldás:

1. $a^3 - 8 + 6a^2 - 12a = (a - 2)(a^2 + 8a + 4)$

2. $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3 = (a + b)^2(a - b)$

6.2.7. A megoldás:

1. $a^6 - b^6 = (a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

2. $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(3a^2+b^2)$

6.2.8. A megoldás:

1. $a^8 + a^4 + 1 = (a^2+a+1)(a^2-a+1)(a^4-a^2+1)$

2. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$

6.2.9. A megoldás:

1. $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = (x+1)(x+2)(x+5)$

2. $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = (x^2+5)(x^2+x+1)$

6.2.10. A megoldás:

1. $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x = x(x-3)(x-4)(x-5)$

2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

6.2.11. A megoldás:

1. $ab(x^2-y^2) + xy(a^2-b^2) = (ay+bx)(ax-by)$

2. $(ad+ac+bc)(a+b+c) - abc = (a+b)(a+c)(b+c)$

6.2.12. A megoldás:

1. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)xy - (x+y) = (x+y)(x-y)^2$

2. $x^4 + x^3 + x + 1 = x^3(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^3+1) = (x+1)^2(x^2+x+1)$

6.2.13. A megoldás:

1. $x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x-y)^2 - 4 = (x-y-2)(x-y+2)$

2. $4a^2 - 20ab + 25b^2 - 36 = (2a-5b)^2 - 36 = (2a-5b-6)(2a-5b+6)$

6.2.14. A megoldás:

1. $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

2. $a^3 - 3a + 2 = a^3 - 4a + a + 2 = a(a-2)(a+2) + a + 2 = (a+2)(a-1)^2$

3. $a^3 + 3a^2 - 4 = a^3 + 2a^2 + a^2 - 4 = a^2(a+2) + (a-2)(a+2) =$
$= (a+2)(a^2 + a - 2) = (a+2)(a+2)(a-1)$

6.2.15. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{80x}{4x-10} : \left(\frac{2x+5}{2x-5} - \frac{2x-5}{2x+5}\right) = 2x + 5$$

Ez pedig minden egész szám esetén páratlan lesz. Tehát igaz az állítás.

6.2.16. A feladat szerint:

$$x^2 + (x+1)^2 + [x(x+1)]^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$$

Ez pedig minden egész szám esetén négyzetszám lesz. Tehát igaz az állítás.

6.2.17. Alakítsuk át a kifejezést:

$$x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = x^3 + y^3 + x^2z - xyz + y^2z =$$

$$= (x+y)(x^2 - xy + y^2) + z(x^2 - xy + y^2) = (x^2 - xy + y^2)(x + y + z) = 0$$

Tehát igaz az állítás.

6.3. Polinomok, algebrai törtek

6.3.1. A megoldás:

1. $(x^2 - 2x - 15) : (x - 5) = x + 3$

2. $(6x^2 + 5x - 6) : (2x + 3) = 3x - 2$

3. $(12x^2 + x - 20) : (4x - 5) = 3x + 4$

6.3.2. A megoldás:

1. $(15x^4 - x^3 - x^2 + 41x - 70) : (3x^2 - 2x + 7) = 5x^2 + 3x - 10$

2. $(4a^4 - 24a^2b^2 - 14a^3b - 54b^4) : (a^2 - 3ab - 9b^2) = 4a^2 - 2ab + 6b^2$

3. $(17x^2 - 6x^4 + 5x^3 - 23x + 7) : (7 - 3x^2 - 2x) = 2x^2 - 3x + 1$

6.3.3. A megoldás:

1. $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

2. $x^8 + x^4 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

6.3.4. A megoldás:

1. $x^3 + 8x^2 + 17x + 10 = (x + 1)(x + 2)(x + 5)$

2. $x^4 + x^3 + 6x^2 + 5x + 5 = (x^2 + 5)(x^2 + x + 1)$

6.3.5. A megoldás:

1. $x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x = x(x - 3)(x - 4)(x - 5)$

2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

6.3.6. A megoldás:

1. $ab(x^2 - y^2) + xy(a^2 - b^2) = (ay + bx)(ax - by)$

2. $4(ad + bc)^2 - (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2 =$

$= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)$

3. $(ad + ac + bc)(a + b + c) - abc = (a + b)(a + c)(b + c)$

6.3.7. A megoldás: Alakítsuk szorzattá a kifejezést:

$$x^3 + x^2z + y^2z - xyz + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + z(x^2 - xy + y^2) =$$

$$= (x^2 - xy + y^2)(x + y + z)$$

A feltétel szerint $x + y + z = 0$, tehát a szorzat értéke is 0.

6.3.8. A megoldás:

1. $\dfrac{x^2+y^2-z^2+2xy}{x^2-y^2+z^2+2xz}=\dfrac{x+y-z}{x-y+z}$

2. $\dfrac{a^3-a^2-a+1}{a^4-2a^2+1}=\dfrac{1}{a+1}$

6.3.9. A megoldás:

1. $\dfrac{2ab-a^2-b^2+c^2}{a^2+c^2-b^2+2ac}=\dfrac{b+c-a}{a+b+c}$

2. $\dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^3+b^3}=\dfrac{a}{a+b}$

6.3.10. A megoldás:

1. $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}=x+1$

2. $\dfrac{x^4-x^3-4x^2+4x}{2x-x^2}=(1-x)(x+2)$

6.3.11. A megoldás:

1. $\dfrac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}+\dfrac{6}{1-a}=\dfrac{12a}{1-a^3}$

2. $\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{3ab}{a^3-b^3}-\dfrac{b-a}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{2a-2b}{a^2+ab+b^2}$

6.3.12. A megoldás:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}$$

6.3.13. A megoldás:

$$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{a+c}{(a-b)(b-c)}=0$$

6.3.14. A megoldás:

$$\frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}+\frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}=-3$$

6.3.15. A megoldás:

$$\left(\frac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\frac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}\right)\cdot\left(1-\frac{b-1}{a}-\frac{b}{a^2}\right)=\frac{a+b}{ab}$$

6.3.16. A megoldás:

$$\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}+\frac{4a}{a^2-1}\right)\cdot\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}\right)=4$$

6.3.17. A megoldás:

$$\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)=\frac{b}{2(3b-2a)}$$

6.3.18. A feltétel szerint: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1, ahol\ b\neq 0\ és\ d\neq 0$

A nevezetes azonosság alapján:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{d}\right)^2$$

Tehát igaz az állítás.

6.3.19. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\left(\frac{9}{n^2}+\frac{n}{3}\right):\left(\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{3}\right)=\frac{27+n^3}{3n^2}\cdot\frac{3n^2}{n^2-3n+9}=$$

$$=\frac{(3+n)(n^2-3n+9)}{n^2-3n+9}=n+3$$

Tehát igaz az állítás.

6.4. Gyökvonás

6.4.1. A megoldás:

1. $\sqrt{\frac{3x^3-3x^2y}{3(x-y)^3}}=\left|\frac{x}{x-y}\right|, ha\ x\neq y$

2. $\sqrt{\frac{16a^4-96a^3}{98a^3-49a^2}}=\frac{4}{7}\sqrt{\frac{a(a-6)}{2a-1}}, ha\ 6\leq a\ vagy\ 0\leq a<\frac{1}{2}$

6.4.2. A megoldás:

1. $\sqrt{\frac{x^4y^2+x^4z^2}{y^4z^2+z^2x^4}}=\frac{x^2}{|z|}\sqrt{\frac{y^2+z^2}{x^4+y^4}}, ha\ xyz\neq 0$

2. $\sqrt{\frac{x-xy+z-zy}{1-3y+3y^2-y^3}}=\frac{1}{|y-1|}\sqrt{x+z}, ha\ y\neq 1\ és\ x\geq -z$

6.4.3. A megoldás:

1. $\sqrt{\frac{18a}{a^2-2ab+b^2}}-\frac{1}{a}\cdot\sqrt{\frac{8a^3}{a^4-2a^2b^2+b^4}}+\frac{1}{5}\cdot\sqrt{\frac{450a}{a^2+2ab+b^2}}=$

$=\sqrt{2a}\left(\frac{3}{|a-b|}+\frac{3}{|a+b|}-\frac{2}{|a^2-b^2|}\right)$

2. $\frac{4x}{a+x}\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{4}}-2a\cdot\sqrt{\frac{a^2-x^2}{(a+x)^2}}+3a\cdot\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}-3x\cdot\sqrt{\frac{(a-x)^2}{a^2-x^2}}=(a-x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

6.4.4. A megoldás:

1. $\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}:\sqrt{x+\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$

2. $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right):\sqrt{xy}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

6.4.5. A megoldás:

1. $\left(\sqrt{x^3y}+\sqrt{xy^3}-xy\right):\sqrt{xy}=x+y-\sqrt{xy}$

2. $\left(\sqrt{\frac{x}{2}}-\sqrt{x}\right):x\sqrt{x}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}x}$

6.4.6. A megoldás:

1. $\sqrt{\frac{a-ax+b-bx}{1-4x+4x^2-x^3}}=\sqrt{\frac{a+b}{x^2-3x+1}}$

2. $\sqrt{\frac{4a^2x^2+4b^2x^2-8abx^2}{a^2y^2+b^2y^2-2aby^2}}=\frac{2|x|}{|y|}$

6.4.7. A megoldás:

1. $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\cdot\left(1-\sqrt{a-b}\right)$

2. $a+b-\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{a+b}\cdot\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}\right)$

6.4.8. A megoldás:

1. $\sqrt{a^3-b^3}+\sqrt{a-b}=\sqrt{a-b}\cdot\left(\sqrt{a^2+ab+b^2}+1\right)$

2. $\sqrt{ax}-\sqrt{by}+\sqrt{bx}-\sqrt{ay}=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$

6.4.9. A megoldás:

1. $a+\sqrt{a}-a^2-\sqrt{a^3}=\left(a+\sqrt{a}\right)(1-a)$

2. $a^2+a+1=\left(a+\sqrt{a}+1\right)\left(a-\sqrt{a}+1\right)$

3. $a-\sqrt{a}-6=\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+2\right)$

6.4.10. A megoldás:

1. $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 = 14$

2. $\left(\sqrt{2+2\sqrt{3}}-\sqrt{2-2\sqrt{3}}\right)^2$ *a második kifejezés nincs értelmezve*

6.4.11. A megoldás:

1. $\left(\sqrt{12}+\sqrt{3}+1\right)^2 = 28+6\sqrt{3}$

2. $\left(3\sqrt{15}+2\sqrt{5}-5\sqrt{10}\right)^2 = 405+60\sqrt{3}-150\sqrt{6}-100\sqrt{2}$

6.4.12. A megoldás:

1. $\left(\sqrt{3}-1\right)^3 = 6\sqrt{3}-10$

2. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^3 = 14\sqrt{5}+18\sqrt{3}$

3. $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3 = 36\sqrt{3}+38\sqrt{2}$

6.4.13. A megoldás:

1. $\left(\frac{x(x-y)}{\sqrt{x^2(x-y)^4}}\right)^3 = \frac{x^3(x-y)^3}{|x|^3(x-y)^6} = \begin{cases} \frac{1}{(x-y)^3}, & ha\ x>0 \\ \frac{-1}{(x-y)^3}, & ha\ x<0 \end{cases}$

2. $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y}}+\sqrt{\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y}}\right)^2 = \frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y}+2+\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y} = \frac{4x}{x-y^2}$

6.4.14. A megoldás:

1. $\left(a\sqrt{b}-b\sqrt{a}\right)^3 = a^3b\sqrt{b}-3a^2b^2\sqrt{a}+3a^2b^2\sqrt{b}-ab^3\sqrt{a}$

2. $\left(\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}+\frac{3a^2}{b^2}+\frac{3a^2}{b^2}\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}$

6.4.15. A megoldás:

1. Emeljük négyzetre mind a két oldalt:

$$\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=a+\sqrt{b}$$

$$\frac{2a}{2}+2\cdot\sqrt{\frac{b}{4}}=a+\sqrt{b},azaz\ a+\sqrt{b}=a+\sqrt{b}$$

Tehát igaz az állítás. A 2. egyenlőség hasonlóan bizonyítható.

6.4.16. A megoldás: Az előző feladatban bizonyított azonossággal vagy négyzetre emeléssel igazolhatjuk az egyenlőségeket. 1. eset:

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{9+\sqrt{81-32}}{2}}+\sqrt{\frac{9-\sqrt{81-32}}{2}}=\sqrt{8}+1=2\sqrt{2}+1$$

2. eset:

$$\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}\right)^2=\left(1+2\sqrt{2}\right)^2$$

$$9+4\sqrt{2}=1+4\sqrt{2}+8$$

Tehát igaz az állítás. A többi egyenlőség hasonlóan bizonyítható.

6.4.17. A megoldás: Az egyenlőség igazolását gyöktelenítéssel vagy négyzetre emeléssel végezhetjük el.

6.4.18. A megoldás: Hozzuk egyszerűbb alakra a baloldalt:

$$\frac{\sqrt{2x}-\dfrac{2x}{x+\sqrt{2x}}}{\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}}=\frac{\left[\sqrt{2x}\left(x+\sqrt{2x}\right)-2x\right](x-2)}{\left(x+\sqrt{2x}\right)\left(\sqrt{2x}-2\right)}=$$

$$=\frac{x\sqrt{2x}(x-2)}{x\sqrt{2x}-2\sqrt{2x}}=\frac{x\sqrt{2x}(x-2)}{\sqrt{2x}(x-2)}=x$$

Tehát igaz az állítás.

6.4.19. A megoldás: A feltételek alapján:

$$\frac{|xy|}{xy}+\frac{|x-y|}{x-y}\cdot\left(\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\right)$$

1. eset: Ha $0<x$ és $0<y$ vagy $x<0$ és $y<0$, akkor:

$$|xy|=xy \text{ és } \frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}=0$$

Vagyis a kifejezés értéke 1.

2. eset: Ha $0<x$ és $0>y$ vagy $x<0$ és $y>0$, akkor:

$$|xy|=-xy$$

Ekkor:

$$\frac{|x-y|}{x-y}\cdot\left(\frac{|x|}{x}-\frac{|y|}{y}\right)=\frac{|x|+|y|}{x-y}\cdot\frac{y|x|-x|y|}{xy}=$$

$$=\frac{x^2y-x|xy|+y|xy|-xy^2}{xy(x-y)}=\frac{x^2y+x^2y-xy^2-xy^2}{xy(x-y)}=2$$

Ezért a kifejezés értéke: $-1+2=1$. Tehát igaz az állítás.

6.4.20. A megoldás: Gyöktelenítsük a baloldali kifejezést:

$$\frac{\left(\sqrt{(a+x)(x+b)}+\sqrt{(a-x)(x-b)}\right)^2}{(a+x)(x+b)-(a-x)(x-b)}=\frac{ax+bx+\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}}{x^2+ab}$$

A feltételek alapján:

$$\frac{\sqrt{ab}(a+b)+\sqrt{ab}(a-b)}{2ab}=\frac{a\sqrt{ab}}{ab}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Tehát igaz az állítás.

6.4.21. A megoldás:

1. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt[8]{a^7}$

2. $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{a^{17}}$

6.4.22. A megoldás:

1. $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}} = \sqrt[24]{a^{23}}$

2. $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}} = \sqrt[8]{\frac{a^3}{b^3}}$

6.4.23. A megoldás:

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^{13}} = 2 \cdot \sqrt[12]{2}$

2. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[4]{27}$

6.4.24. A megoldás:

1. $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{\frac{1}{b}}$

2. $\sqrt[4]{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[12]{\frac{y^3}{x}}$

6.4.25. A megoldás:

1. $\frac{x}{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[4]{x^3}$ 2. $\frac{2a}{\sqrt[4]{a^3}} = 2 \cdot \sqrt[4]{a}$ 3. $\frac{a}{\sqrt[5]{a}} = \sqrt[5]{a^4}$

6.4.26. A megoldás:

1. $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$

2. $\dfrac{a+1}{\sqrt[3]{a}+1}=\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1$

3. $\dfrac{a-1}{\sqrt[4]{a}-1}=\sqrt[4]{a^3}+\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1$

6.4.27. A megoldás:

1. $\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{(a+b)^2}}=\sqrt[3]{a+b}$

2. $\dfrac{a^2-1}{\sqrt[4]{a-1}}=(a+1)\cdot\sqrt[4]{(a-1)^3}$

3. $\dfrac{a+1}{\sqrt[5]{a+1}}=\sqrt[5]{(a+1)^4}$

6.4.28. A megoldás: Hozzuk egyszerűbb alakra a gyökjel alatti kifejezéseket:

$$\left(2a^2\cdot\sqrt[3]{a^3-b^3}-a^2\cdot\sqrt[3]{a^3-b^3}+\sqrt[3]{a^3-b^3}\right):\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}$$

Alakítsuk szorzattá az osztandót és a gyökjel alatti a^3-b^3 kifejezést. Ekkor:

$$(a^2+1)\cdot\sqrt[3]{a-b}$$

6.4.29. A megoldás: Végezzük el a második tényezőben a négyzetre emeléseket. Ekkor:

$$a^3\cdot\frac{32\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^5}{\left[\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\right]^5}\cdot\sqrt[6]{a^3}=\frac{32a^3}{a^2\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=32a$$

6.4.30. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést az alábbi módon:

$$\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab^2\sqrt{b}}-\sqrt[3]{ab}\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=\left[\frac{\left(\sqrt[3]{ab}\sqrt{b}-\sqrt[3]{ab}\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}=$$

$$=\left[\frac{\sqrt[3]{a^2b^2}\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt[6]{a^7b^7}}+4\right]\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}+\frac{4\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^3+4\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{ab\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{a-b}{ab}$$

6.5. Logaritmus azonosságok

6.5.1. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

1. $7^{\log_{\sqrt{7}}5+\log_{49}9}=7^{\log_{\sqrt{7}}5}\cdot 7^{\log_{49}9}=25\cdot 3=75$

2. $10\cdot 100^{\frac{1}{2}lg9-lg2}=10\cdot 10^{lg9-lg4}=10\cdot\frac{9}{4}=\frac{45}{2}$

3. $\frac{lg5+lg2}{lg6}\cdot(lg9+2lg2)=\frac{lg10}{lg6}\cdot lg36=\frac{1}{lg6}\cdot 2lg6=2$

6.5.2. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

1. $8^{\log_{\sqrt{8}}5+\log_{64}9}=8^{\log_{\sqrt{8}}5}\cdot 8^{\log_{64}9}=25\cdot 3=75$

2. $4^{2+\log_{16}9}+36^{1-\log_6 2}+10^{-lg2}=4^2\cdot 4^{\log_{16}9}+\frac{36}{36^{\log_6 2}}+\frac{1}{10^{lg2}}=$

$=16\cdot 3+\frac{36}{4}+\frac{1}{2}=\frac{115}{2}$

6.5.3. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

1. $\frac{\log_2 48}{\log_6 2}-\frac{\log_2 3}{\log_{96}2}=4$

2. $\frac{\log_3 45}{\log_{135}3}-\frac{\log_3 5}{\log_{1215}3}=6$

6.5.4. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

1. $100^{2lg2} = 10^{lg16} = 16$

2. $\sqrt{10^{2+0,5lg16}} = \sqrt{10^2 \cdot 10^{lg4}} = 10 \cdot 2 = 20$

Tehát a 2. kifejezés a nagyobb.

6.5.5. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_3 \sqrt[3n]{\sqrt[3n-1]{\cdots \sqrt[9]{\sqrt[3]{3}}}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

6.5.6. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = 1$$

6.5.7. A megoldás: Alakítsuk át a jobb oldali kifejezést:

$$1 + \log_a b = 1 + \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_c a + \log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_c a\, b}{\log_c a} = \frac{\log_a c}{\log_{ab} c}$$

6.5.8. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^3} b} + \frac{1}{\log_{a^4} b} = \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^3 + \log_b a^4 =$$

$$= \log_b(a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot a^4) = \log_b(a^{10}) = 10 \cdot \log_b a$$

6.5.9. A megoldás: Írjuk át a kitevőt a alapra:

$$\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a} = \frac{\log_a(\log_b a) \log_a b}{\log_a b \log_a a} = \log_a(\log_b a)$$

Visszahelyettesítve:

$$a^{\frac{\log_b(\log_b a)}{\log_b a}} = a^{\log_a(\log_b a)} = \log_b a$$

6.5.10. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_{bn} an = \frac{\log_b an}{\log_b bn} = \frac{\log_b a + \log_b n}{1 + \log_b n}$$

6.5.11. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_{a^n b} a^{n+1} = \frac{\log_b a^{n+1}}{\log_b a^n b} = \frac{(n+1)\log_b a}{1 + n \cdot \log_b a}$$

6.5.12. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_{b^{n+1}} ab^n = \frac{\log_b ab^n}{\log_b b^{n+1}} = \frac{n + \log_b a}{n+1}$$

6.5.13. A megoldás: Vegyük mindkét oldal b alapú logaritmusát és alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_b m^{\log_a n} = \log_b n^{\log_a m}$$

$$\log_a n \cdot \log_b m = \log_a m \cdot \log_b n$$

$$\frac{\log_b n}{\log_b a} \cdot \log_b m = \frac{\log_b m}{\log_b a} \cdot \log_b n$$

6.5.14. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_{a^k} a^n = \frac{\log_a a^n}{\log_a a^k} = \frac{n \cdot \log_a a}{k \cdot \log_a a} = \frac{n}{k}$$

6.5.15. A megoldás: Ha $a = 1$, akkor igaz az egyenlőség. Ha $a \neq 1$, akkor a feltétel szerint:

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$$

Vegyük mind a két oldal a alapú logaritmusát:

$$2 = \log_a(c-b) + \log_a(c+b)$$

$$2 = \frac{1}{\log_{c-b} a} + \frac{1}{\log_{c+b} a}$$

Közös nevezőre hozással megkapjuk a bizonyítandó egyenlőséget.

6.5.16. A megoldás: A feltétel szerint: $a^2 + b^2 = 7ab, vagyis\ (a+b)^2 = 9ab$. Ebből:

$$a + b = 3\sqrt{ab}, azaz\ \frac{a+b}{3} = \sqrt{ab}$$

Vegyük mind a két oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(lga + lgb)$$

6.5.17. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$lg75 = 2lg5 + lg3 = p$$

$$lg45 = lg5 + 2lg3 = q$$

$$lg15 = lg5 + lg3 = \frac{p+q}{3}$$

6.5.18. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$lg20 = 2lg2 + lg5 = 2lg2 + 1 - lg2 = lg2 + 1 = p, ebből: lg2 = p - 1$$

$$lg40 = 3lg2 + lg5 = 3lg2 + lg\frac{10}{2} = 3lg2 + 1 - lg2 = 2lg2 + 1 = 2p - 1$$

6.5.19. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$lg540 = 2lg2 + 3lg3 + lg5 = 2lg\frac{10}{5} + 3lg3 + lg5 =$$

$$= 2 - 2lg5 + 3lg3 + lg5 = 2 + 3lg3 - lg5 = 2 + 3p - q$$

6.5.20. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_6\sqrt{150} = \frac{1}{2}(\log_6(6\cdot 5^2)) = \frac{1}{2}[\log_6 6 + 2\log_6 5] = \frac{1}{2} + p$$

6.5.21. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\log_6 18 = \log_6 6 + \log_6 3 = 1 + \log_6\frac{6}{2} = 2 - \log_6 2 = p, ebből:\ \log_6 2 = 2 - p$$

$$\log_6 54 = \log_6 6 + 2\log_6 3 = 1 + 2(\log_6 6 - \log_6 2) = 3 - 2\log_6 2 = 2p - 1$$

6.5.22. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_3 \sqrt[3]{24} = \frac{1}{3}\log_3(2^3 \cdot 3) = \frac{1}{3}(3\log_3 2 + \log_3 3) = p + \frac{1}{3}$$

6.5.23. A megoldás: Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\log_{\frac{a}{b}} a = p = \frac{\log_a a}{\log_a \frac{a}{b}} = \frac{1}{1 - \log_a b} \; vagyis \; \log_a b = \frac{p-1}{p}$$

Ezt helyettesítsük be a következő kifejezésbe:

$$\log_{\frac{a}{b}} \frac{a^5}{\sqrt{b}} = \frac{\log_a \frac{a^5}{\sqrt{b}}}{\log_a \frac{a}{b}} = \frac{5 - \frac{1}{2}\log_a b}{1 - \log_a b} = \frac{5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{p-1}{p}}{1 - \frac{p-1}{p}} = \frac{9p+1}{2}$$

6.5.24. A megoldás: A feltételekből:

$$\log_x a = \frac{1}{p}, \log_x b = \frac{1}{q} \; és \; \log_x abc = \frac{2}{p+q}$$

$$\log_x a + \log_x b + \log_x c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \log_x c = \frac{2}{p+q}$$

Ebből:

$$\log_x c = \frac{2}{p+q} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{p^2+q^2}{pq(p+q)}$$

Vagyis:

$$\log_c x = -\frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}$$

6.5.25. A megoldás: Mivel: $\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1$, ezért:

$$\log_{2+\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right) = \log_{2+\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} = -1$$

6.6. Vegyes feladatok

6.6.1. A megoldás:

$$\frac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^3}} = (b^4-a^3)\cdot a^{-1}\cdot b^{-1}\cdot (a^2+b^3)^{-1}$$

6.6.2. A megoldás:

1. $ab(a^{-1}+b^{-1})(b^2-a^2)^{-1} = \frac{1}{b-a}$

2. $(ab^{-1}-a^{-1}b)(a^{-1}-b^{-1})^{-1} = -(a+b)$

6.6.3. A megoldás:

$$\frac{5x^{\frac{1}{2}}-1}{3x-3}+\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{2x^{\frac{1}{2}}+2}-\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{3x^{\frac{1}{2}}-3}=\frac{1}{6}$$

6.6.4. A megoldás:

1. $(2x-y-z)^2 = 4x^2+y^2+z^2-4xy+2yz-4xz$

2. $(-3a+5b-c)^2 = 9a^2+25b^2+c^2-30ab+6ac-10bc$

6.6.5. A megoldás:

1. $(a^2+b^2)^3 = a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$

2. $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{8}-\frac{a^2b}{4}+\frac{ab^2}{6}-\frac{b^3}{27}$

6.6.6. A megoldás:

1. $12a^2-6ab+3b^2-6ab = 3(2a-b)^2$

2. $x-x^3+x^2-x^4 = x(1-x)(1+x)^2$

6.6.7. A megoldás:

1. $\frac{16}{49}(a+b)^2 - 25 = \left(\frac{4}{7}a + \frac{4}{7}b - 5\right)\left(\frac{4}{7}a + \frac{4}{7}b + 5\right)$

2. $4(3x+5y)^2 - 16(2x-y)^2 = 4(7x+3y)(7y-x)$

6.6.8. A megoldás:

1. $25x^4 + y^4 - 10x^2y^2 = (5x^2 - y^2)^2$

2. $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = (x+y)(x-y)^2$

6.6.9. A megoldás:

1. $a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2 = a^2(a+1)(a^3 - a^2 + 2)$

2. $2x^3 + x^2 - 4x + 12 = (x-2)(2x^2 + 5x + 6)$

6.6.10. A megoldás:

1. $a^6 - a^4 + 4a^3 + 4a^2 = a^4(a-1)(a+1) + 4a^2(a+1) = a^2(a+1)(a^3 - a^2 + 4)$

2. $16x^2 - 8xy + y^2 - 49 = (4x-y)^2 - 49 = (4x - y - 7)(4x - y + 7)$

6.6.11. A megoldás:

1. $(x^3 - 6x^2 - 5x + 30) : (2x+3) = x^2 - 5$

2. $(x^3 - x^2 - x + 1) : (x+1) = x^2 - 2x + 1$

3. $(6x^3 + x^2 - 29x + 21) : (2x-3) = 3x^2 + 5x - 7$

6.6.12. A megoldás:

1. $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x+2)(x+3)$

2. $2x^3 + x^2 - 4x + 12 = (x-2)(2x^2 + 5x + 6)$

6.6.13. A megoldás:

1. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}=\dfrac{x+1}{x+7}$

2. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=\dfrac{x+2}{x+3}$

6.6.14. A megoldás:

1. $1-x+x^2-\dfrac{x^3}{1+x}=\dfrac{1}{1+x}$

2. $\dfrac{x^2-2ax}{a+x}+a+x=\dfrac{a^2+2x^2}{a+x}$

6.6.15. A megoldás:

$$\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-c)}-\frac{1}{(c-a)(b-a)}=0$$

6.6.16. A megoldás:

1. $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=6+2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$

2. $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2=8-2\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$

3. $\left(1+\sqrt{a}+a\right)^2=a^2+3a+1+2\sqrt{a}(1+a)$

6.6.17. A megoldás:

1. $a+4b+4\sqrt{ab}=\left(\sqrt{a}+2\sqrt{b}\right)^2$

2. $x^2+x-2\sqrt{x^3}=\left(x-\sqrt{x}\right)^2$

3. $p^2q+pq^2+2\sqrt{p^3q^3}=\left(p\sqrt{q}+q\sqrt{p}\right)^2$

6.6.18. A megoldás:

1. $$\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x+y+2\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

2. $$\frac{\sqrt{px}-\sqrt{qy}-\sqrt{qx}+\sqrt{py}}{p+q-2\sqrt{pq}}=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$$

6.6.19. A megoldás:

1. $\left(\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt{6}-\sqrt[4]{27}+\sqrt[6]{32}-\sqrt[12]{2^4\cdot 3^3}$

2. $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^7}\right)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[6]{x}\right)=\sqrt[6]{x^{13}}-\sqrt[4]{x^{13}}+\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[12]{x^{23}}$

3. $$\frac{x+y}{x-y}\cdot\sqrt[3]{\frac{(x^2-y^2)^4}{(x+y)^8}}=\sqrt[3]{\frac{x-y}{x+y}}$$

6.6.20. Az első köbgyök alatti kifejezést alakítsuk át:

$$1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\sqrt[3]{26^2}=27-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\sqrt[3]{26^2}-26=\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3$$

Ezt felhasználva:

$\sqrt[3]{\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3}+\sqrt[3]{26}=3-\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26}=3$. Tehát igaz az állítás.

6.6.21. Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$lg48=4lg2+lg3=a$$

$$lg72=3lg2+2lg3=b$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$$lg2=\frac{2a-b}{5}\ \text{és}\ lg3=\frac{4b-3b}{5}$$

Ebből:

$$lg6=lg2+lg3=\frac{2a-b}{5}+\frac{4b-3a}{5}=\frac{3b-a}{5}$$

6.6.22. Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$lg5 = lg10 - lg2 = 1 - lg2 = p, ebből: lg2 = 1 - p$$

$$lg8 = 3lg2 = 3(1 - p)$$

6.6.23. Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\log_{xy} x = \frac{\log_x x}{\log_x xy} = \frac{1}{1 + \log_x y} = p, azaz\ \log_x y = \frac{1 - p}{p}$$

$$\log_{xy}\left(\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[3]{y}\right) = \frac{\log_x x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{1}{3}}}{\log_x xy} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \log_x y}{1 + \log_x y} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - p}{p}}{1 + \frac{1 - p}{p}} = \frac{\frac{3p + 5 - 5p}{15p}}{\frac{p + 1 - p}{p}} = \frac{5 - 2p}{15}$$

6.6.24. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\log_6 27 = 3\log_6 3 = 3\left(\log_6 \frac{6}{2}\right) = 3(\log_6 6 - \log_6 2) = 3(1 - p)$$

6.6.25. A baloldal mindkét tagja a **6.5.25.** feladat szerint (-1), tehát az állítás igaz.

7. Első-és másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

7.1. Elsőfokú egyenletek

7.1.1. Bontsuk fel a zárójeleket, rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet.

A megoldás: $x = 2$

7.1.2. Bontsuk fel a zárójeleket, rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet.

A megoldás: $x = 5$

7.1.3. Bontsuk fel a zárójeleket, rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet.

A megoldás: $x = 2$

7.1.4. Bontsuk fel a zárójeleket, rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet.

A megoldás: $x = 3$

7.1.5. A feltétel: $x \neq \pm 4$. Szorozzuk be az egyenletet $(x+4)(x-4)$-gyel. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet.

A megoldás: azonosság

7.1.6. A feltétel: $x \neq \pm 2$ *és* $x \neq 0$. Szorozzuk be az egyenletet $x(x-2)(x+2)$-vel. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = \frac{4}{3}$

7.1.7. A feltétel: $x \neq -3$ *és* $x \neq 0$. Szorozzuk be az egyenletet $3x(x+3)$-mal. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = -1$

7.1.8. A feltétel: $x \neq \pm 1$. Szorozzuk be az egyenletet $(x-1)(x+1)$-gyel. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = 2$

7.1.9. A feltétel: $x \neq \pm 1$. Szorozzuk be az egyenletet $(1-x)^2(1+x)^2$-tel. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = -\frac{3}{7}$

7.1.10. A feltétel: $x \neq -\frac{5}{2}$ *és* $x \neq -\frac{1}{2}$. Szorozzuk be az egyenletet $(2x+5)^2(2x+1)^2$-nel. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = -\frac{17}{2}$

7.1.11. A feltétel: $x \neq 1$. Szorozzuk be az egyenletet $6(x-1)^2$-nel. Rendezzük, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = \frac{5}{2}$

7.1.12. Rendezzük egy oldalra az egyenletet és alakítsuk szorzattá:

$$(3x+1)(x+1) - 7(x+1) = 0$$

$$(x+1)(3x-6) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. A megoldás: $x_1 = -1$ *és* $x_2 = 2$

7.1.13. A feltétel: $x \neq 0, x \neq -3$ *és* $x \neq -4$. Egy tört pontosan akkor 0, ha a számlálója 0 és a nevezője nem 0. A megoldás: $x_1 = -1, x_2 = 1$ *és* $x_3 = -2$

7.1.14. A feltétel: $x \neq \frac{2}{3}$. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{12x-9}{3x-2} + \frac{6x-5}{2-3x} = \frac{12x-9}{3x-2} + \frac{5-6x}{3x-2} = \frac{6x-4}{3x-2} = 2$$

Vagyis az egyenletünk:

$$2 = 2x - 2, azaz\ x = 2$$

7.1.15. A feltétel: $x \neq \frac{2}{3}$. Az előző feladat szerint:

$$2 = 3x, azaz\ x = \frac{2}{3}$$

A feltétel miatt nincs megoldás.

7.1.16. A feltétel: $x \neq -2$. A baloldalon egyszerűsíthetünk $(x+2)$-vel:

$$x + 2 = 2x + 4, azaz\ x = -2$$

A feltétel miatt nincs megoldás.

7.1.17. A feltétel: $x \neq 3$. Ekkor az egyenlet a következő alakba írható:

$$3x = x^2$$

$$x(x-3) = 0$$

A feltétel miatt csak az $x = 0$ a megoldás.

7.1.18. A zárójel felbontása után:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2 = x^3 + 3x - 2$$

$$x^2 = 1$$

A megoldás: $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$

7.1.19. Szorozzuk be az egyenletet 6-tal:

$$3x + 2y + z = 3$$

Ebből három megoldást kapunk:

$$x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = 3$$

$$x_2 = 0, y_2 = 1, z_2 = 1$$

$$x_3 = 1, y_3 = 0, z_3 = 0$$

7.1.20. Szorozzuk be az egyenletet 6-tal és alakítsuk át:

$$17x - 4 = 20 + 4x - 2y + x$$

$$12x = 24 - 2y$$

$$y = 12 - 6x$$

Vagyis az *y* osztható 6-tal. A megoldás:

$$x_1 = 2, y_1 = 0, x_2 = 1, y_2 = 6, x_3 = 0, y_3 = 12$$

7.1.21. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{\frac{3x - 4x + 2}{6}}{\frac{2x + 9x - 3}{6}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-x + 2}{11x - 3} = \frac{2}{3}$$

Ebből:

$$x = \frac{12}{25}$$

7.1.22. A feltétel: $x \neq 0$. Szorozzunk be a nevezővel, majd oldjuk meg az egyenletet:

$$x^2 + 1 + x = x^2 - 1 + x$$

$$1 \neq -1$$

Ez ellentmondás, tehát nincs megoldás.

7.1.23. A feltétel: $x \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{\frac{x+3}{3x}}$$

$$\frac{8}{3} = \frac{3x}{x+3}$$

Szorozzunk be a közös nevezővel, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = 24$

7.1.24. A feltétel: $x \neq 5, és\ x \neq -6$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x-5)(x+6)$-tal:

$$(x+6)^2 + (x-5)^2 = 2x^2 + 23x + 61$$

Bontsuk fel a zárójeleket, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = 0$

7.1.25. Bontsuk fel a zárójeleket, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x = -2$

7.2. Másodfokú egyenletek

7.2.1. Bontsuk fel a zárójeleket. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg. A megoldás:

$$x_1 = -5, x_2 = 0$$

7.2.2. A feltétel: $x \neq \pm 3$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{14}{(x-3)(x+3)} - \frac{1}{x-3} + \frac{4-x}{x+3} = \frac{7}{x+3}$$

Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x-3)(x+3)$-mal. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $x^2 + x - 20 = 0$. A megoldás: $x_1 = -5, x_2 = 4$

7.2.3. A feltétel: $x \neq \pm 2$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $3(x-2)(x+2)$-mal. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $3x^2 + 7x - 6 = 0$. A megoldás: $x_1 = -3, x_2 = \frac{2}{3}$

7.2.4. A feltétel: $x \neq 1$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $4(x^3 - 1)$-gyel. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $2x^2 + 9x + 7 = 0$. A megoldás: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{7}{2}$

7.2.5. A feltétel: $x \neq 6, x \neq 10$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x-10)(x-6)$-tal. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $x^2 - 18x + 80 = 0$. A megoldás: $x = 8$

7.2.6. A feltétel: $x \neq -3, x \neq -1$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x+1)(x+3)$-mal. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $x^2 - 3x + 2 = 0$. A megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 2$

7.2.7. A feltétel: $x \neq \pm 3$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x-3)(x+3)$-mal. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $x^2 - 11x + 30 = 0$. A megoldás: $x_1 = 5, x_2 = 6$

7.2.8. A feltétel: $x \neq 1$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x^3 - 1)$-gyel. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $9x^2 - 11x - 14 = 0$. A megoldás: $x_1 = 2, x_2 = -\frac{7}{9}$

7.2.9. A feltétel: $x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3, x \neq 4$. Szorozzunk be a közös nevezővel:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$-gyel, és redukáljuk nullára:

$$3(x-1)(x-3)(x-4) + 2(x-1)(x-2)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-3) - 4(x-2)(x-3)(x-4) = 0$$

A tagokat csoportosítsuk az alábbiak szerint:

$$3(x-1)(x-3)(x-4) - 4(x-2)(x-3)(x-4) + 2(x-1)(x-2)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

Emeljünk ki az első két tagból, illetve a harmadik és negyedik tagból:

$$(x-3)(x-4)(-x+5) + (x-1)(x-2)(x-5) = 0$$

Ebből: $(x-5)(2x-5) = 0$. A megoldás: $x_1 = 5, x_2 = \frac{5}{2}$

7.2.10. A feltétel: $x \neq -3, x \neq \frac{5}{2}$. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{2x^2-9x+10}{2x^2+x-15}=\frac{2(x-2)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{2(x+3)\left(x-\frac{5}{2}\right)}=\frac{x-2}{x+3}$$

7.2.11. A feltétel: $x\neq 4, x\neq -\frac{3}{2}$. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{2x^2+7x+6}{12+5x-2x^2}=\frac{(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(4-x)\left(x+\frac{3}{2}\right)}=\frac{x+2}{4-x}$$

7.2.12. A feltétel: $x\neq 5, x\neq -\frac{4}{3}$. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{6x^2+5x-4}{3x^2+19x+20}=\frac{(2x-1)(3x+4)}{(x+5)(3x+4)}=\frac{2x-1}{x+5}$$

7.2.13. Vezessünk be új ismeretlent: $y=x^2+2x$. Ezt felhasználva: $y_1=3$ *és* $y_2=-4$. Ebből: $x_1=1$ *és* $x_2=-3$

7.2.14. Vezessünk be új ismeretlent: $y=x^2-4x$. Ezt felhasználva:

$y_1=-1+\sqrt{3}$ *és* $y_2=1-\sqrt{3}$. Ebből:

$$x_1=2+\sqrt{3+\sqrt{3}}, x_2=2-\sqrt{3+\sqrt{3}}, x_3=2+\sqrt{3-\sqrt{3}}, x_4=2-\sqrt{3-\sqrt{3}}$$

7.2.15. Vezessünk be új ismeretlent: $y=x^2-2x-3$. Ezt felhasználva:

$$y(y+4)=45, azaz\ y_1=5\ \text{és}\ y_2=-9$$

Ebből: $x_1=4$ *és* $x_2=-2$

7.2.16. Vezessünk be új ismeretlent: $y=x^2-3x+1$. Ezt felhasználva:

$$\frac{1}{y}-y+\frac{1}{2}=0, azaz\ y_1=2\ \text{és}\ y_2=-\frac{1}{2}$$

Ebből:

$$x_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}, x_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}, x_3=\frac{3+\sqrt{3}}{2}, x_4=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

7.2.17. Az értékkészletet vizsgáljuk. A feladatnak nincs megoldása. Ha $x \geq 1$, akkor a baloldal értéke legalább 8, a jobb oldal értéke pedig legfeljebb 7.

7.2.18. Az értékkészletet vizsgáljuk. A baloldal értéke $2x^2 + x \geq 10$, a jobb oldal értéke

$10 - y^2 \leq 10$. Ez csak úgy teljesül, ha mind a két oldal értéke 10. A megoldás: $x = 2, y = 0$

7.2.19. Az értékkészletet vizsgáljuk. Rendezzük nullára és alakítsuk át az egyenletet:

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

A megoldás: $x = -1, y = 2$

7.2.20. Az értékkészletet vizsgáljuk. A feltétel: $x \geq 3$. A baloldal értéke:

$x^2 + 3x + \sqrt{x - 3} \geq 18$. A jobb oldal 18. A megoldás: $x = 3$

7.2.21. Az értékkészletet vizsgáljuk. A feltétel: $x \geq 1$. A baloldal értéke:

$x^2 + 4x + \sqrt{x - 1} \geq 5$. A jobb oldal értéke $5 - y^2 \leq 5$. A megoldás: $x = 1, y = 0$

7.2.22. Az értékkészletet vizsgáljuk. A feltétel: $x \geq 2$. A baloldal értéke:

$3x^2 + 2x + 2\sqrt{x - 2} - 4 \geq 12$. Alakítsuk át a jobb oldalt: $-2(y - 3)^2 + 12 \leq 12$.

A megoldás: $x = 2, y = 3$

7.2.23. Rendezzük nullára az egyenletet és alakítsuk át:

$$(x + 2)^2 + \sqrt{x^2 + 6x + 1} + y^2 = 0$$

Nemnegatív tagok összege csak akkor lehet 0, ha minden tag 0. Azonban az $x = -2$ nem felel meg, vagyis nincs megoldás.

7.2.24. Az értelmezési tartományt vizsgáljuk. A feltétel: $x \geq 5$ *és* $x \leq 4{,}5$. Ez ellentmondás, tehát nincs megoldás.

7.2.25. A monotonitást vizsgáljuk. A feltétel: $x \geq 3$. Nézzük a következőt:

$x^2 - 2x - 4 = (x - 1)^2 - 5 \geq -1, ha\ x \geq 3$. A baloldal nemnegatív és monoton nő, tehát csak az $x = 3$ lehet a megoldás.

7.2.26. A feltétel: $x \geq 2$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} + (y-2)^2 + x^2 = 5$$

Mivel $x \geq 2$, a baloldal értéke legalább 5. A megoldás: $x = 2, y = 2$

7.2.27. A gyök alatti kifejezést alakítsuk át, és állapítsuk meg az értelmezési tartományt:

$$-x^2 + 11x - 24 = -(x-3)(x-8) \geq 0, vagyis\ 3 \leq x \leq 8$$

Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sqrt{-x^2 + 11x - 24} + x^2 + 3x + (y-3)^2 = 18$$

A baloldal értéke legalább 18. A megoldás: $x = 3, y = 3$

7.3. Paraméteres egyenletek

Elsőfokú egyenletek

7.3.1. Alakítsuk át az egyenletet:

$$1 + \frac{7a}{6b} - \frac{3ax}{2b^2} = 1 - \frac{ax}{b^2 - ab}$$

$$\frac{7a}{6b} = \frac{3ax}{2b^2} - \frac{ax}{b^2 - ab}$$

$$\frac{7a}{6b} = \frac{a(b-3a)}{2b^2(b-a)} \cdot x$$

A megoldás:

$$x = \frac{7b(b-a)}{3(b-3a)}$$

7.3.2. Alakítsuk át az egyenletet:

$$(ax-b)(a-b) + (bx+a)(a+b) = a^2 + b^2$$

$$a^2x + b^2x = 0$$

$$x(a^2+b^2)=0$$

$$x=0$$

7.3.3. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{x-(a+b+c)}{c}+1+\frac{x-(a+b+c)}{a}+1+\frac{x-(a+b+c)}{b}+1=3$$

$$[x-(a+b+c)]\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0$$

A megoldás: $x=a+b+c$

7.3.4. Alakítsuk át az egyenletet. A közös nevező: $6cd(2c+3d)(2c-3d)$

A megoldás:

$$x=\frac{c(4c^2-9d^2)}{8c^2+27d^2}$$

7.3.5. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{1-x}{1-n}+\frac{2n^2(x-1)}{1-n^4}=\frac{2x-1}{1-n^4}-\frac{1-x}{1+n}$$

$$(1-x)\left(\frac{1}{1-n}+\frac{1}{1+n}\right)+\frac{1}{1-n^4}[2n^2(x-1)-(2x-1)]=0$$

$$(1-x)\cdot\frac{2}{1-n^2}+\frac{1}{1-n^4}\cdot(2n^2x-2n^2-2x+1)=0$$

$$2(1-x)(1+n^2)+2n^2x-2n^2-2x+1=0$$

$$4x=3$$

$$x=\frac{3}{4}$$

7.3.6. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{3ab(a+1)^2+a^2+2a+1-2a-1}{a(a+1)^2}\cdot x=\frac{a[3b(a+1)^2+a]}{(a+1)^3}$$

$$\frac{a[3b(a+1)^2+a]}{a(a+1)^2}\cdot x=\frac{a[3b(a+1)^2+a]}{(a+1)^3}$$

$$x=\frac{a}{a+1}$$

7.3.7. Alakítsuk át az egyenletet az előző feladathoz hasonlóan:

$$\frac{ab[3c(a+b)^2+ab]}{(a+b)^3}=\frac{a[3c(a+b)^2+ab]}{a(a+1)^2}\cdot x$$

A megoldás:

$$x=\frac{ab}{a+b}$$

7.3.8. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(a+b)^2(a-b)$-vel

A megoldás:

$$x=\frac{m(a+b)}{a}$$

7.3.9. Alakítsuk át az egyenletet.

$$\frac{m}{x}+\frac{x}{m}+\frac{m(x-m)}{x(x+m)}-\frac{x(x+m)}{m(x-m)}=-\frac{mx}{x^2-m^2}-2$$

Szorozzunk be a közös nevezővel: $xm(x^2-m^2)$-vel. Rendezés után:

$$m^2x^2-4m^3x=0$$

$$x(m^2x-4m^3)=0$$

Ebből: $x_1=0$, de ez hamis gyök, $x_2=4m$

7.3.10. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: (b^4-x^2)-tel.

Rendezés után:

$$2x(a^2+b^2-2ab)=2(a^2-b^2)$$

$$x=\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{a+b}{a-b}$$

7.3.11. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x^2 - a^2)(x + n)$-nel.

Rendezés után:

$$x = \frac{n^2}{a}$$

7.3.12. Alakítsuk át az egyenletet. Rendezés után:

$$\frac{2a}{ax + 1} : \frac{2}{ax + 1} = \frac{x}{2}$$

A megoldás: $x = 2a$

7.3.13. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{a + x}{a^2 + x^2 + ax} + \frac{a - x}{a^2 + x^2 - ax} = \frac{3a}{x(a^4 + a^2x^2 + x^4)}$$

A baloldalon hozzunk közös nevezőre:

$$(a^2 + x^2 + ax)(a^2 + x^2 - ax) = (a^2 + x^2)^2 - (ax)^2 = a^4 + a^2x^2 + x^4$$

Ekkor:

$$\frac{2a^3}{a^4 + a^2x^2 + x^4} = \frac{3a}{x(a^4 + a^2x^2 + x^4)}$$

A megoldás:

$$x = \frac{3}{2a^2}$$

7.3.14. Oldjuk meg az egyenletet:

$$m^2x - m^2 = 4mx - 2m - 4x$$

$$x(m^2 - 4m + 4) = m^2 - 2m$$

$$x(m - 2)^2 = m(m - 2)$$

1. eset: Ha $m = 2$, akkor az egyenlet:

$$4(x - 1) = 4(2x - 1) - 4x$$

$$4x = 4x$$

Vagyis azonosság, tehát minden egész *x* megoldása az egyenletnek.

2. eset: Ha $m \neq 2$, akkor az egyenlet:

$$x(m-2) = m$$

$$x = \frac{m}{m-2} = 1 + \frac{2}{m-2}$$

Ez a kifejezés pontosan akkor egész, ha $(m-2)$ osztója 2-nek, azaz:

$$m = 3, 1, 4, 0$$

A megoldás:

$$\text{Ha } m = 0, 1, 3, 4, 2, akkor\ x = 0, -1, 3, 2, bármely\ egész\ szám.$$

7.3.15. A tört miatt: $x \neq \pm 2a$. Alakítsuk át az egyenletet, majd szorozzunk be a közös nevezővel:

$$\frac{x}{2a+x} + \frac{2a+x}{2a-x} = \frac{16a^2}{4a^2 - x^2}$$

$$x(2a-x) + (2a+x)^2 = 16a^2$$

$$6ax - 12a^2 = 0$$

$$6a(x-2a) = 0$$

A megoldás: Ha $a = 0$, akkor minden *x* megoldása az egyenletnek. Nincs más megoldás.

Másodfokú egyenletek

7.3.16. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $n(nx-2)$

$$(n-1)x^2 - 2x - (n+1) = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{n+1}{n-1} \text{ és } x_2 = -1$$

7.3.17. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $a(a-x)^2$

$$(a+1)x^2 - 2ax + (a-1) = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{a-1}{a+1} \text{ és } x_2 = 1$$

7.3.18. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x-a)^2$

$$(x-a)^2 - 2b(x-a) - (a^2 - b^2) = 0$$

Ebből: $x - a = b \pm a$

A megoldás: $x_1 = 2a + b$ és $x_2 = b$

7.3.19. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $nx(x-2)(x+2)$

$$x^2 - (2-n)x - (2n^2 + 4n) = 0$$

A megoldás: $x_1 = n + 2$ és $x_2 = -2n$

7.3.20. Rendezzük 0-ra az egyenletet és alakítsuk szorzattá:

$$\frac{a+x-2n}{2a-n} - \frac{a-2n+x}{x} = 0$$

$$(a-2n+x)\left(\frac{1}{2a-n} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $a - 2n + x = 0$. A megoldás: $x_1 = 2n - a$

2. eset: $\frac{1}{2a-n} - \frac{1}{x} = 0$. A megoldás: $x_2 = 2a - n$

7.3.21. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $x^2(n-1)^2$

$$(n-1)^2x^2 - a(n-1)x + (a-1) = 0$$

Tekintsük az $(n-1)x$-et ismeretlennek, mert így egyszerűbb megoldani:

$$[(n-1)x]^2 - a[(n-1)x] + (a-1) = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{a-1}{n-1} \text{ és } x_2 = \frac{1}{n-1}$$

7.3.22. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be $(a-x)^2$-nel:

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{5}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2$$

$$\frac{4}{9}\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

Vonjunk gyököt mind a két oldalból:

1. eset:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a-x}{x} = \frac{a}{a+b}$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{2a(a+b)}{5a+2b}$$

2. eset:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a-x}{x} = -\frac{a}{a+b}$$

A megoldás:

$$x_2 = \frac{2a(a+b)}{2b-a}$$

7.3.23. Alakítsuk át a második tört nevezőjét:

$$(1+ax)^2-(a+x)^2=1+a^2x^2-a^2-x^2=1-a^2-(x^2-a^2x^2)=$$

$$1-a^2-x^2(1-a^2)=(1-a^2)(1-x^2)$$

Végezzük el az osztást. Ekkor:

$$x(x+1)=\frac{ab}{(b-a)^2}$$

A megoldás:

$$x_1=\frac{a}{b-a}\ \text{és}\ x_2=\frac{b}{a-b}$$

7.3.24. A Viéte-formula szerint: $x_1\cdot x_2=12$. A feladat szerint: $x_1-x_2=1$. Ebből:

$$x_{1_1}=4, x_{2_1}=3, x_{1_2}=-3, x_{2_2}=-4$$

Ekkor: $b=-(x_1+x_2)$. A megoldás: $b=\pm 7$.

7.3.25. A Viéte-formula szerint: $x_1\cdot x_2=\frac{1}{5}$. A feladat szerint: $x_1-x_2=1$. Az előző feladatban alkalmazott módon kapjuk, hogy:

$$x_1+x_2=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}\ \text{és}\ x_1+x_2=\frac{b}{5}$$

A megoldás: $b=\pm 3\sqrt{5}$.

7.3.26. A Viéte-formula és a feladat szerint:

$$\begin{cases} x_1^2+x_2^2=\frac{7}{4} \\ x_1x_2=a^2 \\ x_1+x_2=3a \end{cases}$$

Használjuk fel a következő összefüggést:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1^2+x_2^2$$

Ekkor:

$$(3a)^2 - 2a^2 = \frac{7}{4}, azaz\ 7a^2 = \frac{7}{4}$$

A megoldás:

$$a = \pm\frac{1}{2}$$

7.3.27. A Viéte-formula szerint:

$$\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek két megoldása van:

1. $p = 0$ és $q = 0$. Ekkor az $x^2 = 0$ egyenletet kapjuk.

2. $p = 1$ és $q = -2$. Ekkor az $x^2 + x - 2 = 0$ egyenletet kapjuk.

7.3.28. A keresett egyenlet legyen: $y^2 + px + q = 0$. Ennek gyökei a feladat szerint:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_2} \text{ és } y_2 = \frac{x_2}{x_1}$$

A Viéte-formula szerint:

1.

$$p = -(y_1 + y_2) = -\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = -\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} =$$

$$= -\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b^2 - 2ac}{ac}$$

2.

$$q = y_1 y_2 = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_1} = 1$$

A megoldás:

$$y^2 - \frac{b^2 - 2ac}{ac} \cdot y + 1 = 0$$

7.3.29. A másodfokú egyenlet gyökei akkor egyenlők, ha a diszkrimináns 0. Vagyis:

$$\left(b\sqrt{b^2-3}\right)^2-4=0$$

$$b^4-3b^2-4=0$$

Ennek a redukálható negyedfokú egyenletnek két valós és két komplex gyöke van. A valós gyökök: $b_1=2$ és $b_2=-2$. Ekkor a két egyenlet:

$$x^2+4x+4=0 \text{ és } x^2-4x+4=0$$

Ekkor a gyökök:

$$x_1=x_2=-2, illetve\ x_1=x_2=2$$

7.3.30. Az egyenlet gyökei:

$$x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-m^2+1}=m\pm1$$

A feladat szerint:

$$\begin{cases}-2<m+1<4\\-2<m-1<4\end{cases}$$

Vagyis:

$$\begin{cases}-3<m<3\\-1<m<5\end{cases}$$

A megoldás: $-1<m<3$

7.3.31. A Viéte-formula szerint:

$$\begin{cases}x_1+x_2=a^2+b^2=5\\x_1x_2=ab=2\end{cases}$$

Ebből: $a_1=1, b_1=2\ vagy\ a_2=2, b_2=1$

7.3.32. Az egyenletnek akkor van egy valós gyöke, ha a diszkrimináns 0. Vagyis:

$$156a^2-8a-4=0$$

Ebből:

$$a_1 = \frac{2}{11} \text{ és } a_2 = -\frac{2}{15}$$

7.3.33. Használjuk fel a Viéte-formulát és a következő összefüggést:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (p-2)^2 - 2(p-3) = p^2 - 6p + 10 = (p-3)^2 + 1$$

A $(p-3)^2 + 1$ kifejezés akkor lesz minimális, ha $p = 3$.

7.3.34. Lásd az előző feladatot! A megoldás: $p = \frac{5}{8}$.

7.3.35. Használjuk fel a Viéte-formulát és a feladat feltételét:

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1x_2 = \dfrac{2}{k^2 - 5k + 3} \\ x_1 + x_2 = \dfrac{-(3k-1)}{k^2 - 5k + 3} \end{cases}$$

A megoldás: $k = \frac{2}{3}, x_1 = -3, x_2 = -6$

7.4. Abszolutértékes egyenletek

Elsőfokú egyenletek

7.4.1. A kezdeti feltétel: $x \neq 1$. Ekkor: $|3x - 2| = 2|x - 1|$

1. eset: Ha $\frac{2}{3} < x < 1$, akkor $3x - 2 = -2x + 2$. Ebből: $x = \frac{4}{5}$

2. eset: Ha $1 < x$, akkor $3x - 2 = 2x - 2$. Ebből nem kapunk megoldást.

3. eset: Ha $x \leq \frac{2}{3}$, akkor $-3x + 2 = -2x + 2$. Ebből: $x = 0$

4. eset: Ha $x < 0$, akkor $-3x + 2 = -2x + 2$. Ebből nem kapunk megoldást.

7.4.2. Megoldhatjuk grafikusan és algebrai úton is.

A kezdeti feltétel: $|x| \neq 1$. Ekkor: $|3|x| - 2| = 2\big||x| - 1\big|$

Az $x = 0$ megoldás. Ha $0 < x < \frac{1}{2}$, illetve $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$, akkor nincs megoldás. Ha $x > \frac{2}{3}$, akkor $3x - 2 = 2x - 2$. Ebből: $x = \frac{4}{5}$. A szimmetria miatt következik, hogy az $x = -\frac{4}{5}$ is megoldás.

7.4.3. Megoldhatjuk grafikusan és algebrai úton is.

A kezdeti feltétel: $|x| \neq 1$. Ekkor: $|3|x| + 2| = 3\big||x| - 1\big|, azaz\ |x| + \frac{2}{3} = \big||x| - 1\big|$

Ha $0 \leq x < 1$, akkor $|x - 1| = -x + 1$, ezért: $x + \frac{2}{3} = -x + 1$. Ebből: $x = \frac{1}{6}$. Ha $x > 1$, akkor $x + \frac{2}{3} = x - 1$, ekkor nincs megoldás. Ha $x < -1$, akkor a megoldás: $x = -\frac{1}{6}$

7.4.4. Ha $x < -\frac{2}{3}$, akkor $-2x + 1 - 3x - 2 - x = 3$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$, akkor $-2x + 1 + 3x + 2 - x = 3$. Ekkor a megoldás: $-\frac{2}{3} \leq x \leq 0$

Ha $0 < x \leq \frac{1}{2}, illetve\ \frac{1}{2} < x$, akkor nincs megoldás.

7.4.5. Ha $x < 1$, akkor: $-x + 1 + 2x - 4 - 3x + 9 = 4$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $1 \leq x \leq 2$, akkor: $x - 1 + 2x - 4 - 3x + 9 = 4$. Ekkor a megoldás: $1 \leq x \leq 2$

Ha $2 < x < 3$, akkor: $x - 1 - 2x + 4 - 3x + 9 = 4$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $3 \leq x$, akkor: $x - 1 - 2x + 4 + 3x - 9 = 4$. Ekkor a megoldás: $x = 5$

7.4.6. Az eredeti egyenlettel ekvivalens $\big|2 - 3|x|\big| = \big|1 + |x|\big|$ egyenletet vizsgáljuk. A jobb oldalon álló $\big|1 + |x|\big| = 1 + |x|$, mert $1 + |x| > 0$.

Ha $x \geq \frac{2}{3}$, akkor $3x - 2 = x + 1$. Ekkor a megoldás: $x = \frac{3}{2}$

Ha $0 \leq x < \frac{2}{3}$, akkor $-3x + 2 = x + 1$. Ekkor a megoldás: $x = \frac{1}{4}$

Ha $x \leq -\frac{2}{3}$, akkor a megoldás: $x = -\frac{3}{2}$

Ha $-\frac{2}{3} < x < 0$, akkor a megoldás: $x = -\frac{1}{4}$

7.4.7. Ha $x \leq 2$, akkor: $-x + 2 - x + 3 - 2x + 8 = 9$. Ekkor a megoldás: $x = 1$

Ha $2 < x < 3$, akkor: $x - 2 - x + 3 - 2x + 8 = 9$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $3 \leq x \leq 4$, akkor: $x - 2 + x - 3 - 2x + 8 = 9$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $4 < x$, akkor: $x - 2 + x - 3 + 2x - 8 = 9$. Ekkor a megoldás: $x = \frac{11}{2}$

7.4.8. Ha $x \leq \frac{1}{4}$, akkor: $-4x + 1 + 2x - 3 - x + 2 = 0$. Ekkor a megoldás: $x = 0$

Ha $\frac{1}{4} < x < \frac{3}{2}$, akkor: $4x - 1 + 2x - 3 - x + 2 = 0$. Ekkor a megoldás: $x = \frac{2}{5}$

Ha $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, akkor: $4x - 1 - 2x + 3 - x + 2 = 0$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $2 < x$, akkor: $4x - 1 - 2x + 3 + x - 2 = 0$. Ekkor nincs megoldás.

7.4.9. Ha $x \leq -2$, akkor: $-x + 1 - x - 2 + x - 3 = 4$. Ekkor a megoldás: $x = -8$

Ha $-2 < x < 1$, akkor: $-x + 1 + x + 2 + x - 3 = 4$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $1 \leq x \leq 3$, akkor: $x - 1 + x + 2 + x - 3 = 4$. Ekkor a megoldás: $x = 2$

Ha $3 < x$, akkor: $x - 1 + x + 2 - x + 3 = 4$. Ekkor nincs megoldás.

7.4.10. Ha $x \leq 2$, akkor: $-x + 2 - x + 3 - 2x + 16 = 9$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $2 < x < 3$, akkor: $x - 2 - x + 3 - 2x + 16 = 9$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $3 \leq x \leq 8$, akkor: $x - 2 + x - 3 - 2x + 16 = 9$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $8 < x$, akkor: $x - 2 + x - 3 + 2x - 16 = 9$. Ekkor nincs megoldás.

7.4.11. Ha $x \leq 2$, akkor: $-x + 2 - x + 4 + 2x - 6 = 2$. Ekkor nincs megoldás.

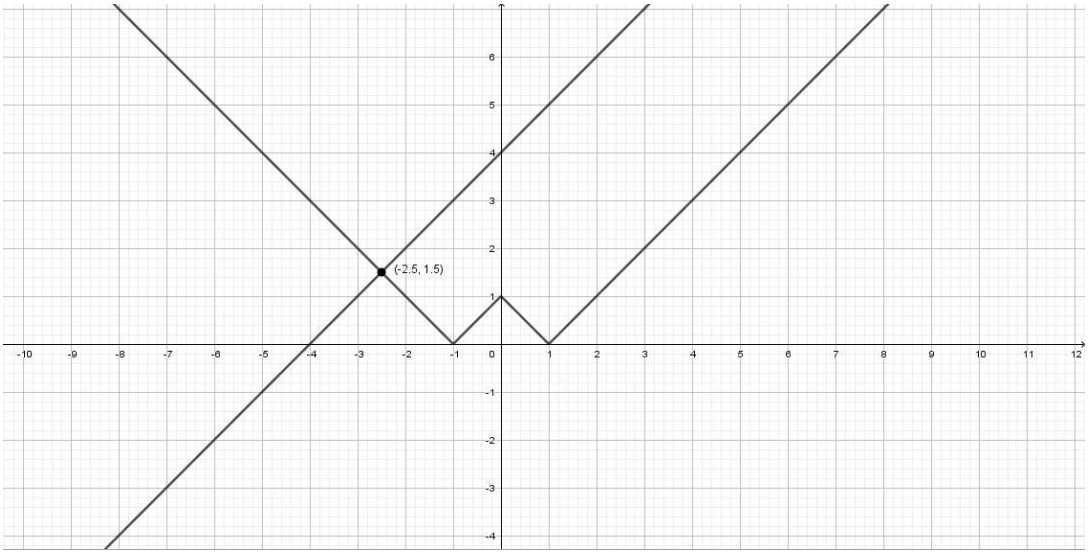
Ha $2 < x \leq 3$, akkor: $x - 2 - x + 4 + 2x - 6 = 2$. Ebből: $x = 3$

Ha $3 < x \leq 4$, akkor: $x - 2 - x + 4 - 2x + 6 = 2$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $4 < x$, akkor: $x - 2 + x - 4 - 2x + 6 = 2$. Ekkor nincs megoldás.

7.4.12. Megoldást csak akkor kapunk, ha $x < -1$. Ekkor: $-x - 1 = x + 4$. Ebből: $x = -\frac{5}{2}$.

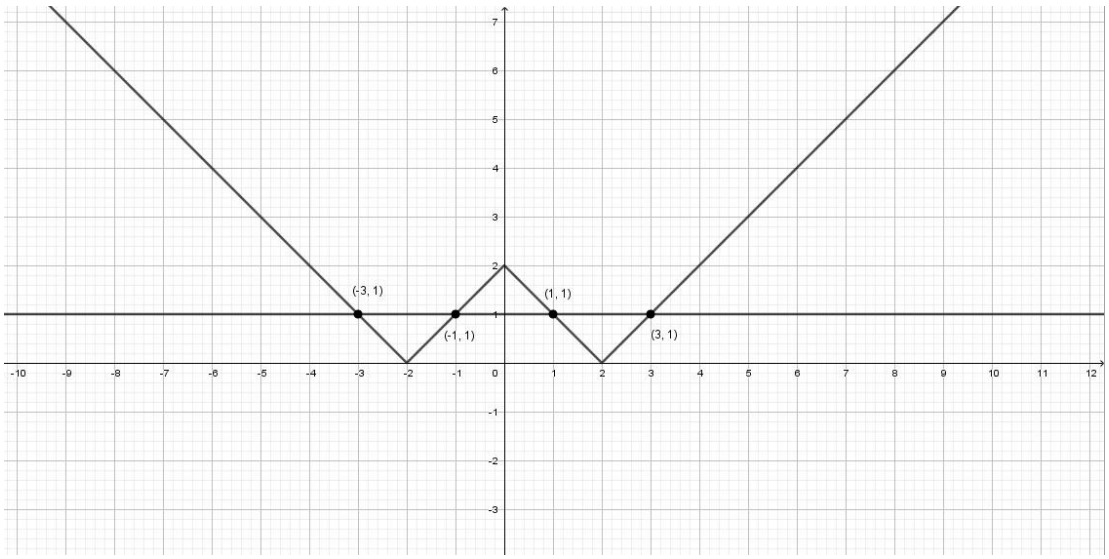
Ha $-1 \leq x \leq 0, illetve\ 0 < x$, akkor nincs megoldás.



7.4.13. Ha $2 \leq x$, akkor $x - 2 = 1$. Ebből: $x_1 = 3$.

Ha $0 \leq x < 2$, akkor $-x + 2 = 1$. Ebből: $x_2 = 1$. A szimmetria miatt kapjuk, hogy ha

$x \leq -2$, akkor $x_3 = -3$, illetve ha $-2 < x < 0$, akkor $x_4 = -1$.



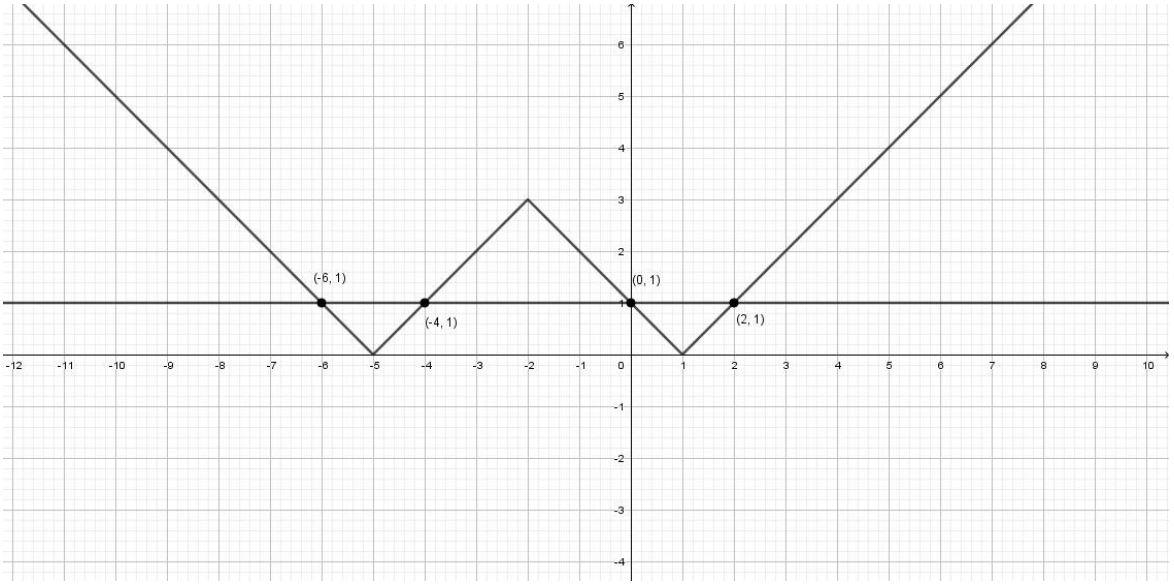
7.4.14. Ábrázoljuk a baloldalt, majd meghatározzuk az $y = 1$ egyenessel való metszéspontokat. Ezek:

A $-x - 5 = 1$, ebből $x_1 = -6$.

Az $x + 5 = 1$, ebből $x_2 = -4$.

A $-x + 1 = 1$, ebből $x_3 = 0$.

Az $x - 1 = 1$, ebből $x_4 = 2$.



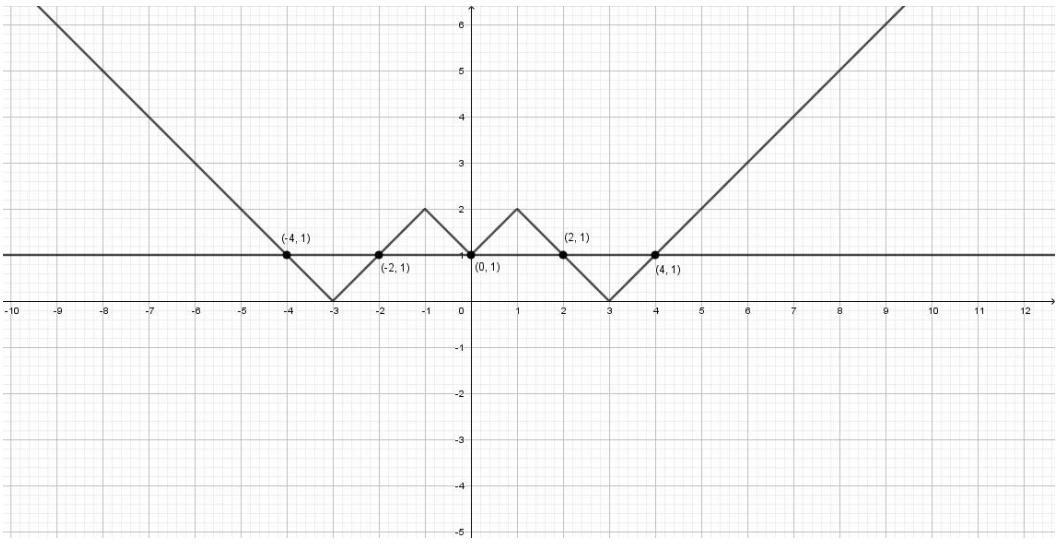
7.4.15. Ábrázoljuk a baloldalt, majd meghatározzuk az $y = 1$ egyenessel való metszéspontokat. A függvény szimmetrikus az *y* tengelyre, ezért az $x \geq 0$ esetet vizsgáljuk.

Ha $0 \leq x < 1$, akkor $2 - 1 + x = 1$. Ebből: $x_1 = 0$.

Ha $1 \leq x \leq 3$, akkor $2 + 1 - x = 1$. Ebből: $x_2 = 2$.

Ha $3 < x$, akkor $-2 - 1 + x = 1$. Ebből: $x_3 = 4$.

A szimmetria miatt: $x_4 = -2$ és $x_5 = -4$ is megoldás.

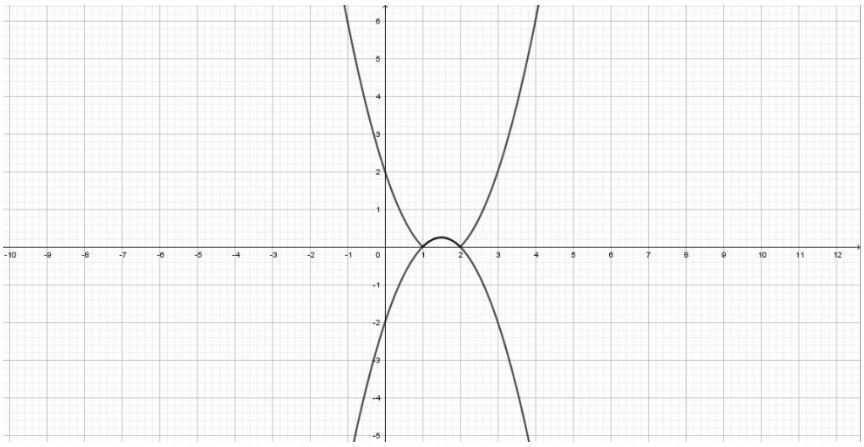


Másodfokú egyenletek

7.4.16. Az egyenlet a következő alakba írható:

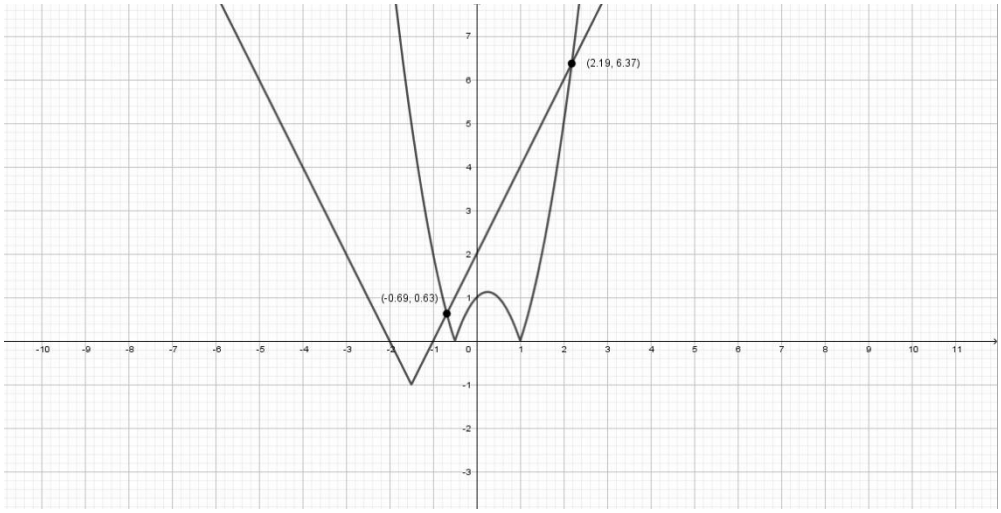
$$|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$$

Ábrázoljuk mind a két oldalt:



Az $x^2 - 3x + 2 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

7.4.17. A feladatot esetszétválasztással oldjuk meg. Ebben segíthet a következő ábra:



A $2x^2 - x - 1 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 1$ és $x_2 = -\frac{1}{2}$.

A $2x + 3 \geq 0, ha\ x \geq -\frac{3}{2}, illetve\ 2x + 3 < 0, ha\ x < -\frac{3}{2}$.

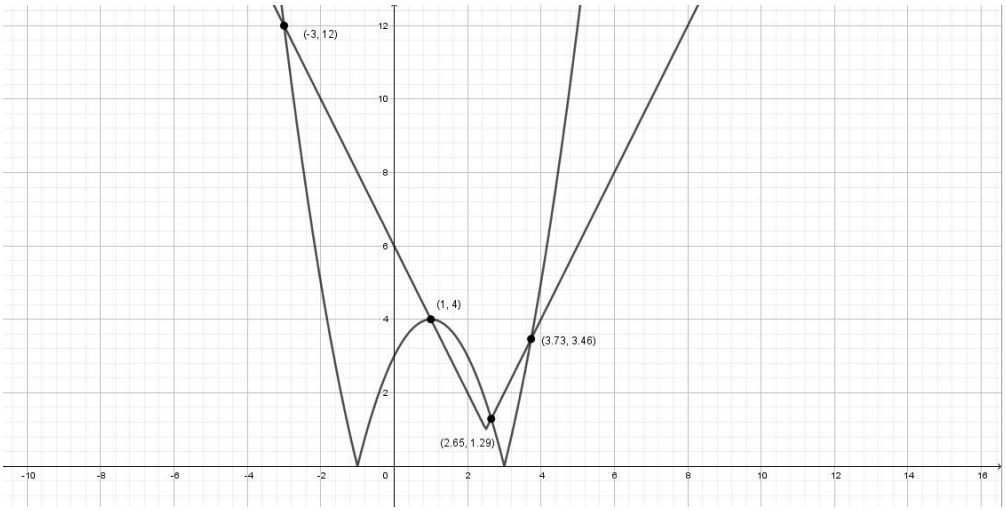
1. eset: Ha $x \geq 1$, akkor $2x + 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$. Ebből: $x_1 = \frac{3+\sqrt{33}}{4}$

2. eset: Ha $-\frac{1}{2} < x < 1$, akkor $2x + 2 = -2x^2 + x + 1$. Ebből nincs megoldás.

3. eset: Ha $-\frac{3}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$, akkor $2x + 2 = 2x^2 - x - 1$. Ebből: $x_2 = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$

4. eset: Ha $x < -\frac{3}{2}$, akkor $-2x - 3 - 1 = 2x^2 - x - 1$. Ebből nincs megoldás.

7.4.18. A feladatot esetszétválasztással oldjuk meg. Ebben segíthet a következő ábra:



$$|2x - 5| = \begin{cases} 2x - 5, ha\ x \geq 2{,}5 \\ -2x + 5, ha\ x < 2{,}5 \end{cases}$$

Az $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, ha $x \geq 3\ vagy\ x \leq -1\ és\ x^2 - 2x - 3 < 0, ha\ -1 < x < 3$.

1. eset: Ha $x \leq -1$, akkor $x^2 - 2x - 3 = -2x + 5 + 1$. Ebből: $x_1 = -3$

2. eset: Ha $-1 < x < 2{,}5$, akkor $-x^2 + 2x + 3 = -2x + 6$. Ebből: $x_2 = 1$

3. eset: Ha $2{,}5 \leq x < 3$, akkor $-x^2 + 2x + 3 = 2x - 4$. Ebből: $x_3 = \sqrt{7}$

4. eset: Ha $3 \leq x$, akkor $x^2 - 2x - 3 = 2x - 5 + 1$. Ebből: $x_4 = 2 + \sqrt{3}$

7.4.19. Az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = -1\ és\ x_2 = 3$. Az $x^2 - 2x + 5 = 0$ egyenlet diszkriminánsa: $D < 0$, ezért elegendő a következő egyenletet megoldani:

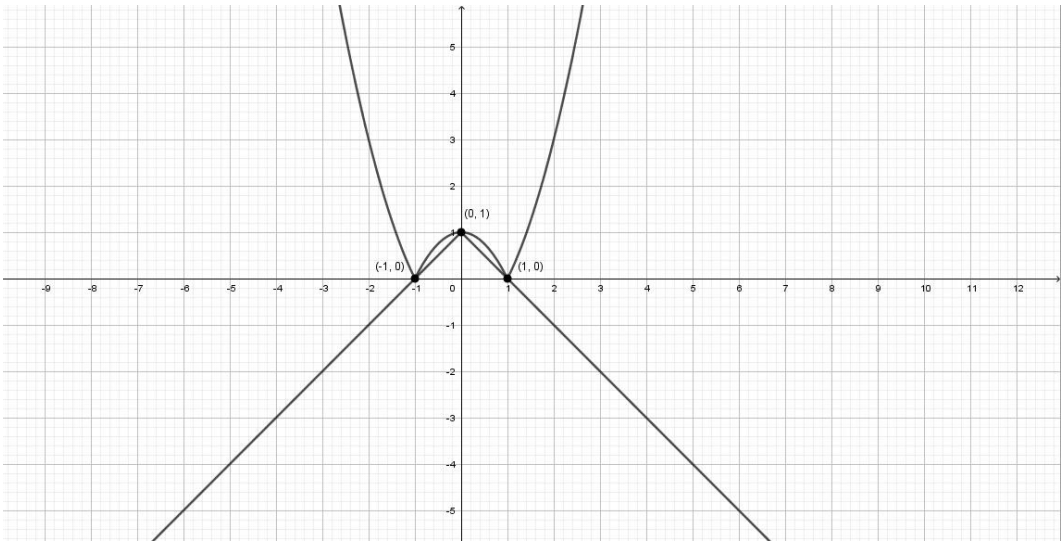
$$|x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x + 5$$

Tehát elég két esetet vizsgálni:

1. eset: Ha $x^2 - 2x - 3 \geq 0$, akkor $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 5$. Ebből nincs megoldás.

2. eset: Ha $x^2 - 2x - 3 < 00$, akkor $-x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x + 5$. Ebből: $x = 1$

7.4.20. A feladatot esetszétválasztással oldjuk meg. Ebben segíthet a következő ábra:



Ha $|x| > 1$, akkor nincs megoldás. Ha $|x| = 0$, akkor $x_1 = 0$ megoldás.

Ha $|x| \leq 1$, akkor $x^2 - 1 = 1 - |x|, vagyis\ x^2 + |x| - 2 = 0$.

Ha $0 \leq x \leq 1$, akkor $x^2 + x - 2 = 0$. Ebből: $x_2 = 1$.

Ha $-1 \leq x < 0$, akkor $x^2 - x - 2 = 0$. Ebből: $x_3 = -1$.

7.4.21. Meghatározzuk a másodfokú egyenletek gyökeit.

Az $x^2 - 4x + 3 = 0$ gyökei $x_1 = 1\ és\ x_2 = 3$. Az $x^2 - 6x + 8 = 0$ gyökei $x_1 = 2\ és\ x_2 = 4$

1. eset: Ha $x \leq 1$, akkor $x^2 - 4x + 3 + x^2 - 6x + 8 = \frac{3}{2}$. Ebből nincs megoldás.

2. eset: Ha $1 < x \leq 2$, akkor $-x^2 + 4x - 3 + x^2 - 6x + 8 = \frac{3}{2}$. Ebből: $x_1 = \frac{7}{4}$

3. eset: Ha $2 < x \leq 3$, akkor $-x^2 + 4x - 3 - x^2 + 6x - 8 = \frac{3}{2}$. Ebből: $x_2 = \frac{5}{2}$

4. eset: Ha $3 < x \leq 4$, akkor $x^2 - 4x + 3 - x^2 + 6x - 8 = \frac{3}{2}$. Ebből: $x_3 = \frac{13}{4}$

5. eset: Ha $4 < x$, akkor $x^2 - 4x + 3 + x^2 - 6x + 8 = \frac{3}{2}$. Ebből nincs megoldás.

7.5. Irracionális egyenletek

7.5.1. a, A baloldal akkor van értelmezve, ha $2 \leq x \leq 3$. Azonban ezekre az értékekre a jobb oldal negatív lesz.

b, A baloldalon lévő összeg értéke legalább $1 + \sqrt{2}$, ez pedig nagyobb 2-nél.

7.5.2. A baloldalon lévő összeg szigorúan monoton növekvő, ha $x \geq 5$. Ezért csak két megoldás lehetséges: $x_1 = 5 \text{ és } x_2 = -5$.

7.5.3. A baloldali kifejezés növekvő, míg a jobb oldali csökkenő. Ezért csak egy megoldása lehet: $x = 1$.

7.5.4. A baloldal akkor van értelmezve, ha $2 \leq x \leq 3$. Ekkor: $0 \leq \sqrt{x-2} \leq 1$, ezért:

$x - 2 \leq \sqrt{x-2}$. Ehhez hasonlóan: $3 - x \leq \sqrt{3-x}$. A utóbbi két egyenlőtlenséget összeadva azt kapjuk, hogy az egyenlet baloldala legalább 1. A jobb oldalt átalakítva:

$$x^2 - 5x + 7 = (x-2)(x-3) + 1 \leq 1, ha\ 2 \leq x \leq 3$$

Ezért az egyenletnek csak akkor lehet megoldása, ha mind a két oldalon 1 áll. A megoldás:

$$x_1 = 2 \text{ és } x_2 = 3$$

7.5.5. A gyökös kifejezésekre igaz a következő:

$$\sqrt{x^2 + x - 1} \leq \frac{(x^2 + x - 1) + 1}{2} = \frac{x^2 + x}{2}$$

$$\sqrt{-x^2 + x + 1} \leq \frac{(-x^2 + x + 1) + 1}{2} = \frac{-x^2 + x + 2}{2}$$

Ebből:

$$x^2 - x + 2 = \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{-x^2 + x + 1} \leq \frac{x^2 + x}{2} + \frac{-x^2 + x + 2}{2} = x + 1$$

$$x^2 - x + 2 \leq x + 1$$

$$(x-1)^2 \leq 0$$

A megoldás: $x = 1$

7.5.6. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sqrt{3(x+1)^2+4}+\sqrt{5(x+1)^2+9}=5-(x+1)^2$$

A baloldal legalább 5, a jobb oldal legfeljebb 5 lehet. A megoldás: $x=-1$

7.5.7. Vezessünk be egy új ismeretlent:

$$\sqrt{2x+1}=a\geq 0, azaz\ 2x=a^2-1$$

Ekkor:

$$\sqrt{a^2-1+17-8a}+\sqrt{5+a^2-1+4a}=8$$

$$\sqrt{a^2-8a+16}+\sqrt{a^2+4a+4}=8$$

$$\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{(a+2)^2}=8$$

$$|a-4|+|a+2|=8$$

Most három esetet kellene vizsgálni: $a\geq 4, -2\leq a<4$ *és* $a<-2$. Mivel $a\geq 0$, ezért a harmadik eset nem felel meg.

1. eset: $a\geq 4$. Ekkor:

$$a-4+a+2=8, azaz\ a=5$$

Visszahelyettesítve: $\sqrt{2x+1}=5, azaz\ x=12$.

2. eset: $0\leq a<4$. Ekkor:

$$-a+4+a+2=8, azaz\ 6\neq 8$$

Ebben az esetben nincs megoldás.

7.5.8. Vegyünk el mind a két oldalból $(4x+12)$-t. Ekkor:

$$10\sqrt{x}-4x-12+\sqrt{2x-5\sqrt{x}+6}=-6$$

Vezessünk be egy új ismeretlent:

$$2x-5\sqrt{x}+6=a$$

Ekkor:

$$-2a + \sqrt{a} = -6$$

$$2a - \sqrt{a} + 6 = 0$$

$$\sqrt{a}_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

Negatív nem lehet a gyök, vagyis $\sqrt{a} = 2, azaz\ a = 4$. Ekkor:

$$2x - 5\sqrt{x} + 6 = 4$$

Ebből: $\sqrt{x}_1 = 2$ *és* $\sqrt{x}_2 = \frac{1}{2}$. A megoldás: $x_1 = 4$ *és* $x_2 = \frac{1}{4}$.

7.5.9. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+2} + 3\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{x+2} - 2\right)^2} = 7$$

$$\left|\sqrt{x+2} + 3\right| + \left|\sqrt{x+2} - 2\right| = 7$$

Vezessünk be egy új ismeretlent: $\sqrt{x+2} = a \geq 0$. Ekkor:

$$|a + 3| + |a - 2| = 7$$

Most két esetet kell vizsgálni, mert $a \geq 0$.

1. eset: $a \geq 2$. Ekkor:

$$a + 3 + a - 2 = 7, azaz\ a = 3$$

Visszahelyettesítve:

$$\sqrt{x+2} = 3, azaz\ x = 7$$

2. eset: $0 \leq a < 2$. Ekkor:

$$a + 3 - a + 2 = 7, azaz\ 5 \neq 7$$

Ebben az esetben nincs megoldás.

7.5.10. Emeljük négyzetre mind a két oldalt:

$$x - a + x - 2a + 2\sqrt{(x-a)(x-2a)} = \sqrt{x-3a}$$

$$2\sqrt{(x-a)(x-2a)} = -x$$

Mivel a baloldal nemnegatív, így *x* csak nempozitív lehet. Emeljünk négyzetre:

$$4x^2 - 12ax + 8a^2 = x^2$$

$$3x^2 - 12ax + 8a^2 = 0$$

Ebből az $x \geq 3a$ feltétel miatt:

$$\frac{6+2\sqrt{3}}{3} \cdot a \geq 3a \text{ és } \frac{6-2\sqrt{3}}{3} \cdot a \geq 3a$$

Mivel:

$$\frac{6+2\sqrt{3}}{3} > 3 \text{ és } \frac{6-2\sqrt{3}}{3} < 3$$

Ezért az egyenlőtlenségek csak negatív *a* esetén teljesülnek és az *x*-re kapott mindkét megoldás negatív szám. Tehát a második esetben pontosan akkor van megoldás, ha $a < 0$. Az egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \cdot a \text{ és } x_2 = \frac{6+2\sqrt{3}}{3} \cdot a$$

7.5.11. A gyökök alatt teljes négyzetek szerepelnek, ezért:

$$\sqrt{\left(4-\sqrt{x+1}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{x+1}\right)^2} = 6$$

$$\left|4-\sqrt{x+1}\right| + \left|2-\sqrt{x+1}\right| = 6$$

Vezessünk be egy új ismeretlent: $\sqrt{x+1} = a \geq 0$. Ekkor:

$$|4-a| + |2-a| = 6$$

Három esetet kell vizsgálni.

1.eset: $a \leq 2$. Ekkor:

$$4 - a + 2 - a = 6, azaz\ a = 0$$

Visszahelyettesítve:

$$\sqrt{x+1} = 0, azaz\ x_1 = -1$$

2.eset: $2 < a \leq 4$. Ekkor:

$$4 - a - 2 + a = 6, azaz\ 2 \neq 6$$

Ebben az esetben nincs megoldás.

3.eset: $4 < a$. Ekkor:

$$-4 + a - 2 + a = 6, azaz\ a = 6$$

Visszahelyettesítve:

$$\sqrt{x+1} = 6, azaz\ x_2 = 35$$

7.5.12. Emeljük négyzetre mind a két oldalt és rendezzük 0-ra:

$$x\sqrt{x^2+24} - x^2 - 2x = 0$$

$$x\left(\sqrt{x^2+24} - x - 2\right) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $x_1 = 0$.

2. eset:

$$\sqrt{x^2+24} - x - 2 = 0$$

Ebből: $x_2 = 5$

7.5.13. Alakítsuk át a baloldalt, emeljünk négyzetre és szorozzunk x^2-tel:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{x}\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}}$$

$$1+\frac{2}{3}x=x\cdot\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{2}{x^2}}$$

Emeljük négyzetre mind a két oldalt és oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x=\frac{3}{4}$

7.5.14. Szorozzunk be a nevezővel:

$$\sqrt{x^2-16}+\sqrt{x^2-9}=7$$

Ebből: $x_1=5$ és $x_2=-5$. A második gyök hamis.

7.5.15. A baloldalt hozzuk közös nevezőre:

$$\frac{3x-5\sqrt{x^2+x}}{-x}=\frac{3}{x}$$

$$3(x+1)=5\sqrt{x(x+1)}$$

Emeljük négyzetre mind a két oldalt és alakítsuk szorzattá:

$$9(x+1)^2=25x(x+1)$$

$$(x+1)[9(x+1)-25x]=0$$

$$(x+1)(9-16x)=0$$

A megoldás: $x_1=-1$ és $x_2=\frac{9}{16}$

7.5.16. A feladat megoldása az előzővel azonos. A megoldás: $x_1=2$ és $x_2=-\frac{8}{5}$

7.5.17. Emeljük négyzetre mind a két oldalt és alakítsuk át:

$$\sqrt{28-x}=\sqrt{7}$$

$$28-x=7, azaz\ x=21$$

7.5.18. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$2x-2\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x}=0$$

Mivel $\sqrt{x}\neq 0$, ezért oszthatunk vele: $2\sqrt{x}-2\sqrt{x-1}-1=0$

A megoldás: $x=\frac{25}{16}$

7.5.19. Gyöktelenítsük a baloldalon álló tört nevezőjét:

$$\frac{\left(\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}\right)^2}{2x}=\frac{27}{x}$$

$$\frac{27+\sqrt{27^2-x^2}}{x}=\frac{27}{x}$$

$$\sqrt{27^2-x^2}=0$$

A megoldás: $x_1=27$ *és* $x_2=-27$

7.5.20. Vezessünk be új ismeretlent:

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=a \text{ és } \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}}=\frac{1}{a}$$

Ekkor:

$$a-\frac{1}{a}=\frac{7}{12}$$

$$12a^2-7a-12=0$$

Ebből: $a_1=\frac{4}{3}$ *és* $a_2=-\frac{3}{4}$. A második hamis gyök. Vagyis:

$$\sqrt{\frac{2x+2}{x+2}}=\frac{4}{3}$$

A megoldás: $x=7$

7.5.21. Vezessünk be új ismeretlent: $\sqrt{x} = a$. Ekkor:

$$\frac{a^2 - 4}{a + 2} = a^2 - 8$$

$$a - 2 = a^2 - 8$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

Ebből: $a_1 = 3$ *és* $a_2 = -2$. A második hamis gyök. Vagyis: $\sqrt{x} = 3$

A megoldás: $x = 9$

7.5.22. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{2 - x}{2 - \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2 - x}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2 - x}\left(\frac{\sqrt{2 - x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sqrt{2 - x} = 0$. Ebből: $x_1 = 2$

2. eset:

$$\frac{\sqrt{2 - x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sqrt{2(2 - x)} = 2 - \sqrt{x}$$

Ebből: $x_1 = 0$ *és* $x_2 = \frac{16}{9}$

7.5.23. Rendezzük az egyenletet, majd vezessünk be új ismeretlent:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x + 5 = 12$$

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = a$$

$$a^2 + a - 12 = 0$$

Ebből: $a_1 = 3$ *és* $a_2 = -4$. A második gyök hamis. A megoldás: $x_1 = 4$ *és* $x_2 = -1$

7.5.24. Az egyenletnek nincs megoldása, mert minden *x* esetén:

$$\sqrt{3x^2+5x+1} > \sqrt{3x^2+5x-8}$$

Ez pedig azt jelenti, hogy az egyenlet baloldala mindig negatív.

7.5.25. Vezessünk be egy új ismeretlent:

$$\sqrt{x^2+4x+6} = a$$

Ekkor:

$$\sqrt{a+2} + \sqrt{a-2} = \sqrt{2a}$$

Emeljük kétszer négyzetre, majd alakítsuk át:

$a^2 = 4, azaz\ a_1 = 2\ és\ a_2 = -2$. A második gyök hamis. Ha $a = 2$, akkor:

$$x^2+4x+6 = 2$$

$$(x+2)^2 = 0$$

A megoldás: $x = -2$

7.5.26. Emeljük köbre mind a két oldalt:

$$\sqrt{10+2x} + \sqrt{15-2x} = 7$$

Emeljük kétszer négyzetre és oldjuk meg. A megoldás: $x_1 = 3\ és\ x_2 = -\frac{1}{2}$

7.5.27. Emeljük köbre mind a két oldalt:

$$x + 3 \cdot \sqrt[3]{x(2x-3)} \cdot \left[\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}\right] + 2x - 3 = 12(x-1)$$

A szögletes zárójelbe helyettesítsük be az eredeti egyenlet jobb oldalát és alakítsuk tovább:

$$\sqrt[3]{x(2x-3) \cdot 12(x-1)} = 3(x-1)$$

Emeljük ismét köbre és alakítsuk szorzattá:

$$(x-1)[12x(2x-3) - 27(x-1)^2] = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $x-1=0, vagyis\ x_1=1$

2. eset: $12x(2x-3)-27(x-1)^2=0$. Ebből: $x_1=3$

7.6. Egyenlőtlenségek

Elsőfokú egyenlőtlenségek

7.6.1. A feltétel: $x \neq -\frac{2}{3}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át:

$$\frac{4x+1}{3x+2} \geq 0$$

A tört értéke akkor lesz nagyobb, egyenlő nullával, ha:

1. eset: $4x+1 \geq 0\ és\ 3x+2>0$. A közös megoldás: $-\frac{1}{4} \leq x$

2. eset: $4x+1 \leq 0\ és\ 3x+2<0$. A közös megoldás: $x<-\frac{2}{3}$

7.6.2. A feltétel: $x \neq \frac{5}{2}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló az előző feladatéhoz. A megoldás: $\frac{5}{2}<x<11$.

7.6.3. A feltétel: $x \neq -\frac{1}{2}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló az előző feladatéhoz. A megoldás: $x \leq -2\ vagy\ -\frac{1}{2}<x$.

7.6.4. A feltétel: $x \neq -\frac{3}{2}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló az előző feladatéhoz. A megoldás: $-2 \leq x<-\frac{3}{2}$.

7.6.5. A feltétel: $x \neq -\frac{5}{2}\ és\ x \neq 1$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló az előző feladatéhoz. A megoldás: $x \leq -\frac{17}{4}\ vagy\ -\frac{5}{2}<x<1$.

7.6.6. A feltétel: $x \neq 2$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló az előző feladatéhoz. A megoldás: $x<2\ vagy\ 2<x$.

7.6.7. Szorozzuk be 6-tal az egyenlőtlenséget, majd rendezzük. A megoldás: $x = -1$.

7.6.8. A feltétel: $x \neq 2 és\ x \neq 0$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló az előző feladatéhoz. A megoldás: $x = 1$.

7.6.9. A feltétel: $x \neq \frac{5}{2}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló a **7.6.1.** feladatéhoz. A megoldás: $\frac{5}{2} < x < 12$.

7.6.10. A feltétel: $x \neq \frac{2}{7}$. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget, majd alakítsuk át. A gondolatmenet hasonló a **7.6.1.** feladatéhoz. A megoldás: $x < \frac{2}{7}\ vagy\ \frac{8}{3} \leq x$.

Elsőfokú Abszolutértékes egyenlőtlenségek

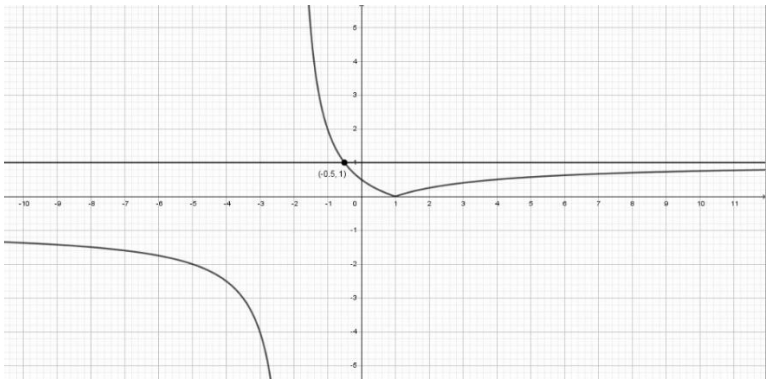
7.6.11. A feltétel: $x \neq \pm 3$. Ha $|x| > 3$, akkor $2 < |x| - 3$, amiből $5 < |x|$. A megoldás:

$x < -5\ vagy\ x > 5$.

Ha $|x| < 3$, akkor $2 > |x| - 3$, amiből $5 > |x|$. A megoldás: $-3 < x < 3$.

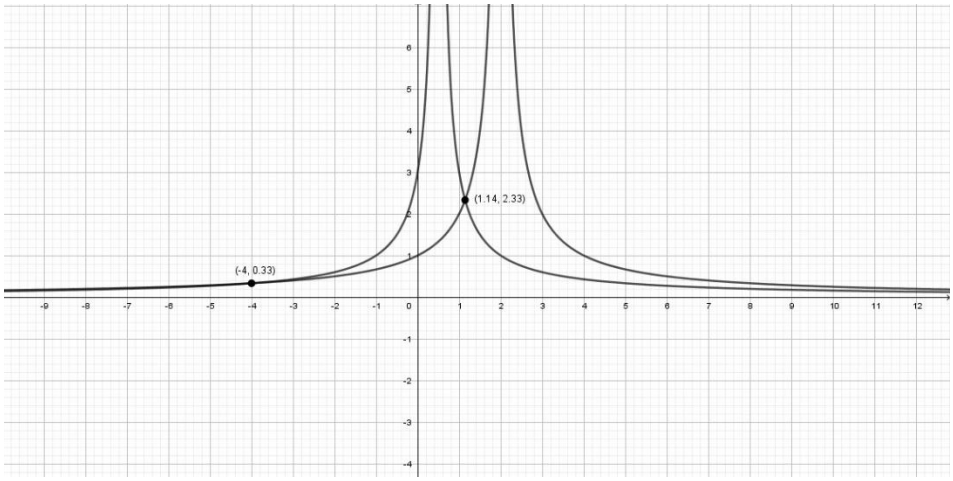
7.6.12. A feltétel: $x \neq 2$. Ha $x < -2$, akkor $|x - 1| > x + 2$ minden $x < -2$ értékre igaz. Ha $x > -2$, akkor $|x - 1| < x + 2$.

Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



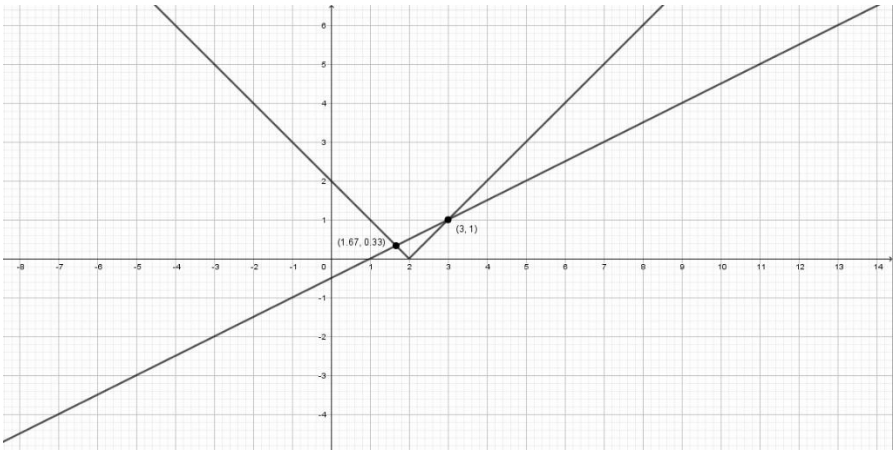
A megoldás: $-\frac{1}{2} < x$

7.6.13. A feltétel: $x \neq 2, x \neq \frac{1}{2}$. Mivel $\frac{-3}{2x-1} = \frac{3}{-2x+1}$, ezért $2|1-2x| > 3|x-2|$. Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



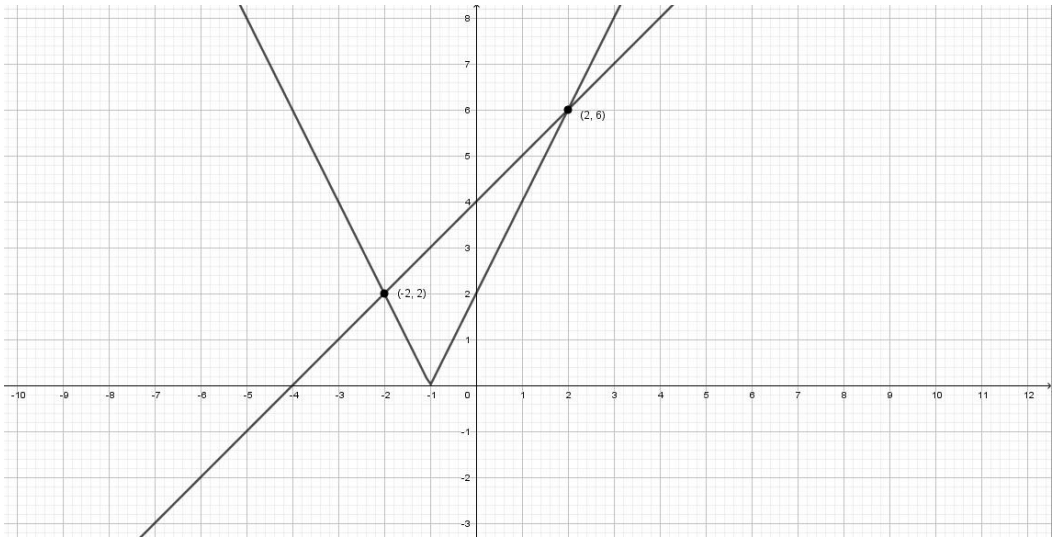
A metszéspontok: $x_1 = -4$ *és* $x_2 = \frac{8}{7}$. A megoldás: $x < -4$ *vagy* $\frac{8}{7} < x$

7.6.14. Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



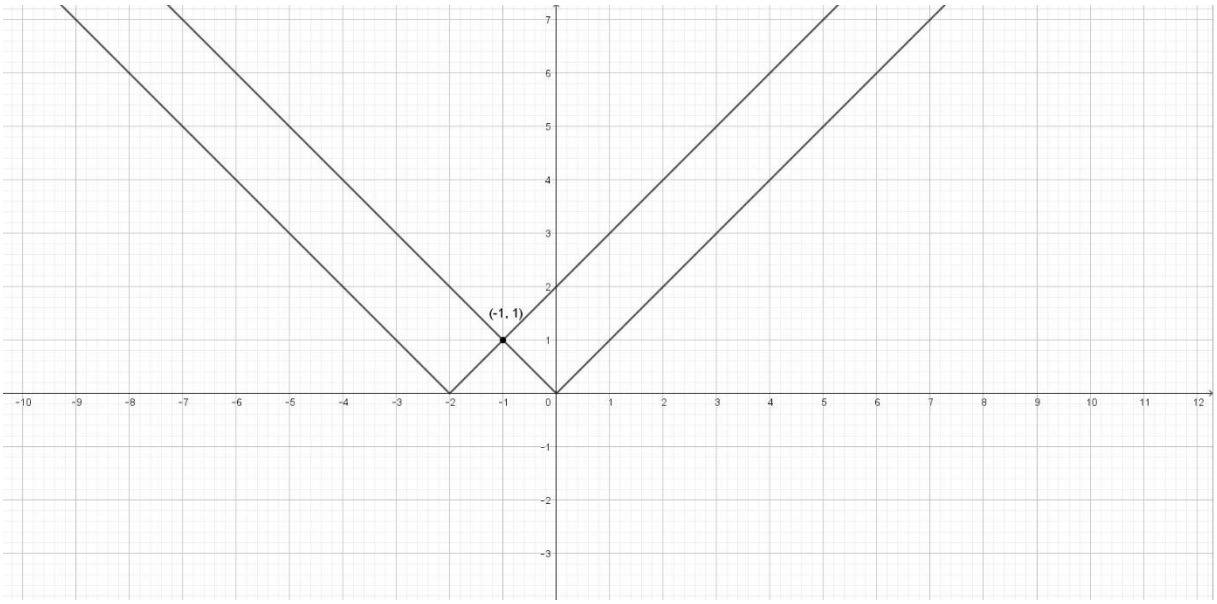
A metszéspontok: $x_1 = 3$ *és* $x_2 = \frac{5}{3}$. A megoldás: $\frac{5}{3} < x < 3$.

7.6.15. . Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



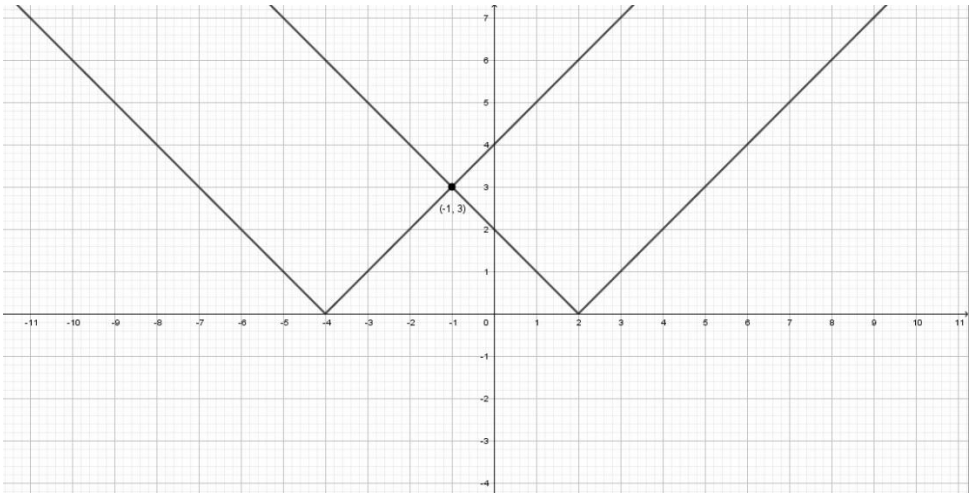
A metszéspontok: $x_1 = -2$ *és* $x_2 = 2$. A megoldás: $x < -2$ *vagy* $2 < x$

7.6.16. Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



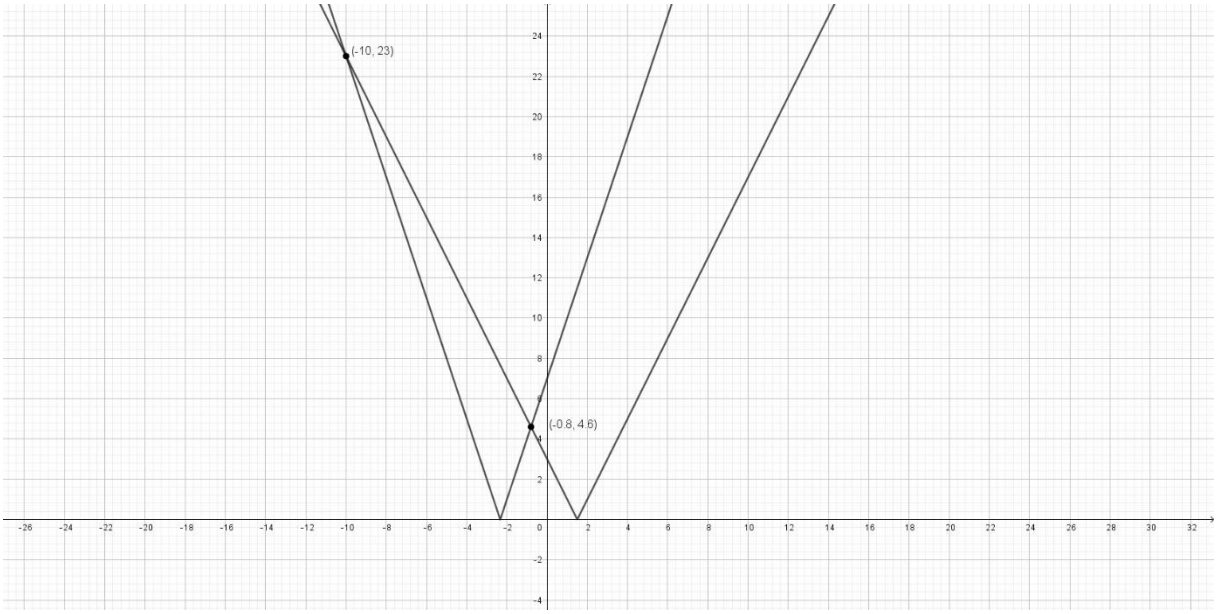
A metszéspont: $x - 1$. A megoldás: $-1 < x$.

7.6.17. Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



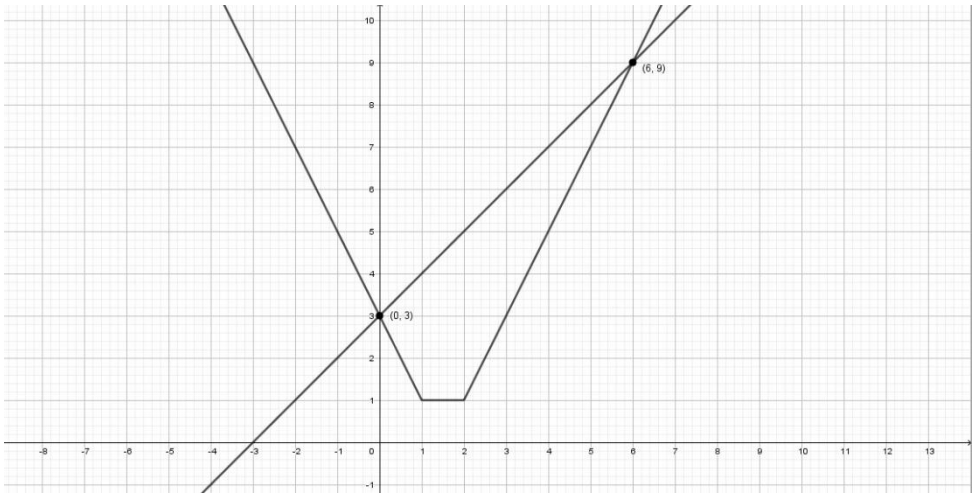
A metszéspont: $x = -1$. A megoldás: $-1 \leq x$.

7.6.18. Alakítsuk át a kifejezést: $|2x - 3| > |3x + 7|$. Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



A metszéspontok: $x_1 = -\frac{4}{5}$ $és$ $x_2 = -10$. A megoldás: $-10 < x < -\frac{4}{5}$

7.6.19. Ezt grafikusan is megoldhatjuk:



A megoldás: $x < 0\ vagy\ 6 < x$

7.6.20. A következő négy esetet kell vizsgálni:

$$|x+2| + |x+1| + |x-4| = \begin{cases} -3x+1, ha\ x < -2 \\ -x+5, ha\ -2 \leq x \leq -1 \\ x+7, ha\ -1 < x \leq 4 \\ 3x-1, ha\ 4 < x \end{cases}$$

Ha $4 < x$, akkor $3x - 1 > 9$. Ebből: $\frac{10}{3} < x$, ezért $4 < x$ megoldás.

Ha $-1 < x \leq 4$, akkor $x + 7 > 9$. Ebből: $2 < x$, ezért $2 < x$ megoldás.

Ha $-2 \leq x \leq -1$, akkor $-x + 5 > 9$. Ebből: $x < -4$, ezért nincs megoldás.

Ha $x < -2$, akkor $-3x + 1 > 9$. Ebből: $x < -\frac{8}{3}, mivel\ -\frac{8}{3} < -2, ezért\ x < -\frac{8}{3}$ megoldás.

Összesítve, a megoldás: $x < -\frac{8}{3}\ vagy\ 2 < x$.

Elsőfokú paraméteres egyenlőtlenségek

7.6.21. Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mind a két oldalát $3a$-val.

Ha $a > 0$, akkor: $3(ax - 2a + 2) < 2x + 2$. Ebből: $x(2 - 3a) > 2(2 - 3a)$.

Ha $a = \frac{2}{3}$, akkor nincs megoldás. Ha $a > \frac{2}{3}$, akkor $x < 2$. Ha $0 < a < \frac{2}{3}$, akkor $x > 2$.

Ha $a < 0$, akkor $x(2 - 3a) < 2(2 - 3a)$. Ebből: $x < 2$.

7.6.22. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget: $(a-1)x > 3a-5$

1. eset: Ha $a > 1$, akkor: $x > \frac{3a-5}{a-1}$

2. eset: Ha $a < 1$, akkor: $x < \frac{3a-5}{a-1}$

3. eset: Ha $a = 1$, akkor az eredeti egyenlőtlenség szerint minden *x* valós szám megoldás.

7.6.23. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\frac{(6a-1)x+1-9a}{a} > 0$$

Ha $a > 0$, akkor $(6a-1)x > 9a-1$.

1. eset: Ha $a > \frac{1}{6}$, akkor: $x > \frac{9a-1}{6a-1}$

2. eset: Ha $a < \frac{1}{6}$, akkor: $x < \frac{9a-1}{6a-1}$

3. eset: Ha $a = \frac{1}{6}$, akkor nincs megoldás.

Ha $a < 0$, akkor $(6a-1)x < 9a-1$.

Mivel $6a-1 < 0$, ezért $x > \frac{9a-1}{6a-1}$

7.6.24. Az egyenlet gyöke: $x = \frac{a+5}{6}$

1. Ha $x > 0, akkor\ a > -5$.

2. Ha $x = 0, akkor\ a = -5$.

3. Ha $x < 0, akkor\ a < -5$.

4. Egész gyököt akkor kapunk, ha $a = 6k-5$, ahol *k* egész szám.

7.6.25. Az egyenlet gyöke: $x = 5a$

1. Ha $\frac{7}{5} < a$, akkor a gyöke nagyobb hétnél.

2. Egész gyököt akkor kapunk, ha $a = \frac{k}{5}$, ahol *k* egész szám.

Másodfokú egyenlőtlenségek

7.6.26. A feltétel: $x \neq -2$ *és* $x \neq \frac{1}{4}$. Rendezzük nullára, majd hozzuk közös nevezőre. Ekkor:

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{(x+2)(4x-1)} \geq 0$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. eset: $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ *és* $(x+2)(4x-1) > 0$.

1. eset: $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ *és* $(x+2)(4x-1) < 0$.

A megoldás: $x < -2\ vagy\ \frac{1}{4} < x < 1\ vagy\ 4 \leq x$.

7.6.27. A feltétel: $x \neq 3$ *és* $x \neq 1$. Rendezzük nullára, majd hozzuk közös nevezőre. A megoldás gondolatmenete hasonló az előző feladatéhoz.

A megoldás: $x < -1\ vagy\ 1 < x < 2\ vagy\ 3 < x$.

7.6.28. A feltétel: $x \neq 3$ *és* $x \neq 1$. Rendezzük nullára, majd hozzuk közös nevezőre. A megoldás gondolatmenete hasonló az előző feladatéhoz.

A megoldás: $x < 1\ vagy\ \frac{5}{3} < x < 2\ vagy\ 3 < x$.

7.6.29. A feltétel: $x \neq 3$ *és* $x \neq 2$. A megoldás gondolatmenete hasonló az előző feladatéhoz.

A megoldás: $2 < x < 3\ vagy\ 5 < x < 8$.

7.6.30. A nevező mindig pozitív, tehát elég egy esetet vizsgálni:

Az $x^2 + 4x + 3 > 0$, ha $x < -3\ vagy\ -1 < x$.

7.6.31. A feltétel: $x \neq -7$ *és* $x \neq 2$. A megoldás: $x = -6$.

7.6.32. A feltétel: $x \neq \pm 3$ *és* $x \neq 0$. Rendezzük nullára, majd hozzuk közös nevezőre. Ekkor:

$$\frac{x}{x^2 - 9} < 0$$

Ennek a valós számok halmazán a megoldása: $0 < x < 3$. A keresett legnagyobb egész szám: $x = 2$.

7.6.33. Ha $x \neq \frac{3}{2}$, akkor $(2x-3)^2 > 0$. Ezért elegendő vizsgálni az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(3x-1)(4-x) > 0$$

A megoldás: $\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}\ vagy\ \frac{3}{2} < x < 4$

7.6.34. Ha $x \neq 3$, akkor $(x-3)^2 > 0$, és ha $x \neq 4$, akkor $(x-4)^2 > 0$. Ezért elegendő vizsgálni az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(x+1)(x-5)(x-2) < 0$$

Két eset lehetséges:

1. eset: Az $x+1 > 0$ $és$ $(x-5)(x-2) < 0$. A megoldás: $2 < x < 5$.

Mivel $x \neq 3$ $és$ $x \neq 4$, ezért az egész számok halmazán nincs megoldása.

2. eset: Az $x+1 < 0$ $és$ $(x-5)(x-2) > 0$. A megoldás: $x < -1$.

A keresett legnagyobb egész szám: $x = -2$

7.6.35. Rendezzük nullára az egyenlőtlenséget és alakítsuk szorzattá a számlálót:

$$\frac{x\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} < 0$$

Ez az egyenlőtlenség három esetben teljesülhet:

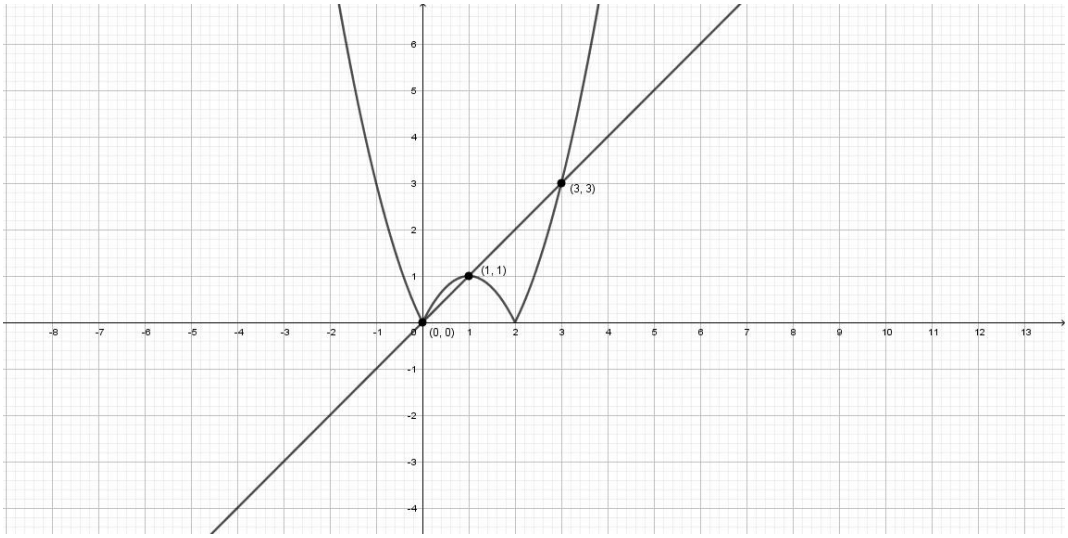
1. eset: $-\frac{1}{2} < x, x < 0, \frac{3}{2} < x, \frac{1}{2} < x$. Ekkor nincs megoldás.

2. eset: $-\frac{1}{2} < x, x < 0, \frac{3}{2} > x, \frac{1}{2} > x$. A megoldás: $-\frac{1}{2} < x < 0$

3. eset: $-\frac{1}{2} < x, x > 0, \frac{3}{2} < x, \frac{1}{2} < x$. A megoldás: $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

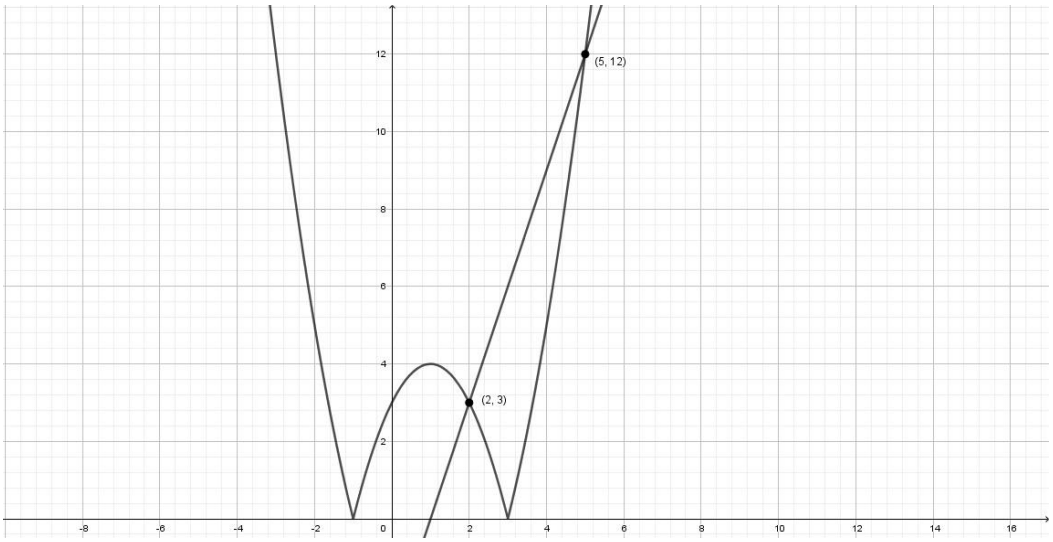
Másodfokú Abszolutértékes egyenlőtlenségek

7.6.36. A grafikus megoldást alkalmazzuk:



Ha $x \leq 0$, akkor $x^2 - 2x \geq 0$ miatt nincs megoldás. Ha $0 < x < 2$, akkor a $-x^2 + 2x < x$ megoldása: $1 < x < 2$. Ha $x \geq 2$, akkor az $x^2 - 2x < x$ megoldása: $2 \leq x < 3$. Összegezve, a megoldás: $1 < x < 3$.

7.6.37. A grafikus megoldást alkalmazzuk:



Az $x^2 - 2x - 3 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = -1$ *és* $x_2 = 3$. Ha $3 < x$, akkor az

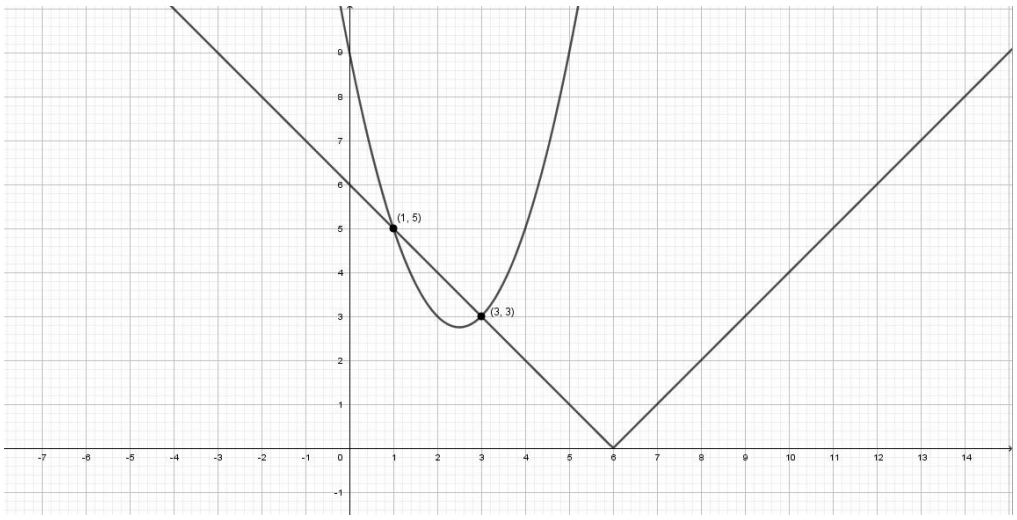
$x^2 - 2x - 3 - 3x + 3 < 0$ egyenlőtlenség megoldása: $3 < x < 5$. Ha $-1 \leq x \leq 3$, akkor a

$-x^2 + 2x + 3 - 3x + 3 < 0$ egyenlőtlenség megoldása: $2 < x \leq 3$. Ha $x < -1$, akkor nincs megoldás. Összegezve, a megoldás: $2 < x < 5$.

7.6.38. A grafikus megoldást alkalmazzuk. A megoldás: $1-\sqrt{3}<x<2-\sqrt{2}$.

7.6.39. A grafikus megoldást alkalmazzuk. A megoldás: $x<1\ vagy\ 2<x$.

7.6.40. A grafikus megoldást alkalmazzuk:



Az $x^2-5x+9>0$ minden valós szám esetén. A függvények metszéspontjai:

$x_1=1, x_2=3$. Ha $x\leq 6$, akkor a $-x+6>x^2-5x+9$ egyenlőtlenség megoldása:

$1<x<3$. Ha $x<6$, akkor nincs megoldás.

7.6.41. Vezessünk be egy új ismeretlent: $a=x^2$. Ekkor az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$|a-1|+|a-9|<8$$

Ha $0\leq a\leq 1$, akkor: $-a+1-a+9<8$, azaz $1<a$. Ez ellentmondás.

Ha $1<a<9$, akkor: $a-1-a+9<8$, azaz $8<8$. Ez ellentmondás.

Ha $9\leq a$, akkor: $a-1+a-9<8$, azaz $a<9$. Ez ellentmondás.

Tehát a feladatnak nincs megoldása.

7.6.42. Az egyenlőtlenséget a következő alakba írhatjuk:

$$-3<\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}<3$$

A nevező minden valós számra pozitív, ezért beszorozhatunk vele. Ekkor az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$$0 < 2x^2 + 1, illetve\ 0 < x^2 + 3x + 2$$

Az első minden valós számra teljesül, vagyis csak a másodikat kell megoldani. A megoldás:

$$x < -2\ vagy\ -1 < x$$

7.6.43. Az egyenlőtlenséget a következő alakba írhatjuk:

$$-3 < \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 3x + 2} < 3$$

$$-3 < \frac{x^2 - 2x - 6}{(x-2)(x-1)} < 3$$

Az első egyenlőtlenségből:

$$0 < \frac{x(4x - 11)}{(x-2)(x-1)}$$

A megoldás: $\frac{11}{4} < x\ vagy\ x < 0$.

A második egyenlőtlenségből:

$$\frac{-2x^2 + 7x - 12}{(x-2)(x-1)} < 0$$

Ennek nincs megoldása.

Másodfokú paraméteres egyenlőtlenségek

7.6.44. Ha $p \geq 0$, akkor nincs megoldás. Ha $p < 0$, akkor a $D = 144 + 20p < 0$ alapján a megoldás: $p < -\frac{36}{5}$.

7.6.45. A nevező minden valós számra negatív, ezért:

$$2x^2 - 2x + 2 > x^2 + px - 2 > -3x^2 + 3x - 3$$

Ebből:

$$x^2-(p+2)x+4>0, \qquad D=(p+2)^2-16<0$$

$$4x^2+(p-3)x+1>0, \qquad D=(p-3)^2-16<0$$

$$p^2+4p-12<0, ha\ -6<p<2$$

$$p^2-6p-7<0, ha\ -1<p<7$$

A megoldás: $-1<p<2$

7.6.46. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$x^2-(2a+3b)^2<0$$

$$x^2<(2a+3b)^2$$

A megoldás: $-(2a+3b)<x<(2a+3b)$

7.6.47. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$x^2-bx+ax-ab+x^2-ax+bx-ab<2a^2+2b^2$$

$$2x^2<2a^2+2ab+2b^2$$

$$x^2<a^2+ab+b^2$$

A megoldás: $-\sqrt{a^2+ab+b^2}<x<\sqrt{a^2+ab+b^2}$

7.6.48. Négy esetet kell vizsgálni:

1. eset: $a-x>0$ és $x-b>0$ és $ax-b<0$.

2. eset: $a-x<0$ és $x-b<0$ és $ax-b<0$.

3. eset: $a-x>0$ és $x-b<0$ és $ax-b>0$.

4. eset: $a-x<0$ és $x-b>0$ és $ax-b>0$.

A megoldás: $\frac{b}{a}<x<b\ vagy\ a<x$.

7.6.49. Ha $p = -3$, akkor elsőfokú az egyenlőtlenség és végtelen sok megoldása van.

Ha $p < -3$, akkor mindig van megoldás, mert a baloldal függvénye egy konkáv parabola.

Ha $p > -3$, akkor $D < 0$ esetén nem lenne valós megoldása: $D = 25 + 16(p + 3) < 0$. Ebből: $p < -\frac{73}{16}$. Ez ellentmondás, tehát az egyenlőtlenségnek mindig van valós megoldása.

7.6.50. Az egyenlőtlenség akkor igaz minden valós *x* számra, ha a baloldal diszkriminánsa negatív: $D = 4(p + 1)^2 - 4(9p - 5) = 4(p - 1)(p - 6) < 0$.

A megoldás: $1 < p < 6$.

7.7. Egyenletrendszerek

Elsőfokú egyenletrendszerek

7.7.1. Alakítsuk át a két egyenletet:

$$\begin{cases} 14x - 81y = 30 \\ 7x + 27y = 60 \end{cases}$$

A megoldás: $x = 6, y = \frac{2}{3}$

7.7.2. Alakítsuk át a két egyenletet:

$$\begin{cases} 38x - 21y = 15 \\ 32x - 21y = 6 \end{cases}$$

A megoldás: $x = \frac{3}{2}, y = 2$

7.7.3. Alakítsuk át a két egyenletet:

$$\begin{cases} 3x - y = -8 \\ 13x + 2y = -22 \end{cases}$$

A megoldás: $x = -2, y = 2$

7.7.4. Alakítsuk át a két egyenletet. A megoldás: $x = 1, y = 2$

7.7.5. Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a = \frac{1}{x-5}, b = \frac{1}{y+2}$$

Ekkor:

$$\begin{cases} 10a + b = 1 \\ 25a + 3b = 2 \end{cases}$$

Ebből: $a = \frac{1}{5}, b = -1$. Visszahelyettesítés után a megoldás: $x = 10, y = -3$

7.7.6. Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a = \frac{1}{2x-3y}, b = \frac{1}{3x-2y}$$

Ekkor:

$$\begin{cases} 11a + 18b = 13 \\ 27b - 2a = 1 \end{cases}$$

Ebből: $a = 1, b = \frac{1}{9}$. Visszahelyettesítés után a megoldás: $x = 5, y = 3$

7.7.7. Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a = \frac{1}{2x+y+1}, b = \frac{1}{2x-y-2}$$

Ekkor:

$$\begin{cases} 4a - b = 7 \\ 4a + b = -3 \end{cases}$$

Ebből: $a = \frac{1}{2}, b = -5$. Visszahelyettesítés után a megoldás: $x = \frac{7}{10}, y = -\frac{4}{10}$

7.7.8. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = 1, y = 4, z = 3$

7.7.9. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{3}{2}$

7.7.10. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = 6, y = 8, z = 3$

7.7.11. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = -5, y = \frac{4}{5}, z = -\frac{6}{5}$

7.7.12. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = 4, y = 3, z = -2$

7.7.13. Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a = \frac{1}{x+y}, b = \frac{1}{y+3z}, c = \frac{1}{x-2z}$$

Ekkor:

$$\begin{cases} 6a + 5b = 2 \\ 15a - 4c = \frac{1}{2} \\ 10b - 7c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = 4, y = 2, z = 1$

7.7.14. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x = 1, y = 2, z = 3, u = 4$

Másodfokú egyenletrendszerek

7.7.15. Vonjuk ki a második egyenletet az elsőből és a kapott egyenletet alakítsuk át:

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 0$$

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 = 0$$

A megoldás: $x = y = z = \pm 10$

7.7.16. Adjuk össze az egyenleteket, majd alakítsuk át:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-1)^2 = 0$$

A megoldás: $x = 3, y = -5, z = 1$

7.7.17. Adjuk össze az egyenleteket, szorozzuk 2-vel, majd alakítsuk át:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

A megoldás: $x = y = z$

7.7.18. Az első két egyenlet összegéből vonjuk ki a harmadikat, majd alakítsuk át:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$$

A megoldás: $x=y=z$

7.7.19. Az egyenletrendszer egyik megoldása: $x=y=z=0$. Tegyük fel, hogy egyik sem nulla. Szorozzuk 2-vel az egyenletek megfelelő oldalainak reciprokait és adjuk össze őket, majd alakítsuk át:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\left(1-\frac{1}{y}\right)^2+\left(1-\frac{1}{z}\right)^2=0$$

Ebből: $x=y=z=1$

7.7.20. Legyen $y=kx$. Ekkor:

$$\begin{cases} x^2(1+k)=10 \\ x^2(k^2+k)=15 \end{cases}$$

A második egyenletet osszuk el az elsővel:

$$k=\frac{3}{2}$$

A megoldás: $x_1=2, y_1=3$ és $x_2=-2, y_2=-3$

7.7.21. A második egyenletből: $y(1-2x)=0$. Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $y=0$. Ebből az első egyenlet szerint: $x(x-1)=0$

A megoldás: $x_1=0, y_1=0$ és $x_2=1, y_2=0$

2. eset: $x=\frac{1}{2}$. Ebből az első egyenlet szerint: $\frac{1}{4}+y^2=\frac{1}{2}$

A megoldás: $x_3=\frac{1}{2}, y_3=\frac{1}{2}$ és $x_4=\frac{1}{2}, y_4=-\frac{1}{2}$

7.7.22. Az első egyenlethez adjunk 5-öt és alakítsuk át:

$$x(x-2y)+5+\sqrt{x(x-2y)+5}=6$$

Vezessünk be új ismeretlent:

$$\sqrt{x(x-2y)+5} = a, ahol\ a \geq 0$$

Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$a^2 + a - 6 = 0$$

Ebből: $a_1 = -3$ és $a_2 = 2$

Az első gyök nem lehetséges, így a következőt kapjuk:

$$\sqrt{x(x-2y)+5} = 2$$

$$x(x-2y)+1 = 0$$

A második egyenletből: $x = 4y - 3$. Ezt behelyettesítve:

$$(4y-3)(4y-3-2y)+1 = 0$$

$$4y^2 - 9y + 5 = 0$$

Ebből: $y_1 = 1$ és $y_2 = \frac{5}{4}$

A megoldás: $x_1 = 1, y_1 = 1$ és $x_2 = 2, y_2 = \frac{5}{4}$

7.7.23. Alakítsuk át az első egyenletet:

$$2x - 4y - 4 + \sqrt{x-2y+3} = 0$$

Adjunk hozzá és vegyünk el a baloldalból 6-ot:

$$2x - 4y + 6 - 10 + \sqrt{x-2y+3} = 0$$

$$2(x-2y+3) - 10 + \sqrt{x-2y+3} = 0$$

Legyen $\sqrt{x-2y+3} = a \geq 0$. Ekkor:

$$2a^2 + a - 10 = 0$$

Ebből: $a_1 = -\frac{5}{2}, a_2 = 2$

Az első gyök nem lehetséges, ezért:

$$\sqrt{x-2y+3}=2$$

$$x-2y+3=4$$

$$x=2y+1$$

Ezt helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$(2y+1)^2+2y^2-y(2y+1)=46$$

$$4y^2+3y-45=0$$

A megoldás: $x_1=7, y_1=3$ és $x_2=-\frac{13}{2}, y_2=-\frac{15}{4}$

7.7.24. Alakítsuk át a második egyenletet:

$$4y^2+z^2+2xz-4xy+2x^2=0$$

$$4y^2+z^2+2xz-4xy+x^2+x^2=0$$

$$(x+z)^2+(2y-x)^2=0$$

Ez pontosan akkor lehetséges, ha a baloldalon mind a két tag 0. Vagyis: $x=-z$ és $x=2y$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe:

$x+x-3x=1000$, vagyis $x=-1000$

A megoldás: $x=-1000, y=-500, z=1000$

7.7.25. Alakítsuk át a második egyenletet:

$$x^2-2xy-3y^2=0$$

$$x^2-3xy+xy-3y^2=0$$

$$x(x-3y)+y(x-3y)=0$$

$$(x-3y)(x+y)=0$$

Ebből: $x=3y$ $vagy$ $x=-y$

1. eset: Ha $x = -y$, akkor az első egyenletbe helyettesítve:

$$\sqrt{\frac{-y}{y-1}} + \sqrt{\frac{-3y-9}{7y}} = 2\sqrt{3}$$

A következő egyenlőtlenségeknek kell teljesülni:

$$\frac{-y}{y-1} \geq 0 \text{ és } \frac{-3y-9}{7y} \geq 0$$

Az első egyenlőtlenségből: $0 \leq y < 1$, a másodikból: $-3 \leq y < 0$. A két egyenlőtlenséget egybevetve kapjuk, hogy $x = -y$ esetén az első egyenletnek nincs értelme.

2. eset: Ha $x = 3y$, akkor az első egyenlet így alakul:

$$\sqrt{\frac{7y}{y-1}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{y-1}{7y}} = 2\sqrt{3}$$

Osszuk el mind a két oldalt $\sqrt{3}$-mal:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{7y}{y-1}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{y-1}{7y}} = 2$$

Egy pozitív szám és a reciprokának összege legalább 2, és pontosan akkor 2, ha az a szám 1. Ez az egyenlőség csak akkor igaz, ha:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{7y}{y-1}} = 1, vagyis \ \frac{7y}{y-1} = 3$$

Ebből: $y = -\frac{3}{4}$ és $x = -\frac{9}{4}$

7.7.26. Szorozzuk meg az első egyenletet xy-nal, majd rendezzük 0-ra:

$$x^2y + y = xy^2 + x$$

$$x^2y - xy^2 + y - x = 0$$

$$xy(x-y) - (x-y) = 0$$

$$(x-y)(xy-1) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $x = y$. 2. eset: $xy = 1, azaz\ y = \frac{1}{x}$. Ezeket helyettesítsük be az eredeti második egyenletbe: 1. eset:

$$x^2 - 2(x + x) + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = 0$$

Ebből: $x_1 = y_1 = 2$

2. eset:

$$1 - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

Ebből: $x_2 = 2, y_2 = \frac{1}{2}$ $és$ $x_3 = \frac{1}{2}, y_3 = 2$

7.7.27. Szorozzuk meg az első egyenletet xy-nal, majd rendezzük:

$$x^3 + y^3 + xy(x + y) = 203$$

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy(x + y) = 203$$

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 203$$

Alakítsuk át a második egyenletet: $x^2 + y^2 + x + y = 36$

Vezessünk be két új ismeretlent: $x + y = a, x^2 + y^2 = b$. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} ab = 203 \\ a + b = 36 \end{cases}$$

A második egyenletből: $a = 36 - b$. Tehát: $(36 - b)b = 203$. Ebből: $b_1 = 29, b_2 = 7$. Visszahelyettesítés után: $a_1 = 7, a_2 = 29$. Ezek alapján:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \quad és \quad \begin{cases} x + y = 29 \\ x^2 + y^2 = 7 \end{cases}$$

Az első esetből: $x_1 = 2, y_1 = 5$ $és$ $x_2 = 5, y_2 = 2$

A második esetben nem kapunk megoldást, mert a diszkrimináns negatív lesz.

7.7.28. Az első egyenlet miatt: $2x-1 \geq 0, azaz\ x \geq \frac{1}{2}$. A második egyenletből: $x = 10 - 2y$

Ezt az elsőbe helyettesítve:

$$\sqrt{(10-2y)^2 + 2y - 3} = 2(10-2y) - 1$$

Emeljük négyzetre és rendezzük 0-ra:

$$(10-2y)^2 + 2y - 3 = 4(10-2y)^2 - 4(10-2y) + 1$$

$$0 = 3(10-2y)^2 - 4(10-2y) + 4 - 2y$$

A jobb oldalhoz adjunk 6-ot és vegyünk el 6-ot:

$$0 = 3(10-2y)^2 - 4(10-2y) + 10 - 2y - 6$$

$$0 = 3(10-2y)^2 - 3(10-2y) - 6$$

$$0 = (10-2y)^2 - (10-2y) - 2$$

$$0 = x^2 - x - 2$$

Ebből: $x_1 = 2, és\ x_2 = -1$. A feltétel miatt $x_2 \neq -1$. Az x_1-t visszahelyettesítve: $y_1 = 4$.

7.7.29. Az első egyenlet nevezője nem lehet 0, vagyis $x \neq -y$. Alakítsuk át az első egyenletet:

$$\frac{1 + \frac{x+1}{y-1}}{1 + \frac{y+1}{x-1}} = \frac{\frac{y-1+x+1}{y-1}}{\frac{x-1+y+1}{x-1}} = \frac{x+y}{y-1} \cdot \frac{x-1}{x+y} = \frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{3}$$

Ebből: $y = 3x - 2$. Ezt helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$x^2 + 2(3x-2)^2 - 4x - 3(3x-2) - 2x(3x-2) = 0$$

$$13x^2 - 33x + 14 = 0$$

A megoldás: $x_1 = 2, y_1 = 4\ és\ x_2 = \frac{7}{13}, y_2 = -\frac{5}{13}$

7.8. Szöveges feladatok

7.8.1. Legyen az első rész *x*, a második rész $(850 - x)$. Ekkor:

$$0{,}08 \cdot x + (850 - x) \cdot 0{,}24 = 850 \cdot 0{,}12$$

A megoldás: Az első rész 637,5. A második rész 212,5.

7.8.2. Legyen az osztály létszáma *x*. Ekkor $0{,}3x$ a jelesek és $0{,}7x$ a jelestől különböző osztályzatúak száma. A feltétel szerint:

$$5(0{,}3x - 4) = 0{,}7x + 4$$

A megoldás: $x = 30$.

7.8.3. Legyen az eredeti szám $\overline{ab}$. Ekkor:

$$\begin{cases} a + b = 12 \\ 10a + b - (10b + a) = k^2 \end{cases}$$

A második egyenletből: $9(a - b) = k^2$. Ebből az $(a - b)$ értékei: 1,4,9 lehet. Az első egyenlet miatt: $a - b = 4, vagyis\ a = 8, b = 4$. A négyzetszám: $k^2 = 84 - 48 = 36$. Tehát az eredeti szám: 84.

7.8.4. Legyen az apa *x* éves, a fiú $(50 - x)$ éves. Ekkor:

	Most	5 év múlva
Apa	x	x+5
Fiú	50-x	55-x

Ebből: $x + 5 = 3(55 - x)$. A megoldás: Az apa 40 éves, a fiú 10 éves.

7.8.5. Legyen András és Béla jelenlegi életkora *x*, illetve *y*. Ekkor:

	Most	Akkor
András	x	y
Béla	y	y-(x-y)=2y-x

Ebből:

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x = 2(2y - x) \end{cases}$$

A megoldás: $x = 40, y = 30$.

7.8.6. Az első ötvözet tömege legyen *x* kg, az arany-ezüst aránya $\frac{2}{5}:\frac{3}{5}$. A második ötvözet tömege legyen $(80 - x)$ kg, az arany-ezüst aránya $\frac{3}{10}:\frac{7}{10}$. A feltételek szerint:

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(80 - x) = \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}x + 24 = \frac{1}{10}x + 24$$

Ebből: $x = 10$ kg. A megoldás: Az első ötvözetből 10 kg, a másodikból 70 kg kell.

7.8.7. Legyen a keresett idő *x*. Hasonlítsuk össze a két mutató által megtett utat. A nagymutató 60 perc alatt egyszer körbe fordul, addig a kismutató csak a kerület $\frac{1}{12}$ részét teszi meg. Vagyis: $x + 60 = 12x$. Ebből: $x = \frac{60}{11}$ perc. Tehát 5 óra előtt, illetve 7 óra után *x* perccel találkoznak a mutatók. A megoldás: 4 óra $54 + \frac{6}{11}$ perckor, illetve 7 óra $5 + \frac{5}{11}$ perckor.

7.8.8. Az előző feladat szerint itt is teljesül, hogy $x + 60 = 12x$. Ebből: $x = \frac{60}{11}$ perc. A megoldás: 13 óra $5 + \frac{5}{11}$ perckor.

7.8.9. A találkozásig eltelt idő legyen *x*. Ekkor $\frac{x}{12} + 15 = x$. Ebből: $x = 16 + \frac{4}{11}$ perc. Vagyis a találkozás 3 óra $16 + \frac{4}{11}$ perckor lesz. A mutatók merőlegessége esetén: $x = 15 + \frac{x}{12} + 15$. Ebből: $x = 32 + \frac{8}{11}$ perc. Vagyis a merőlegesség 3 óra $32 + \frac{8}{11}$ perckor következik be.

7.8.10. Az első csap a medence $\frac{3}{7}$ részét tölti meg $\frac{2}{3}$ óra alatt, a medence $\frac{9}{14}$ részét tölti meg 1 óra alatt. A második csap a medence $\frac{4}{7}$ részét tölti meg $\frac{2}{3}$ óra alatt, a medence $\frac{12}{14}$ részét tölti meg 1 óra alatt. Vagyis, ha a második csap x ideig van nyitva, akkor az első csap $x + \frac{5}{12}$ óráig. Ezért:

$$\left(x + \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{9}{14} + \frac{12}{14}x = 1$$

Ebből: $x = \frac{41}{84}$ óra. A teljes idő: $54 + \frac{2}{7}$ perc.

7.8.11. Jelölje *a*, illetve *b* azt az időt, amelyre Andrásnak, illetve Bélának szüksége van, ahhoz, hogy saját figuráit felállítsa a táblára. Ekkor a teljes táblát *2a*, illetve *2b* idő alatt állítanák fel külön-külön. Ha a figurákat közösen raknák fel *x* idő alatt, akkor:

$$\frac{x}{2a}+\frac{x}{2b}=1$$

A feltételek miatt: $a=x-6$ és $b=x+10$. Ezért:

$$\frac{x}{2(x-6)}+\frac{x}{2(x+10)}=1$$

A megoldás: $x=30, a=36, b=40$.

7.8.12. Legyen *x* a sík és *y* a hegyi útszakasz hossza. Ekkor az egyes menetidők összege:

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{x}{4}=5$$

Ebből: $x+y=10$. Tehát összesen 20 km-t gyalogolt.

7.8.13. Legyen a motorcsónak sebessége *x* km/h. A járművek $\frac{15}{x}$ ideig távolodnak egymástól. Ekkor a csónak $\frac{4\cdot 15}{x}$ utat tett meg. A közeledési időtartam $\frac{9}{x}$, ez alatt a csónak $\frac{4\cdot 9}{x}$ utat tett meg.

A csónak által megtett összes út:

$$\frac{60}{x}+\frac{36}{x}=6$$

Ebből: $x=16$.

7.8.14. Ha x liter alkoholt öntöttünk ki, akkor 36-x liter maradt. Másodszor $(36-x)\cdot\frac{x}{36}$ liter alkoholt öntünk ki. Ezért:

$$x+(36-x)\cdot\frac{x}{36}=11$$

$$x^2-72x+396=0$$

A gyökei: $x_1=6$ és $x_2=66$. A második gyök nem felel meg. Tehát első alkalommal 6 liter, másodszorra 5 liter alkoholt öntöttünk ki.

7.8.15. Ha a brigádnak eredetileg x tagja volt és fejenként napi y órát dolgoztak, akkor 15xy munkaóra szükséges a teljes munka elvégzéséhez. Ebből:

$$\begin{cases} 15xy = 16(x-4)(y+2) \\ 15xy = 8(x+4)(y+4) \end{cases}$$

A megoldás: $x = 16, y = 8$

7.8.16. Ha az első cső x óra alatt tölti meg a medencét, akkor a második 2x óra, a harmadik x+5 óra alatt. Ebből:

$$\frac{2{,}5}{x} + \frac{2{,}5}{2x} + \frac{2{,}5}{x+5} = 1$$

$$2x^2 - 2{,}5x - 37{,}5 = 0, azaz\ x = 5$$

A megoldás: Az egyes csöveken 5,10,10 óra alatt telik meg a medence.

7.8.17. Jelöljük *x,y,z*-vel azt az időt, ami alatt az egyes gépek külön-külön elvégeznék a munkát. Ekkor:

$$\begin{cases} \frac{7{,}2}{x} + \frac{7{,}2}{x} = 1 \\ \frac{9}{x} + \frac{9}{z} = 1 \\ \frac{12}{y} + \frac{12}{z} = 1 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 12, y = 18, z = 36.$

Ha k napig tartott még a befejező munka, akkor:

$\frac{3}{12} + \frac{3}{18} + \frac{3}{36} + \frac{k}{12} + \frac{k}{36} = 1$. Ebből: $k = 4{,}5$ nap.

7.8.18. Jelöljük az eredeti sebességet *v*-vel, az út hosszát *s*-sel. Ekkor az eredetileg tervezett menetidő $\frac{s}{v}$. Az új menetidőt két részletben írhatjuk fel:

$$\frac{s}{v} - \frac{1}{10} = \frac{20}{v+10} + \frac{s-20}{v}$$

$$v^2 + 10v - 2000 = 0$$

Ebből: $v = 40$ km/h.

7.8.19. Jelöljük a menetoszlop sebességét *v*-vel, a futár sebességét *x*-szel. Ekkor a futár relatív sebessége $x - v, illetve\ x + v$. Vagyis:

$$\frac{50}{x-v} + \frac{50}{x+v} = \frac{120}{v}$$

$$6x^2 - 5xv - 6v^2 = 0$$

Ebből: $x = 1{,}5v$. A futár útja: $1{,}5 \cdot 120 = 180$ méter.

7.8.20. A hajó sebessége álló vízben, legyen x km/h. A feltételek szerint:

$$\frac{240}{x+4} + \frac{240}{x-4} = 25$$

A megoldás: $x = 20$ km/h. A másik gyök nem felel meg.

7.9. Vegyes feladatok

Elsőfokú egyenletek

7.9.1. A feltétel: $x \neq \pm 2\ és\ x \neq 0$. Szorozzuk be az egyenletet $x(x-2)(x+2)$-vel. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg. A megoldás: $x = \frac{4}{3}$

7.9.2. A feltétel: $x \neq -6, x \neq 0\ és\ x \neq -2$. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{x+2}{x+6} : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) = \frac{x+2}{x+6} : \frac{x+2}{2x} = \frac{2x}{x+6}$$

Vagyis az egyenletünk:

$$\frac{2x}{x+6} = \frac{2x}{3}$$

A megoldás: $x_1 = 0\ és\ x_2 = -3$. Az első gyök a feltétel miatt nem megoldás.

7.9.3. A zárójelek felbontása után:

$$5x(x^2 - 6x + 9) - 5(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 15(x^2 - 4) = 5$$

$$5x^3 - 30x^2 + 45x - 5x^3 + 15x^2 - 15x + 5 + 15x^2 - 60 = 5$$

$$30x = 60, azaz\ x = 2$$

7.9.4. A feltétel: $x \neq \pm 1$. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x-1)(x+1)$-gyel:

$$\left(\frac{x}{2}-2\right)(x+1)+\left(\frac{x}{2}+2\right)(x-1)=x^2-1$$

Bontsuk fel a zárójeleket és rendezzük az egyenletet:

$$-4 \neq -1$$

Ez ellentmondás, tehát nincs megoldás.

7.9.5. A feltétel: $x \neq \pm\frac{1}{3}$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{9x-5}{3x+1}-\frac{12x+1}{2(3x-1)}=\frac{9-108x+36x^2}{4(3x-1)(3x+1)}$$

Szorozzunk be a közös nevezővel: $4(3x-1)(3x+1)$-gyel:

$$4(9x-5)(3x-1)-2(12x+1)(3x+1)=9-108x+36x^2$$

Bontsuk fel a zárójeleket, majd oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x=\frac{1}{2}$

Másodfokú egyenletek

7.9.6. Szorozzunk be a közös nevezővel, rendezzük, majd oldjuk meg. A megoldás: $x=2$

7.9.7. A feltétel: $x \neq \pm 3$. Szorozzuk be az egyenletet $(x-3)(x+3)$-mal. Rendezzük az egyenletet, majd oldjuk meg: $16x^2-48x+27=0$. A megoldás: $x_1=\frac{3}{4}, x_2=\frac{9}{4}$

7.9.8. A feltétel: $x \neq -1$ és $x \neq 2$. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{x^2-9x+14}{2x^2-2x-4}=\frac{(x-2)(x-7)}{2(x-2)(x+1)}=\frac{x-7}{2x+2}$$

7.9.9. Vezessünk be új ismeretlent: $y=x^2+x+1$. Ezt felhasználva:

$$(y+2)y=15, azaz\ y_1=3 \text{ és } y_2=-5$$

Ebből a megoldás: $x_1=1$ és $x_2=-2$

7.9.10. Vezessünk be új ismeretlent: $y = x^2 + 3x - 3$. Ezt felhasználva:

$$\frac{3}{y} - 2y - 1 = 0, azaz\ y_1 = 1\ és\ y_2 = -\frac{3}{2}$$

Ebből a megoldás: $x_1 = 1, x_2 = -4, x_3 = \frac{-3+\sqrt{15}}{2}, x_4 = \frac{-3-\sqrt{15}}{2}$

Paraméteres egyenlet

7.9.11. Alakítsuk át az egyenletet. Rendezés után:

$$2x^2 + 6ax + 3a^2 = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{a\left(\sqrt{3} - 3\right)}{2}\ és\ x_2 = -\frac{a\left(\sqrt{3} + 3\right)}{2}$$

7.9.12. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $4(x + b)(x - b)$

$$12x^2 - 4bx - b^2 = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{b}{2}\ és\ x_2 = -\frac{b}{6}$$

7.9.13. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $(x - a)^2$

$$(x - a)^2 - 2a(x - a) + (a^2 - b^2) = 0$$

Ebből: $x - a = a \pm b$

A megoldás:

$$x_1 = 2a + b\ és\ x_2 = 2a - b$$

7.9.14. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $bc^2(a - 2b)$

$$(cx)^2 - (a - 2b)cx - b(a - b) = 0$$

Ebből:

$$cx = \frac{(a-2b) \pm a}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{a-b}{c} \text{ és } x_2 = -\frac{b}{c}$$

7.9.15. Alakítsuk át az egyenletet. Szorozzunk be a közös nevezővel: $4(x^2 - a^2)$

$$4x(x-a) + 8x(x+a) = 5a^2$$

$$12x^2 + 4ax - 5a^2 = 0$$

A megoldás: $x_1 = \frac{a}{2}$ és $x_2 = -\frac{5a}{6}$

7.9.16. A tört miatt: $a \neq \pm 1$ és $a \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet, majd szorozzunk be a közös nevezővel:

$$\frac{2(a-1) - 4ax}{(a-1)(a+1)} = \frac{(1-3a)x}{a(a-1)} + \frac{1-a}{a(a+1)}$$

$$a[2(a-1) - 4ax] = (a+1)(1-3a)x + (1-a)(a-1)$$

Bontsuk fel a zárójeleket és alakítsuk tovább. A megoldás:

$$x = \frac{5a^2 - 4a + 1}{(a-1)^2}$$

7.9.17. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2 = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a+x}{ax}} - \frac{\frac{1}{2a}}{\frac{2a-x}{2ax}}$$

$$2 = \frac{x}{a+x} - \frac{x}{2a-x}$$

$$a(4a + x) = 0$$

A megoldás: $x = -4a$

7.9.18. Alakítsuk át az egyenletet az előző feladathoz hasonlóan. A megoldás: $x = 2a$

7.9.19. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{(x+8a)(x-12a)-(x+12a)(x-8a)}{(x-8a)(x-12a)} \cdot \frac{(x-8a)(x-12a)}{(x+4a)(x-12a)+(4a-x)(x-8a)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-8ax}{-80a^2+4ax} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{-2x}{-20a+x} = \frac{2}{3}$$

$$-6x = -40a + 2x$$

$$x = 5a$$

7.9.20. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2ax + 4x = 2 - 2a$$

$$x(a+2) = 1 - a$$

$$x = \frac{1-a}{a+2}$$

Ha $a = -2$, akkor nincs megoldás.

Ha $a \neq 2$, akkor:

$$x = \frac{1-a}{a+2} = \frac{3}{a+2} - 1$$

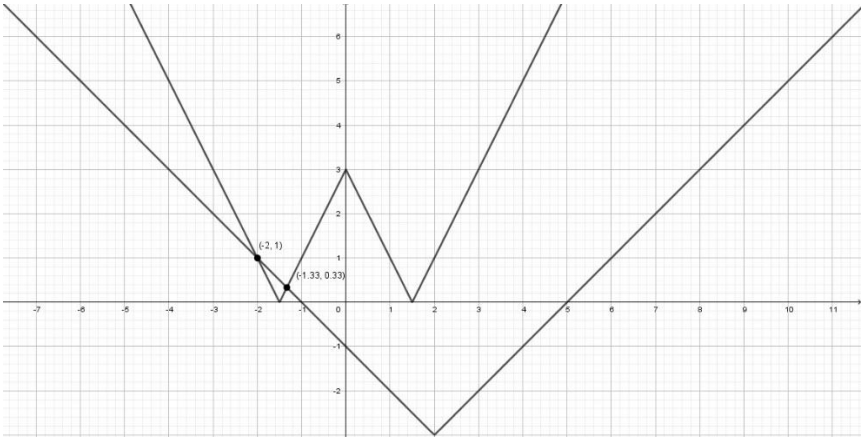
Ez akkor lesz egész szám, ha:

$$a + 2 = -3, -1, 1, 3$$

Ekkor az *x* egész értéke: $-2, -4, 2, 0$

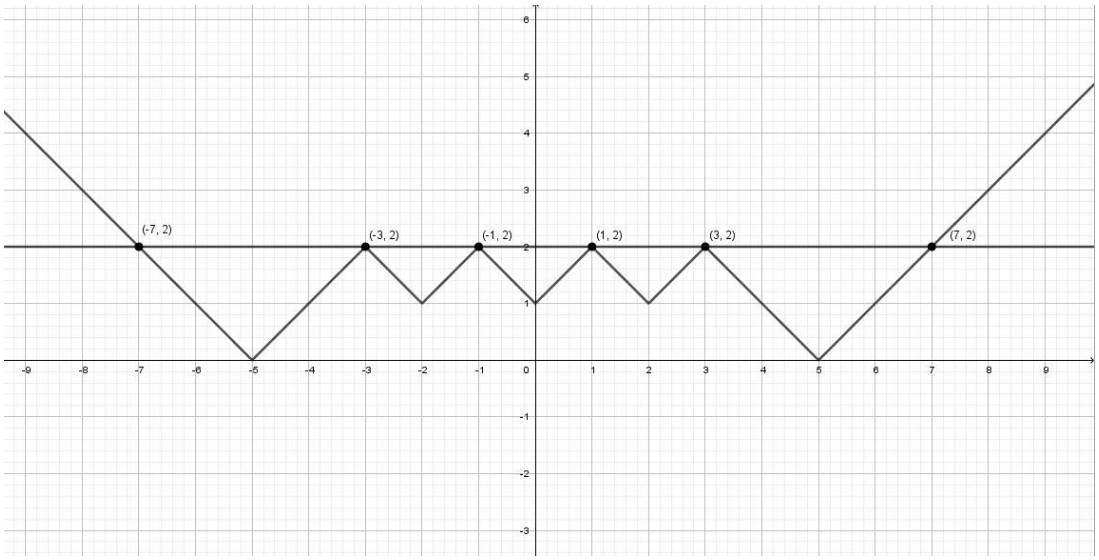
Abszolutértékes egyenlet

7.9.21. Ábrázoljuk külön a bal, illetve a jobb oldalt, majd keressük meg a metszéspontokat.



Ha $-x-1=2x+3$, akkor $x_1=-\frac{4}{3}$. Ha $-x-1=-2x-3$, akkor $x_2=-2$.

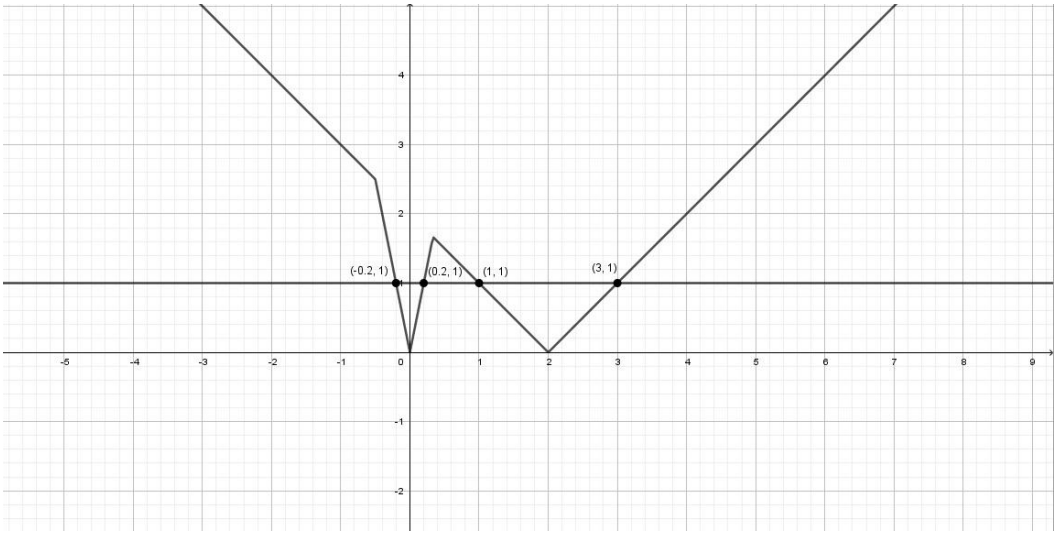
7.9.22. Ábrázoljuk a baloldalt, majd határozzuk meg az $y=2$ egyenessel való metszéspontokat.



A megoldás:

$$x_1=-7, x_2=-3, x_3=-1, x_4=1, x_5=3, x_6=7$$

7.9.23. Ábrázoljuk a baloldalt, majd határozzuk meg az $y = 1$ egyenessel való metszéspontokat.



Ha $x \leq -\frac{1}{2}$, akkor nincs metszéspont.

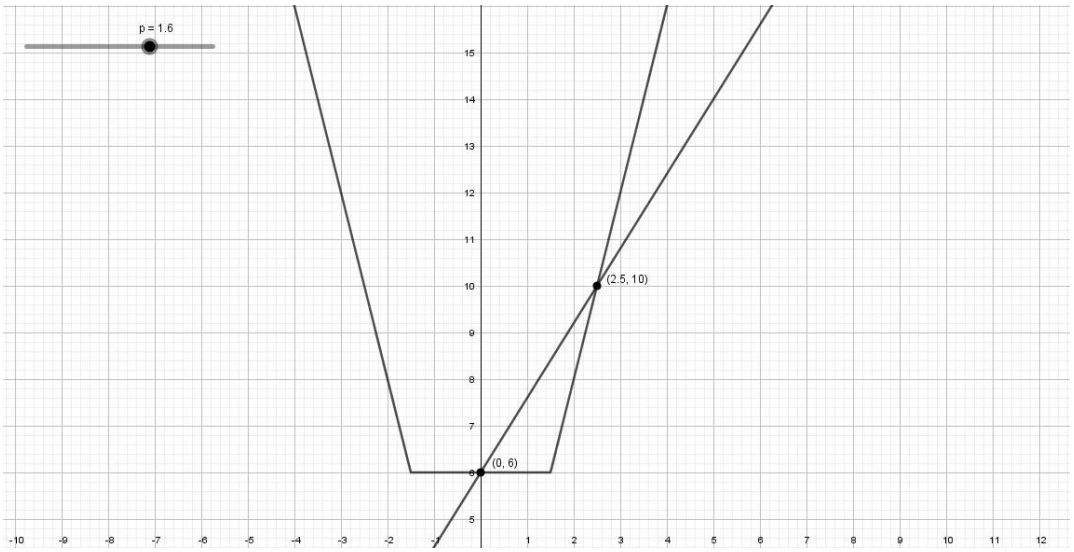
Ha $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$, akkor két metszéspont van:

$$\text{Az } 5x = 1 \text{ esetén } x_1 = \frac{1}{5} \text{ és } -5x = 1 \text{ esetén } x_2 = -\frac{1}{5}$$

Ha $\frac{1}{3} \leq x$, akkor két metszéspont van:

$$\text{Az } x - 2 = 1 \text{ esetén } x_3 = 3 \text{ és } -x + 2 = 1 \text{ esetén } x_4 = 1$$

7.9.24. Ábrázoljuk a baloldalt.



$$|2x+3|+|2x-3| = \begin{cases} -4x, ha\ x < -\frac{3}{2} \\ 6, ha\ -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2} \\ 4x, ha\ \frac{3}{2} < x \end{cases}$$

Ezek miatt csak akkor lesz kettőnél több metszéspontja az $y = px + 6$ egyenletű egyenessel, ha $y = 6, vagyis\ p = 0$.

Irracionális egyenlet

7.9.25. Vigyük át az a tagot a baloldalra és emeljük négyzetre:

$$x^2 - 2ax + x\sqrt{x^2 + a^2} = 0$$

$$x\left(x - 2a + \sqrt{x^2 + a^2}\right) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $x_1 = 0$

2. eset: $x - 2a + \sqrt{x^2 + a^2} = 0$

Vigyük át az $(x - 2a)$ tagot a jobb oldalra és emeljük négyzetre. Ebből: $x_2 = \frac{3}{4}a$

A megoldás során a $\sqrt{a^2} = |a|$ egyenlőséget is figyelni kell. Például ha $a \ge 0$, akkor az

$x_1 = 0$ gyöke az egyenletnek, ha pedig $a < 0$, akkor nem. Ugyanez vonatkozik az $x_2 = \frac{3}{4}a$ értékre is. A megoldás: Ha $a \ge 0$, akkor $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{3}{4}a$. Ha $a < 0$, akkor az egyenletnek nincs gyöke.

7.9.26. Alakítsuk át az egyenletet, majd gyöktelenítsük a tört nevezőjét:

$$\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} - \frac{x}{a}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} + \frac{x}{a}} = \frac{1}{4}$$

$$\left[\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}-\frac{x}{a}\right]^2=\frac{1}{4}$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés nem lehet negatív, ezért:

$$\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{a}$$

Emeljük négyzetre mind a két oldalt:

$$1+\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{x}{a}=\frac{3}{4}$$

A megoldás: $x=\frac{3}{4}a$

7.9.27. A megoldás az előző feladathoz hasonló.

$$\left(\sqrt{1+a^2x^2}-ax\right)^2=\frac{1}{c^2}$$

Mivel a $\sqrt{1+a^2x^2}-ax$ mindig pozitív, ezért:

$$\sqrt{1+a^2x^2}=ax+\frac{1}{|c|}$$

Emeljük négyzetre mind a két oldalt:

$$x=\frac{|c|^2-1}{2a|c|}=\frac{c^2-1}{2a|c|}$$

A megoldás:

$$x=\frac{c^2-1}{2ac}, ha\ c>0, x=\frac{1-c^2}{2ac}, ha\ c<0$$

7.9.28. Egyszerűsítsük a baloldali törtet $\sqrt{x+c}$-vel:

$$\frac{\sqrt{x+c}+\sqrt{x-c}}{\sqrt{x+c}-\sqrt{x-c}}=\frac{9(x+c)}{8c}$$

A baloldalon gyöktelenítsünk és alakítsuk tovább:

$$8\sqrt{x^2-c^2}=x+9c$$

A megoldás:

Ha $c \leq 0$, akkor mind a két gyök hamis. Ha $c > 0$, akkor:

$$x_1=\frac{5}{3}c \text{ és } x_2=-\frac{29}{21}c$$

7.9.29. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{\left(\sqrt{a-x}\right)^3+\left(\sqrt{x-b}\right)^3}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$$

Egyszerűsítsük a baloldalt $\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}\right) \neq 0$-val. Ekkor:

$$\sqrt{(a-x)(x-b)}=0$$

A megoldás:

$$x_1=a \text{ és } x_2=b, ahol\ a \neq b$$

7.9.30. Vezessünk be új ismeretlent:

$$\sqrt[3]{x}=a \text{ és } \sqrt[3]{x^2}=a^2$$

Ekkor:

$$2a^2+a-3=0$$

Ebből: $a_1=1 \text{ és } a_2=-\frac{3}{2}$. A megoldás: $x_1=1 \text{ és } x_2=-\frac{27}{8}$

7.9.31. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg. Vezessünk be új ismeretlent:

$$\sqrt[3]{x}=a \text{ és } \sqrt[3]{x^2}=a^2$$

Ekkor:

$$2a^2-3a-20=0$$

A megoldás: $x_1=64 \text{ és } x_2=-\frac{125}{8}$

7.9.32. Vezessünk be új ismeretlent:

$$\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{x^2} = a^2 \text{ és } x = a^3$$

Ekkor:

$$\frac{a^4 - 1}{a^2 - 1} - \frac{a^2 - 1}{a + 1} = 4$$

Az első törtet egyszerűsítsük $(a^2 - 1)$-gyel, a másikat $(a - 1)$-gyel:

$$a^2 - a - 2 = 0$$

Ebből: $a_1 = 2 \text{ és } a_2 = -1$. A második gyök hamis, mert ekkor $a^2 - 1 = 0 \text{ és } a + 1 = 0$ lenne. A megoldás: $x = 8$

Elsőfokú egyenlőtlenség

7.9.33. A feltétel: $x \neq 13$. Átalakítások után: $|x - 13| < \frac{9}{4}$. Ebből: $10{,}75 < x < 15{,}25$.

A megoldás: $x = 11, x = 12, x = 14, x = 15$.

7.9.34. A következő négy esetet kell vizsgálni:

$$|x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = \begin{cases} -x - 4, ha\ x < -2 \\ x, ha\ -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2, ha\ 1 < x < 3 \\ x + 4, ha\ 3 \leq x \end{cases}$$

Ha $3 \leq x$, akkor $x + 4 > 4$. Ebből: $3 \leq x$.

Ha $1 < x < 3$, akkor $3x - 2 > 4$. Ebből: $2 < x < 3$

Ha $-2 \leq x \leq 1$, akkor $x > 4$. Ebből: nincs megoldás.

Ha $x < -2$, akkor $-x - 4 > 4$. Ebből: $x < -8$

Összesítve, a megoldás: $x < -8\ vagy\ 2 < x$.

7.9.35. 1. Ha $|2x - 1| \geq 3$, azaz ha $x \geq 2\ vagy\ x \leq -1$, akkor $|2x - 1| - 3 > 2$. Ebből

$2x - 1 > 5\ vagy\ 2x - 1 < -5$, következik. Az egyenlőtlenségek közös megoldása:

$$x < -2\ vagy\ 3 < x$$

2. Ha $|2x-1|<3$, azaz ha $-1<x<2$, akkor $|2x-1|-3<2$. Ebből

$0<x<1$, következik. Az egyenlőtlenségek közös megoldása: $0<x<1$.

7.9.36. A feltétel: $x \neq 15$. Átalakítások után: $|x-15|<\frac{9}{4}$. Ebből: $12{,}75<x<17{,}25$.

A megoldás: $x=13, x=14, x=16, x=17$.

7.9.37. A feltétel: $x \neq -2$ *és* $x \neq 8$.

Ha $x-3 \geq 0$, akkor: $\frac{2x-16+16}{x-8} \geq 1-\frac{1}{x+2}$

Ebből: $\frac{16}{x-8} \geq -1-\frac{1}{x+2} \geq -1{,}2$. Ekkor nincs megoldás.

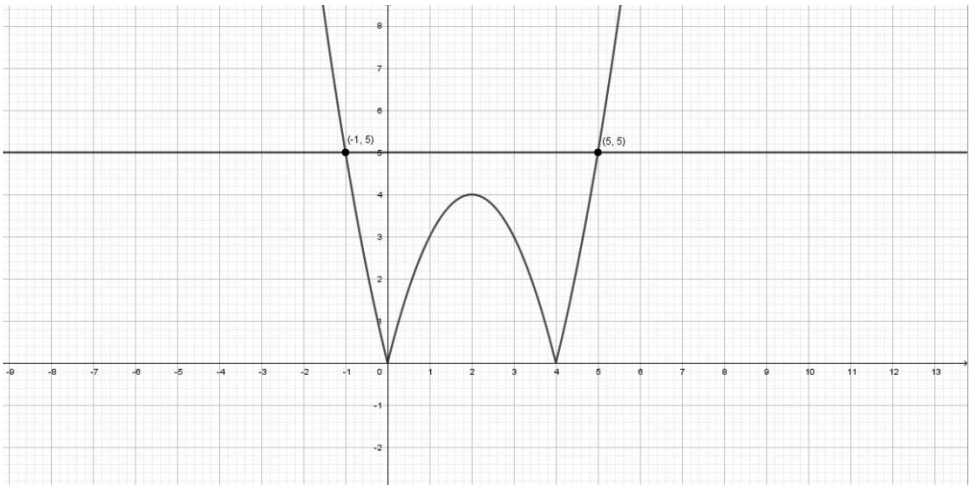
Ha $3 \leq x<8$, akkor $\frac{16}{x-8}>0,\ -1-\frac{1}{x+2}<0$. Ekkor nincs megoldás.

Ha $8<x$, akkor $2+\frac{16}{x-8}+\frac{1}{x+2} \geq 1$ miatt, $8<x$ megoldás.

Ha $x<3$, akkor $\frac{2x}{-x+3-5}+\frac{1}{x+2}=\frac{1-2x}{x+2} \geq 1, vagyis\ \frac{-1-3x}{x+2} \geq 0$. A két egyenlőtlenség közös megoldása: $-2<x \leq -\frac{1}{3}$.

Másodfokú egyenlőtlenség

7.9.38. A grafikus megoldást alkalmazzuk:



A megoldás: $-1<x<5$.

7.9.39. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget, majd rendezzük nullára. Ekkor: $x(p-2x)>0$.

A megoldás: $0<x<\frac{p}{2}$

7.9.40. A feltétel: $x\neq 5$ és $x\neq -2$. Rendezzük nullára, majd hozzuk közös nevezőre.

A megoldás: $x<1\ vagy\ \frac{5}{3}<x<2\ vagy\ 3<x$.

7.9.41. A feltétel: $x\neq 2$ és $x\neq 4$. A megoldás: $x<1\ vagy\ 2<x<3\ vagy\ 4<x$.

7.9.42. A nevező mindig pozitív, tehát elég egy esetet vizsgálni:

Az $x^2+2x-3>0$, ha $x<-3\ vagy\ 1<x$.

Elsőfokú egyenletrendszer

7.9.43. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x=1, y=3, z=4, u=2$

7.9.44. A megoldás: $x=9, y=7, z=5, u=1, v=3$

7.9.45. Alkalmazzuk a behelyettesítő módszert. A megoldás: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=1$

7.9.46. A megoldás: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=-1$

7.9.47. A feladatnak nincs megoldása.

7.9.48. A megoldás: $x_1=x_2=x_3=1, x_4=2$

Másodfokú egyenletrendszer

7.9.49. Az első egyenlet mind a két oldalához adjunk 5-öt, majd alakítsuk át:

$$x(x-2y)+5+\sqrt{x(x-2y)+5}=6$$

Vezessünk be új ismeretlent: $\sqrt{x(x-2y)+5}=a\geq 0$. Ekkor: $a^2+a-6=0$.

Ebből: $a_1=-3$ és $a_2=2$. Az első gyök nem felel meg a feltételnek. A második gyököt visszahelyettesítve:

$$\sqrt{x(x-2y)+5}=2$$

$$x(x-2y)+5=4$$

$$x(x-2y)+1=0$$

Az eredeti második egyenletből: $x=4y-3$. Ezt helyettesítsük be:

$$(4y-3)(4y-3-2y)+1=0$$

$$4y^2-9y+5=0$$

Ebből: $y_1=1, y_2=\frac{5}{4}$. A megoldás: $x_1=1, y_1=1$ és $x_2=2, y_2=\frac{5}{4}$

7.9.50. Alakítsuk át az egyenleteket:

$$\begin{cases} x+2y^2=-4y \\ y-2xy=\frac{3}{2}x \end{cases}$$

Az első egyenletből: $x=-2y^2-4y$. Ezt helyettesítsük be a másodikba:

$$y-2y(-2y^2-4y)=\frac{3}{2}(-2y^2-4y)$$

Mivel oszthatunk *y*-nal, ezért: $4y^2+11y+7=0$

A megoldás: $x_1=2, y_1=-1$ és $x_2=\frac{7}{8}, y_2=-\frac{7}{4}$

7.9.51. Az első egyenlet mind a két oldalához adjunk 6-ot és alakítsuk át:

$$\sqrt{y^2-4x+2}+6=y^2-4x+2$$

Vezessünk be egy új ismeretlent: $\sqrt{y^2-4x+2}=b\geq 0$. Ekkor: $b^2-b-6=0$.

Ebből: $b_1=3$ és $b_2=-2$. A második gyök nem felel meg. Vagyis: $y^2-4x-7=0$

A második egyenletből: $x=2a-1-y$. Ezt behelyettesítve:

$$y^2+4y-8a-3=0$$

Mivel a feladatnak csak egy valós számpár a megoldása, ezért az egyenlet diszkriminánsa 0:

$$16-4(-8a-3)=0$$

$$a=-\frac{7}{8}$$

Ebből:

$$y^2 + 4y + 4 = 0$$

$$(y + 2)^2 = 0$$

A megoldás: $x = -\frac{3}{4}$ $és$ $y = -2$

7.9.52. Szorozzuk be az egyenleteket a közös nevezővel:

$$\begin{cases} xy = 11x - 12 \\ xy = 7y - 25 \end{cases}$$

Ebből:

$$x = \frac{7y - 13}{11}$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$\frac{7y^2 - 13y}{11} = 7y - 25$$

$$7y^2 - 90y + 275 = 0$$

A megoldás: $x_1 = 2, y_1 = 5$ $és$ $x_2 = \frac{42}{11}, y_2 = \frac{55}{7}$

7.9.53. Vezessünk be új ismeretleneket:

$$\sqrt{2x^2 + y} = a \geq 0 \geq és \sqrt{2x^2 - y} = b \geq 0$$

Ekkor:

$$\begin{cases} a^2 + a - 72 = 0 \\ b^2 - b - 30 = 0 \end{cases}$$

Ezek megoldása: $a_1 = -9, a_2 = 8, b_1 = -5, b_2 = 6$

A negatív gyökök nem felelnek meg. Vagyis:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + y} = 8 \\ \sqrt{2x^2 - y} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 64 \\ 2x^2 - y = 36 \end{cases}$$

Adjuk össze a két egyenletet: $x^2 = 25, azaz\ |x| = 5$. Ezt visszahelyettesítve, a megoldás:

$$x_1 = 5, y_1 = 14\ és\ x_2 = -5, y_2 = 14$$

Szöveges feladatok

7.9.54. A nagymutató egy óra alatt 360°-os, egy perc alatt 6°-os szögelfordulást végez. A kismutató egy óra alatt 30°-os, egy perc alatt 0,5°-os szögelfordulást végez. 9 óra 20 perckor:

$$270° - 120° + 10° = 160°$$

7.9.55. Tegyük fel, hogy az *n.* óra után ($n = 0,1, \dots ,11$) *x* perccel fedik egymást a mutatók. Ekkor $x \cdot 6°$ a nagymutató szögelfordulása, és $n \cdot 30° + x \cdot 0,5°$ a kismutatóé. Ebből:

$$x \cdot 6° = n \cdot 30° + x \cdot 0,5°, azaz\ x = n \cdot \frac{60}{11}$$

Az időpontok:

$$0\ óra\ 0\ perc, 1\ óra\ \frac{60}{11}, 2\ óra\ 2 \cdot \frac{60}{11}, \dots, 11\ óra\ 11 \cdot \frac{60}{11} = 12\ óra\ 0\ perc$$

7.9.56. Legyen a jó válaszok száma *x*, a rossz válaszoké *y*. Ekkor $x + y \leq 20$. A feltételek szerint: $5x - 2y = 48, azaz\ y = 2x - 24 + \frac{x}{2}$. Legyen $x = 2k$. Ekkor: $y = 5k - 24$. Mivel

$$0 \leq x + y \leq 20, ezért\ 5 \leq k \leq 6$$

Két megoldás van: $x = 10, y = 1, illetve\ x = 12, y = 6$.

7.9.57. Az *A* testvér része:

$$20000 + \frac{x - 20000}{10} = 18000 + \frac{x}{10}$$

A *B* testvér része:

$$40000 + \frac{1}{10}\left(x - 18000 - \frac{x}{10} - 40000\right) = 34200 + \frac{9x}{100}$$

Az egyenlő nagyságú örökség miatt:

$$18000 + \frac{x}{10} = 34200 + \frac{9x}{100}$$

Ebből: $x = 1.620.000$ Ft. Mindegyik testvér 180.000 Ft-t kapott, és kilencen voltak testvérek.

7.9.58. Legyen az első gyalogos sebessége x km/h, a másodiké x-2 km/h. Ebből:

$$\frac{24}{x-2} + \frac{24}{x} = 1$$

A megoldás: Az első gyalogos sebessége 8 km/h, a másodiké 6 km/h.

7.9.59. Tegyük fel, hogy a gyorsvonat indulása után *x* órával találkoznak. Ekkor a tehervonat indulásától x+3 óra telt el. A találkozásik mindkét vonat 540 km-t tesz meg. A feltételek szerint: $\frac{540}{x} - \frac{540}{x+3} = 15$

Ebből: $x_1 = 9$ $és$ $x_2 = -12$. A második gyök nem felel meg. Tehát 17 órakor találkoznak.

7.9.60. Legyen az egyik korcsolyázó sebessége *x*, a másiké *x+6* m/perc, mert:

$$120 = \Delta s = \Delta v \cdot 20, azaz\ \Delta v = 6$$

Ezek alapján:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+6} = 1, azaz\ x^2 + 6x - 720 = 0$$

Ebből: $x_1 = 24$, a másik gyök nem felel meg.

Tehát az egyik sebessége 24 m/perc, a másiké 30 m/perc.

7.9.61. Legyen a két város távolsága x km. A találkozásig A $\left(\frac{x}{2} + 3\right)$ km utat tett meg, B pedig $\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ km-t. A további úton A sebessége $\left(\frac{x}{2} - 3\right) : 4{,}5$ a B sebessége $\left(\frac{x}{2} + 3\right) : 8$.

A találkozásig eltelt idő A esetében:

$$\left(\frac{x}{2} + 3\right) : \left[\left(\frac{x}{2} - 3\right) : 4{,}5\right]$$

A találkozásig eltelt idő B esetében:

$$\left(\frac{x}{2}-3\right):\left[\left(\frac{x}{2}+3\right):8\right]$$

A két idő egyenlőségéből következik:

$$\left(\frac{x}{2}+3\right)^2\cdot\frac{9}{2}=\left(\frac{x}{2}-3\right)^2\cdot 8$$

$$7x^2-300x+252=0$$

Ebből: $x_1=42, x_2=\frac{6}{7}<6$ miatt csak az első gyök megfelelő.

Tehát a két város távolsága 42 km.

8. 8. Exponenciális és logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

8.1. Exponenciális egyenletek, egyenlőtlenségek

8.1.1. A tört nevezője nem lehet 0, vagyis $x \neq 2$. A tört értéke akkor lehet 0, ha a számláló 0. Ezért:

$$x^3 - x^2 - 2x = 0$$

Ebből:

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

Ennek három gyöke van: $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -1$, de a második hamis gyök.

8.1.2. Alakítsuk át az egyenlet jobb oldalát:

$$5{,}4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5} = 3^3 \cdot 5^{-1}$$

Ebből:

$$3^{x^2-1} \cdot 5^{x-3} = 3^3 \cdot 5^{-1}$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 3 \\ x - 3 = -1 \end{cases}$$

A megoldás: $x = 2$.

8.1.3. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$3^{\frac{2x+2}{3}} = (3^{2x+1})^{x+1}$$

Az exponenciális függvény szigorúan monoton, ezért:

$$\frac{2x+2}{3} = 2x^2 + 3x + 1$$

Ennek az egyenletnek a megoldása: $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = -1$.

8.1.4. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\sqrt{3^{2x} - 8 \cdot 3^x} = 3 \cdot 3^x - 24$$

Legyen $3^x = y$. Ekkor:

$$\sqrt{y(y-8)} = 3(y-8)$$

Emeljünk négyzetre, majd rendezzük az egyenletet:

$$y(y-8) = 9(y-8)^2$$

$$y^2 - 8y = 9y^2 - 144y + 576$$

$$0 = y^2 - 17y + 72$$

Ennek a gyökei: $y_1 = 9, y_2 = 8$. Visszahelyettesítve, a megoldás: $x_1 = 2, x_2 = \frac{\log 8}{\log 3}$.

8.1.5. Legyen $2^x = y$. Ekkor:

$$\frac{3y-1}{2y-1} + \frac{2y-1}{3y-1} = \frac{5}{2}$$

Ezt az egyenletet rendezve:

$$4y^2 - 5y + 1 = 0$$

Ennek két gyöke van: $y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = 1$.

Ezeket visszahelyettesítve, a megoldás: $x_1 = -2, x_2 = 0$.

8.1.6. Legyen $2^x = y$. Ekkor:

$$y^2 - 3y + \frac{16}{y^2 - 3y + 4} = 6$$

Legyen $y^2 - 3y = a$. Ekkor:

$$a + \frac{16}{a+4} = 6$$

Ezt átalakítva:

$$a^2 - 2a - 8 = 0$$

Ennek a megoldása: $a_1 = 4, a_2 = -2$. Ezeket visszahelyettesítve, két egyenlet adódik:

$$y^2 - 3y - 4 = 0, illetve\ y^2 - 3y + 2 = 0$$

Ezek megoldásai:

$$y_1 = 4, y_2 = -1, y_3 = 2, y_4 = 1$$

A második gyök hamis. A többit behelyettesítve a $2^x = y$ egyenletbe, a megoldás:

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0$$

8.1.7. Legyen $3^x = a, és\ 3^{\sqrt{x-2}} = b$. Ekkor:

$$\frac{a}{b} - \frac{27b}{a} = 6$$

Ezt szorozzuk be ab-vel:

$$-27b^2 - 6ab + a^2 = 0$$

Ezt oldjuk meg *b*-re, mint másodfokú egyenletet. Ebből:

$$b_1 = -\frac{a}{3}, b_2 = \frac{a}{9}$$

Az első hamis gyök. A másodikat visszahelyettesítve:

$$3^{\sqrt{x-2}} = \frac{3^x}{9}$$

Ebből:

$$\sqrt{x-2} = x - 2$$

$$x - 2 = x^2 - 4x + 4$$

Ezt megoldva, az eredmény: $x_1 = 3, x_2 = 2$

8.1.8. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$3 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 3^{4x} = 5 \cdot 2^{2x} \cdot 3^{2x}$$

Legyen $2^{2x} = a, és\ 3^{2x} = b$. Ekkor:

$$3a^2 + 2b^2 = 5ab$$

Ebből:

$$2b^2 - 5ab + 3a^2 = 0$$

Ezt oldjuk meg *b*-re, mint másodfokú egyenletet. Ebből:

$$b_1 = \frac{3a}{2}, b_2 = a$$

Ezeket visszahelyettesítve:

$$3^{2x} = a, \qquad 3^{2x} = 2^{2x}, \qquad vagyis\ x_1 = 0$$

$$3^{2x} = \frac{3a}{2}, \qquad 3^{2x} = \frac{3 \cdot 2^{2x}}{2}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \frac{3}{2}, \qquad vagyis\ x_2 = \frac{1}{2}$$

8.1.9. Legyen $2^x = a, és\ 5^x = b$. Ekkor:

$$a + \sqrt{4ab} = 3b$$

$$\sqrt{4ab} = 3b - a$$

Emeljük négyzetre, majd rendezzük az egyenletet:

$$0 = 9b^2 - 10ab + a^2$$

Ezt *b*-re megoldva: $b_1 = a, b_2 = \frac{a}{9}$. A második gyök hamis. Az elsőt visszahelyettesítve: $5^x = a, 5^x = 2^x, vagyis\ x = 0$.

8.1.10. Osszuk el az egyenletet 2^x-nel. Ekkor:

$$\frac{4^x}{2^x} - \frac{4 \cdot 4^{\sqrt{x}}}{2^x} = 3 \cdot 2^{\sqrt{x}}$$

$$2^x - \frac{4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}}{2^x} = 3 \cdot 2^{\sqrt{x}}$$

Osszuk el az egyenletet $2^{\sqrt{x}}$-nel. Ekkor:

$$\frac{2^x}{2^{\sqrt{x}}} - \frac{4 \cdot 2^{2\sqrt{x}}}{2^x \cdot 2^{\sqrt{x}}} = 3$$

$$2^{x-\sqrt{x}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{x}-x} = 3$$

Legyen $2^{x-\sqrt{x}} = y$. Ekkor:

$$y - \frac{4}{y} = 3$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva: $y_1 = 4, y_2 = -1$. A második gyök hamis. Az első gyököt visszahelyettesítve, $2^{x-\sqrt{x}} = 4$ adódik. Ebből:

$$2^{x-\sqrt{x}} = 2^2$$

Legyen $\sqrt{x} = a$. Ekkor az exponenciális függvény miatt: $a^2 - a - 2 = 0$. Ezt megoldva: $a_1 = 2, \text{és } a_2 = -1$ adódik. A második gyök hamis. Az első gyököt visszahelyettesítve, $\sqrt{x} = 2$ adódik, amiből: $x = 4$.

8.1.11. Legyen $3^x = y$. Ekkor:

$$y^2 - \sqrt{y^2 - 2y + 1} = 7$$

Ebből:

$$y^2 - 7 = y - 1$$

Megoldva a másodfokú egyenletet, $y_1 = 3, y_2 = -2$. A második gyök hamis. Az első gyököt visszahelyettesítve: $3^x = 3$, ebből $x = 1$.

8.1.12. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon, majd emeljük négyzetre:

$$\sqrt{4^{-x} + 2^{3-x} + 16} = 4$$

$$4^{-x} + 2^{3-x} + 16 = 16$$

$$2^{-2x} + \frac{8}{2^x} = 0$$

Legyen $2^x = y$. Ekkor:

$$\frac{1}{y^2} - \frac{8}{y} = 0$$

Megoldva az egyenletet, majd visszahelyettesítve: $y = \frac{1}{8}, x = -3$.

8.1.13. Az egyenletet átrendezve:

$$7 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}$$

Kiemelések után kapjuk:

$$3^x(7 \cdot 3 - 3^4) = 5^x(5^2 - 5^3)$$

Ebből pedig:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$$

Tehát a megoldás: $x = -1$.

8.1.14. Minden hatványt 2-es alapra hozva:

$$2^{-3} \cdot 2^{4x-6} = \frac{2^{\frac{-x}{2}}}{2^{-3x}}$$

Ebből:

$$2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}$$

Vagyis: $4x - 9 = \frac{5}{2}x$. Tehát a megoldás: $x = 6$.

8.1.15. Minden hatványt 2-es alapra hozva:

$$2^{-x^2} \cdot 2^{2x+2} = 2^{-6}$$

Ebből:

$$2^{-x^2+2x+2} = 2^{-6}$$

Vagyis: $-x^2 + 2x + 2 = -6$. Tehát a megoldás: $x_1 = 4, x_2 = -2$

8.1.16. Minden hatványt 2-es alapra hozva:

$$2^{\frac{5(x+5)}{x-7}} = 2^{-2} \cdot 2^{\frac{7(x+17)}{x-3}}$$

Ebből:

$$\frac{5(x+5)}{x-7} = -2 + \frac{7(x+17)}{x-3}$$

Tehát a megoldás: $x = 10$.

8.1.17. Végezzük el a baloldalon a műveleteket, a jobb oldalt írjuk fel 2 hatványaként:

$$2^{\left(1+\frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 2^2$$

Ebből:

$$\left(1 + \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = 2$$

Azaz:

$$2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0$$

Vezessünk be egy új ismeretlent: $y = \sqrt{x}$, ekkor:

$$2y^2 - 5y - 3 = 0$$

Ennek a gyökei: $y_1 = 3, y_2 = -\frac{1}{2}$

A második gyök hamis, mert az $y = \sqrt{x}$, csak pozitív lehet. Vagyis $\sqrt{x} = 3$.

Tehát a megoldás: $x = 9$.

8.1.18. Vezessünk be egy új ismeretlent: $y = \sqrt[x]{9}$, ekkor:

$$3y^2 - 10y + 3 = 0$$

Tehát a megoldás: $x_1 = 2, x_2 = -2$

8.1.19. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\frac{3^x}{9} - \frac{3^x}{3} + 2 \cdot 3^x = 4^x - 2 \cdot \frac{4^x}{4} + 8 \cdot \frac{4^x}{16}$$

$$\frac{3^x}{9} - \frac{3^x}{3} + 2 \cdot 3^x = 4^x$$

Szorozzuk be az egyenletet 9-cel, majd rendezzük:

$$16 \cdot 3^x = 9 \cdot 4^x$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

A megoldás: $x = 2$.

8.1.20. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$2^{2x} - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{2^{2x}}{2}$$

Szorozzuk be az egyenletet $2\sqrt{3}$-mal:

$$2\sqrt{3} \cdot 2^{2x} - 2 \cdot 3^x = 6 \cdot 3^x - \sqrt{3} \cdot 2^{2x}$$

$$3\sqrt{3} \cdot 2^{2x} = 8 \cdot 3^x$$

Ebből:

$$\frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{2^3}{3^{\frac{3}{2}}}$$

Tehát a megoldás: $x = \frac{3}{2}$.

8.1.21. Legyen $2^{\mathrm{x}} = y$. Ekkor:

$$-y^2 + 7y + 8 \geq 0$$

Ezt megoldva: $y_1 = -1, y_2 = 8$. Visszahelyettesítve:

$$-1 \leq 2^x \leq 8$$

A bal oldali egyenlőtlenség mindig teljesül. A jobb oldal megoldása: $x \leq 3$.

8.1.22. A jobb oldalt írjuk a következő alakba:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{4-x}{x+5}} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{0}$$

Ebből:

$$\frac{4-x}{x+5} \geq 0$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. $4-x \geq 0, \text{és } x+5>0$. Ebből: $-5<x \leq 4$.

2. $4-x \leq 0, \text{és } x+5<0$. Ennek nincs megoldása.

8.1.23. A bal, és a jobb oldalt írjuk a következő alakba:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x-2}{x+3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

Ebből:

$$\frac{2x-2}{x+3} < -3$$

Ezt rendezzük nullára:

$$\frac{5x+7}{x+3} < 0$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. $5x+7>0, \text{és } x+3<0$. Ennek nincs megoldása.

2. $5x+7<0, \text{és } x+3>0$. Ebből: $-3<x<-\frac{7}{5}$.

8.1.24. Három esetet kell vizsgálni:

1. Ha $4<x$, akkor:

$$\frac{3^3}{3^{x-4}} \geq 3^{2x}$$

Ebből: $x \leq \frac{7}{3}$. Ez hamis gyök.

2. Ha $x = 0$, akkor:

$$\frac{3^3}{3^0} \geq 3^{2x}$$

Ebből: $x \leq \frac{3}{2}$. Ez hamis gyök.

3. Ha $x < 4$, akkor:

$$\frac{3^3}{3^{-x+4}} \geq 3^{2x}$$

Ebből: $x \leq -1$. Ez jó megoldás.

8.1.25. A tört miatt $x \neq 0$. Két esetet kell vizsgálni:

1. $3^x - 9 \geq 0, és\ 2^x - 1 < 0$. Ennek nincs megoldása.

2. $3^x - 9 \leq 0, és\ 2^x - 1 > 0$. Ebből: $0 < x < 2$.

8.1.26. A tört miatt $x \neq -3$. A jobb oldalt írjuk a következő alakba:

$$3^{2x^2+2x-12} \geq 3^{\frac{-2(x-2)}{x+3}}$$

Az exponenciális függvény miatt:

$$2x^2 + 2x - 12 \geq \frac{-2(x-2)}{x+3}$$

Az egyenlőtlenséget osszuk el 2-vel:

$$x^2 + x - 6 \geq \frac{-(x-2)}{x+3}$$

Függvényként ábrázolva a két oldalt kapjuk a megoldást: $x < -3, vagy\ 2 < x$.

8.1.27. Könnyen belátható, hogy a baloldal mindig nagyobb, mint a jobb oldal. Tehát minden valós számra igaz az egyenlőtlenség.

8.1.28. Vegyük mindkét oldal logaritmusát. Ekkor:

$$(x-2)\cdot\log(x^2-x+1)>0$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. $\begin{cases} x-2>0 \\ \log(x^2-x+1)>0 \end{cases}$

Ebből: $x>2$, illetve az $x^2-x+1>1$ összefüggésből $x<0, vagy\ 1<x$. Ezek metszete: $x>2$.

2. $\begin{cases} x-2<0 \\ \log(x^2-x+1)<0 \end{cases}$

Ebből: $x<2$, illetve az $x^2-x+1<1$ összefüggésből $0<\ x<1$. Ezek metszete:

$0<\ x<1$

8.1.29. A tört miatt $x\neq 4$. Alakítsuk át a jobb oldalt az alábbi módon:

$$(x-4)^{x^2-7x+4}\geq(x-4)^{-2}$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. Ha $x-4>1$, akkor $x^2-7x+4\geq -2$. Ebből a feltétel miatt: $6\leq x$.

2. Ha $0<x-4<1$, akkor $x^2-7x+4\leq -2$. Ebből a feltétel miatt: $4<x<5$.

8.2. Logaritmus egyenletek, egyenlőtlenségek

8.2.1. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$(1+\log_4 x)^2-(\log_4 x-1)=8$$

Legyen $\log_4 x=y$, ekkor:

$$(1+y)^2-(y-1)=8$$

$$y^2+y-6=0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1=2, y_2=-3$. Visszahelyettesítés után: $x_1=16, x_2=\frac{1}{64}$.

8.2.2. A logaritmus definíciója miatt: $x+1>0, és\ x+1\neq 1$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\log_{x+1}(x^2+x-6)=2$$

$$(x+1)^2=x^2+x-6$$

Ebből:

$$x^2+2x+1=x^2+x-6$$

$$x=-7$$

Ez nem felel meg a kezdeti feltételnek, tehát az egyenletnek nincs megoldása.

8.2.3. A logaritmus definíciója miatt: $x>0$. Alakítsuk át az egyenletet, majd osszuk el 2-vel:

$$2\log_8(2x)+\log_8(x-1)^2=\frac{4}{3}$$

$$\log_8(2x)+\log_8(x-1)=\frac{2}{3}$$

A logaritmus definíciója miatt:

$$\log_8 2x(x-1)=\frac{2}{3}$$

Ebből:

$$x^2-x-2=0$$

Megoldva az egyenletet: $x_1=2, x_2=-1$. A második gyök hamis.

8.2.4. A logaritmus definíciója miatt: $x>0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$8\left(\frac{1}{2}\cdot\log_4 x\right)^2-5(2+\log_4 x)+12=0$$

Legyen $\log_4 x=y$. Ekkor:

$$2y^2-5y+2=0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1=2, y_2=\frac{1}{2}$. Visszahelyettesítés után: $x_1=16, x_2=2$.

8.2.5. A logaritmus definíciója miatt: $x > 3$. Alakítsuk át az egyenletet, az alábbiak felhasználásával:

$$a^{\log_{\frac{1}{a}} b} = \frac{1}{b}, \qquad \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_{a^2} b} = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+12}}$$

Négyzetre emelés után:

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 5x + 12$$

Ebből: $x = -\frac{3}{11}$. Ez nem felel meg a kezdeti feltételnek, vagyis nincs megoldása.

8.2.6. A logaritmus definíciója miatt $1 < x$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$4(\log_{x+1}(x-1)(x+1))^2 = 18\log_{x+1}(x-1)$$

Legyen $\log_{x+1}(x-1) = y$. Ekkor:

$$4(y+1)^2 = 18y$$

Ebből:

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 2, y_2 = \frac{1}{2}$. Visszahelyettesítés után:

1. $\log_{x+1}(x-1) = 2$ esetén: $x^2 + x + 2 = 0$. Ennek nincs megoldása.

2. $\log_{x+1}(x-1) = \frac{1}{2}$ esetén: $x^2 - 3x = 0$. Ebből: $x_1 = 0, x_2 = 3$. Az első gyök hamis.

8.2.7. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, x \neq \frac{1}{8}, x \neq \frac{1}{2}$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{\log_2 64}{\log_2 8x} + 3 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 2x} = 11$$

$$\frac{6}{3 + \log_2 x} + \frac{9}{1 + \log_2 x} = 11$$

Legyen $\log_2 x = y$. Ekkor:

$$\frac{6}{3+y} + \frac{9}{1+y} = 11$$

Ezt rendezve, a következőt kapjuk:

$$11y^2 + 29y = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 0, y_2 = -\frac{29}{11}$. Visszahelyettesítés után: $x_1 = 1, x_2 = 2^{-\frac{29}{11}}$.

8.2.8. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, x \neq \frac{1}{3}, x \neq 1$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{\log_x 81}{\log_x 3x} + \frac{\log_x 9}{\log_x x^3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{4 \cdot \log_x 3}{\log_x 3 + 1} + \frac{2 \cdot \log_x 3}{3} = \frac{8}{3}$$

Legyen $\log_x 3 = y$. Ekkor:

$$\frac{4y}{y+1} + \frac{2y}{3} = \frac{8}{3}$$

Ezt rendezve, a következőt kapjuk:

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 1, y_2 = -4$. Visszahelyettesítés után: $x_1 = 3, x_2 = 3^{-\frac{1}{4}}$.

8.2.9. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\frac{\log_2(\log_2 x)}{\log_2 4} + \log_2\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) = 2$$

$$\frac{\log_2(\log_2 x)}{2} + \log_2(\log_2 x) - \log_2 2 = 2$$

Legyen $\log_2(\log_2 x) = a$. Ekkor:

$$\frac{a}{2} + a = 3$$

Ebből: $a = 2$. Visszahelyettesítve: $\log_2(\log_2 x) = 2$. Ezt megoldva: $x = 16$.

8.2.10. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, x \neq 1$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$x - \frac{1}{x} = \frac{8}{x}$$

$$x^2 = 9$$

Ebből: $x_1 = 3, x_2 = -3$. A második gyök hamis.

8.2.11. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Vegyük a két oldal 3-as alapú logaritmusát:

$$(\log_3 x)^2 = \log_3 27 + \log_3 \sqrt{x}$$

Legyen $\log_3 x = y$. Ekkor:

$$y^2 - \frac{1}{2}y - 3 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 2, y_2 = -\frac{3}{2}$. Visszahelyettesítés után: $x_1 = 9, x_2 = 3^{-\frac{3}{2}}$.

8.2.12. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Vegyük a két oldal 2-es alapú logaritmusát:

$$(\log_2 x)^2 = \log_2 x^3 - \log_2 4$$

Legyen $\log_2 x = y$. Ekkor:

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 2, y_2 = 1$. Visszahelyettesítés után: $x_1 = 4, x_2 = 2$.

8.2.13. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sqrt[3]{\frac{x^{\log_2(2x^2)}}{x^3}} = \frac{x^2}{4}$$

$$\sqrt[3]{x^{\log_2 2 + 2\log_2 x}} = \frac{x^3}{4}$$

$$x^{1+2\log_2 x} = \frac{x^9}{64}$$

$$x \cdot x^{2\log_2 x} = \frac{x^9}{64}$$

Osszuk el x-szel, majd alakítsuk tovább:

$$2\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 \frac{x^8}{64}$$

Legyen $\log_2 x = y$. Ekkor:

$$2y^2 - 8y + 6 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 3, y_2 = 1$. Visszahelyettesítés után: $x_1 = 8, x_2 = 2$.

8.2.14.A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Alakítsuk át az egyenletet:

$$6x^{\log_3 x} = \left(x^{\log_3 x}\right)^2 - 6075$$

Legyen $x^{\log_3 x} = y$. Ekkor:

$$y^2 - 6y - 6075 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = 81, y_2 = -75$. A második gyök hamis. Visszahelyettesítés után:

$$x^{\log_3 x} = 81$$

$$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$$

$$(\log_3 x)^2 = 4$$

Ezt megoldva: $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}$.

8.2.15. A logaritmus definícióját felhasználva az egyenletet alakítsuk át:

$$4^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \log_3[1 + \log_2(1 + 3 \cdot \log_2 x)]$$

$$3^1 = 1 + \log_2(1 + 3 \cdot \log_2 x)$$

$$2^2 = 1 + 3 \cdot \log_2 x$$

$$\log_2 x = 1$$

A megoldás: $x = 2$.

8.2.16. A logaritmus azonosságát felhasználva az egyenletet alakítsuk át:

$$\log_a[y \cdot (y+5) \cdot 0{,}02] = 0$$

$$y \cdot (y+5) \cdot 0{,}02 = 1$$

$$y^2 + 5y - 50 = 0$$

Ebből: $y_1 = 5, y_1 = -10$. A második gyök hamis.

8.2.17. Írjuk vissza mindegyik logaritmust 2-es alapra:

$$\frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 7$$

Ebből:

$$\log_2 x = 4$$

A megoldás: $x = 16$.

8.2.18. Írjuk vissza mindegyik logaritmust a alapra, majd a **8.2.17.** feladat szerint oldjuk meg. A megoldás: $x = a$.

8.2.19. Használjuk fel az alábbi összefüggést:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Ekkor:

$$\frac{3}{\log_x x + 2 \cdot \log_x a} + \frac{1}{2 \cdot \left(\log_x x - \frac{1}{2} \cdot \log_x a\right)} = 2$$

Vagyis:

$$\frac{3}{1 + 2 \cdot \log_x a} + \frac{1}{2 - \log_x a} = 2$$

Ezt az egyenletet megoldva $(\log_x a)$-ra kapjuk a megoldást: $x_1 = a, x_2 = a^{\frac{4}{3}}$.

8.2.20. Írjuk át az egyenletet 4-es alapra:

$$\log_4(x+12) = 2 \cdot \log_4 x$$

Ebből:

$$x^2 - x - 12 = 0$$

Az egyik gyök negatív, tehát hamis. A megoldás: $x = 4$.

8.2.21. Az egyenletet alakítsuk át, és használjuk fel az alábbi összefüggést:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$(\log_x 5 + 2) \cdot (\log_5 x)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right) \cdot (\log_5 x)^2 = 1$$

Ezt az egyenletet megoldva $(\log_5 x)$-re kapjuk a megoldást: $x_1 = \sqrt{5}, x_2 = \frac{1}{5}$.

8.2.22. Az egyenletet alakítsuk át az alábbi módon:

$$\log \frac{2x}{1-3x} = -1$$

Ebből:

$$\frac{2x}{1-3x} = \frac{1}{10}$$

A megoldást: $x = \frac{1}{23}$

8.2.23. Az egyenletet alakítsuk át az alábbi módon, és írjuk át 2-es alapra:

$$6 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 x} + \log_2 x = 5$$

Legyen $\log_2 x = y$. Ekkor:

$$\frac{6}{y} + y = 5$$

Ezt az egyenletet *y*-nal beszorozva, majd megoldva az egyenletet:

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y_1 = 3, y_2 = 2$$

Ebből a megoldás: $x_1 = 8, x_2 = 4$.

8.2.24. Az egyenletet alakítsuk át az alábbi módon:

$$3 \cdot \sqrt{\log x} - \log x = 2$$

Legyen $\sqrt{\log x} = y$. Ekkor:

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

Ezt megoldva, majd visszahelyettesítve:

$$x_1 = 10^4, x_2 = 10$$

8.2.25. Az egyenletet alakítsuk át az alábbi módon:

$$\frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4}$$

Ebből:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Ebből a megoldás: $x = 1 + \sqrt{2}$.

8.2.26. Az egyenletet alakítsuk át az alábbi módon:

$$2 \cdot \log \frac{1}{5} + \log\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \log\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right)$$

$$\frac{1}{25} \cdot \left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \frac{5}{5^{\sqrt{x}}} + 5$$

Legyen $5^{\sqrt{x}} = y$. Ekkor:

$$\frac{y+1}{25} = \frac{5}{y} + 5$$

Ezt szorozzuk be $25y$-nal, majd rendezzük:

$$y^2 - 124y - 125 = 0$$

Ebből: $y_1 = 125, y_2 = -1$. A második gyök hamis. Az első gyököt visszahelyettesítve, a megoldás: $x = 9$.

8.2.27. Az egyenletet alakítsuk át az alábbi módon:

$$\log\left(x + \sqrt{3}\right) + \log\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\log(x^2 - 3) = 0$$

$$x^2 - 3 = 1$$

Ebből: $x_1 = 2, x_2 = -2$, de a második gyök hamis, mert ott nincs értelmezve az egyenlet.

8.2.28. A logaritmus definíciója miatt: $x > \frac{1}{2}$. Az egyenlőtlenséget alakítsuk át az alábbi módon:

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x - 1) \geq \log_{\frac{1}{5}} 5$$

Ebből: $2x - 1 \leq 5, vagyis\ x \leq 3$. A megoldás: $\frac{1}{2} < x \leq 3$.

8.2.29. A logaritmus definíciója miatt: $x > -3$. Az egyenlőtlenséget alakítsuk át az alábbi módon:

$$\log_{\frac{1}{2}}(6x + 18) \geq \log_{\frac{1}{2}} 16$$

Ebből: $6x + 18 \leq 16, vagyis\ x \leq -\frac{1}{3}$. A megoldás: $-3 < x \leq -\frac{1}{3}$.

8.2.30. A logaritmus definíciója miatt: $x > -2$. A négyzetgyök miatt: $x < 0, vagy\ x > 3$. A gyökös kifejezés csak pozitív lehet, tehát oszthatunk vele:

$$\log_{0,1}(x + 2) < \log_{0,1} 1$$

Ebből: $-1 < x$. Ezt összevetve a feltételekkel, a megoldás: $-1 < x < 0, vagy\ 3 < x$.

8.2.31. A logaritmus definíciója miatt: $x > 1$. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget az alábbi módon:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x}{2}$$

Ebből:

$$x^2 - 1 \leq \frac{3x}{2}$$

Megoldva az egyenlőtlenséget: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. Ezt összevetve a feltételekkel, a megoldás:

$1 < x \leq 2$.

8.2.32. A logaritmus definíciója miatt: $x > 1$. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget az alábbi módon:

$$\log_{\frac{1}{2}} 3x(x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} 2(x+1)$$

Ebből:

$$3x^2 - 3x \leq 2x + 2$$

Megoldva az egyenlőtlenséget: $-1 \leq x \leq 6$. Ezt összevetve a feltételekkel, a megoldás:

$1 < x \leq 6$.

8.2.33. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, x \neq 1$. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget az alábbi módon:

$$\log_3 x^{-2} + 3\frac{\log_3 3^{-2}}{\log_3 x} \geq -8$$

Legyen $\log_3 x = y$. Ekkor:

$$-2y - \frac{6}{y} \geq -8$$

Megoldva az egyenlőtlenséget: $1 \leq y \leq 3$. Ezt visszahelyettesítve kapjuk a megoldást:

$3 \leq x \leq 27$.

8.2.34. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, és\ x \neq 1$. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget az alábbi módon:

$$2 \cdot \frac{\log_4 \frac{1}{4}}{\log_4 x} + \log_4 x^{-1} \leq -3$$

Legyen $\log_4 x = y$. Ekkor:

$$\frac{-2}{y} - y \leq -3$$

Ebből:

$$y^2 - 3y + 2 \geq 0$$

Megoldva az egyenlőtlenséget: $y_1 \leq 1, vagy\ y_2 \geq 2$. Visszahelyettesítve és összevetve a feltételekkel, a megoldás: $0 < x \leq 4, ahol\ x \neq 1, vagy\ 16 < x$.

8.2.35. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, és\ x \neq 1$. Legyen $\log_2 x = a$. Ekkor:

$$a \leq \sqrt{4a^2 - 4a + 1} \leq 2a$$

$$a \leq |2a - 1| \leq 2a$$

A két egyenlőtlenséget vizsgáljuk külön. A baloldali egyenlőtlenség két esete:

1. Ha $\frac{1}{2} \leq a$, akkor: $a \leq 2a - 1$. Ebből a visszahelyettesítés után: $1 \leq x$.

2. Ha $a < \frac{1}{2}$, akkor: $a \leq -2a + 1$. Ebből a visszahelyettesítés után: $1 \leq \sqrt[3]{2}$.

A jobb oldali egyenlőtlenség két esete:

1. Ha $\frac{1}{2} \leq a$, akkor: $2a - 1 \leq 2a$. Ez azonosság.

2. Ha $a < \frac{1}{2}$, akkor: $-2a + 1 \leq 2a$. Ebből a visszahelyettesítés után: $-2 \leq x$.

Ezen eredmények metszete: $1 < x \leq \sqrt[3]{2}$.

8.2.36. A logaritmus definíciója miatt: $\frac{3-2x}{1-x} > 0$. Ebből: $x < 1, vagy\ \frac{3}{2} < x$. A tört miatt:

$x \neq 1$. Négyzetre emelés után:

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-2x}{1-x} > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

Ebből:

$$\frac{3-2x}{1-x} < \frac{1}{2}$$

Átrendezés után:

$$\frac{5-3x}{2-2x} < 0$$

Ezt megoldva: $1 < x < \frac{5}{3}$. Ezt összevetve a kezdeti feltételekkel az alábbi megoldást kapjuk:

$$\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$$

8.2.37. A logaritmus definíciója miatt: $x \neq 0, x > -1, x < \frac{1}{2}\ vagy\ x > 1$. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\log_{x+1}(2x^2 - 3x + 1) \leq \log_{x+1}(x+1)^2$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. Ha $1 < x + 1, vagyis\ 0 < x$, akkor:

$$2x^2 - 3x + 1 \leq x^2 + 2x + 1$$

Ebből: $0 \leq x \leq 5$. Ezt összevetve a feltételekkel, a megoldás: $0 < x < \frac{1}{2}\ vagy\ 1 < x \leq 5$.

2. Ha $0 < x + 1 < 1, vagyis\ -1 < x < 0$, akkor:

$$2x^2 - 3x + 1 \geq x^2 + 2x + 1$$

Ebből: $x < 0\ vagy\ 5 < x$. Ezt összevetve a feltételekkel, a megoldás: $-1 < x < 0$.

8.2.38. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, x \neq 1, \frac{1}{2} < x < 2$. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\log_x(5x - 2x^2 - 2) < \log_x x$$

Két esetet kell vizsgálni:

1. Ha $1 < x$, akkor:

$$-2x^2 + 5x - 2 < x$$

Ebből: $0 < (x-1)^2$, ez pedig azonosság.

2. Ha $0 < x < 1$, akkor:

$$-2x^2 + 5x - 2 > x$$

Ebből: $0 > (x-1)^2$, ez pedig nem lehetséges.

Ezeket összevetve a feltételekkel, a megoldás: $1 < x < 2$.

8.3. Egyenletrendszerek

8.3.1. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, y > 0$. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} 2 = xy^3 \\ \frac{1}{8} = x^2 y \end{cases}$$

Az első egyenletből: $x = \frac{2}{y^3}$. Ezt helyettesítsük be a második egyenletbe:

$$\frac{1}{8} = \frac{4}{y^5}$$

Ebből: $y = 2$. Visszahelyettesítés után: $x = \frac{1}{4}$.

8.3.2. A tört miatt $x \neq 0, és\ y \neq 0$. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5+\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{y}{x}} = 3^{1+\frac{2-2y}{x}} \end{cases}$$

Az exponenciális függvény miatt:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{y} = 5 + \dfrac{3y}{x} \\ \dfrac{y}{x} = 1 + \dfrac{2-2y}{x} \end{cases}$$

A második egyenletből: $x = 3y - 2$. Ezt az első egyenletbe írva:

$$\frac{6y-4}{y} = 5 + \frac{3y}{3y-2}$$

Ezt megoldva: $y = \frac{4}{7}$. Visszahelyettesítés után: $x = -\frac{2}{7}$.

8.3.3. A logaritmus definíciója miatt: $x > 2, y < 2$. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} 3^{-2+\frac{2x}{y}} = 3^{3+\frac{3y}{x}} \\ \log(x-2) = \log(2-y) \end{cases}$$

A logaritmus és az exponenciális függvények miatt:

$$\begin{cases} -2 + \dfrac{2x}{y} = 3 + \dfrac{3y}{x} \\ x - 2 = 2 - y \end{cases}$$

A második egyenlezből: $x = 4 - y$. Ezt az elsőbe helyettesítve:

$$-2 + \frac{8-2y}{y} = 3 + \frac{3y}{4-y}$$

Ebből:

$$5y^2 - 18y + 16 = 0$$

Ezt megoldva: $y_1 = 2, y_2 = \frac{8}{5}$. Az első gyök hamis. A másodikat visszahelyettesítve: $x = \frac{12}{5}$.

8.3.4. A logaritmus definíciója miatt: $y > \frac{x}{2}$. A második egyenletből: $x = 2y - 1$. Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$2^{\frac{2y-1-y}{2}} - 2^{\frac{2y-1-y}{4}} = 2$$

Legyen $2^{\frac{y-1}{4}} = a$. Ekkor:

$$a^2 - a - 2 = 0$$

Ebből: $a_1 = 2, a_2 = -1$. A második gyök hamis. Az elsőt visszahelyettesítve: $x = 9, y = 5$.

8.3.5. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{2x + y}{x - 1{,}5y} = 2 \\ \log_3(x^2 - y^2) = \log_3 45 \end{cases}$$

A logaritmus függvény miatt:

$$\begin{cases} \dfrac{2x + y}{x - 1{,}5y} = 4 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{cases}$$

Az első egyenletből: $x = \frac{7y}{2}$. Ezt a másodikba helyettesítve:

$$\left(\frac{7y}{2}\right)^2 - y^2 = 45$$

Ezt megoldva és visszahelyettesítve: $y_1 = 2, y_2 = -2, x_1 = 7, x_2 = -7$. A második gyökök hamisak.

8.3.6. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, y > 0$. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} x^2 - x + \sqrt{x^2 - y + 3} = 9 \\ \dfrac{\log_x y}{\log_x x^2} + \dfrac{\log_x x}{\log_x y^2} = 1 \end{cases}$$

Legyen $\log_x y = a$. Ekkor a második egyenlet:

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{2a} = 1$$

Ezt megoldva: $a = 1$. Visszahelyettesítve: $x = y$. Ezt az első egyenletbe írva:

$$x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 3} = 9$$

Legyen $x^2 - x = b$. Ekkor:

$$b + \sqrt{b + 3} = 9$$

Ezt megoldva: $b_1 = 13, b_2 = 6$. Visszahelyettesítve, két egyenletet kapunk:

1. $x^2 - x - 13 = 0$. Ebből: hamis gyököket kapunk.

2. $x^2 - x - 6 = 0$. Ebből: $x_1 = 3, x_2 = -2$. A második gyök hamis.

8.3.7. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, y > 0$. A második egyenletből: $x = \frac{8}{y}$.

Ezt helyettesítsük be az elsőbe, és alakítsuk át:

$$\left(\frac{8}{y}\right)^{log_2 y} + y^{log_2 \sqrt{\frac{8}{y}}} = 6$$

$$\frac{8^{log_2 y}}{y^{log_2 y}} + y^{\frac{1}{2}\log_2 \frac{8}{y}} = 6$$

$$\frac{y^3}{y^{log_2 y}} + y^{\frac{1}{2}(\log_2 8 - \log_2 y)} = 6$$

$$y^{3-\log_2 y} + y^{\frac{1}{2}(3-\log_2 y)} = 6$$

Legyen $y^{\frac{1}{2}(3-\log_2 y)} = a$. Ekkor:

$$a^2 + a - 6 = 0$$

Ezt megoldva: $a_1 = 2, a_2 = -3$. A második gyök hamis. Az elsőt visszahelyettesítve:

$$y^{\frac{1}{2}(3-\log_2 y)} = 2$$

Vegyük mindkét oldal logaritmusát:

$$\log_2 y^{\frac{1}{2}(3-\log_2 y)} = 1$$

$$\frac{1}{2}(3 - \log_2 y) \cdot \log_2 y = 1$$

Legyen $\log_2 y = b$. Ekkor behelyettesítve, és rendezve a következőt kapjuk:

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

Ezt megoldva: $b_1 = 2, b_2 = 1$. Visszahelyettesítve kapjuk a megoldást:

$$y_1 = 4, y_2 = 2, x_1 = 2, x_2 = 4$$

8.3.8. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, y > 0$. Az első egyenletből: $x = 2y$.

Ezt helyettesítsük be a másodikba, és alakítsuk át:

$$(2y)^{\log_{2y} 2y} + y^{\log_y y} = 39$$

$$2y + y = 39$$

Ebből: $y = 13$. Ezt visszahelyettesítve: $x = 26$.

8.3.9. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0, y > 0$. Az első egyenletet alakítsuk az alábbiak szerint:

$$\log_x x + \log_x y - 2\log_y x - 2\log_y y = 0$$

$$1 + \log_x y = 2\log_y x + 2$$

$$1 + \log_x y = 2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x y} + 2$$

Legyen $\log_x y = a$. Ezt behelyettesítve, és rendezve az egyenletet:

$$a^2 - a - 2 = 0$$

Ezt megoldva: $a_1 = 2, a_2 = -1$. Alakítsuk át a második egyenletet:

$$\log_3 x^{\log_3 y} = \log_3 3^{-4}$$

$$\log_3 y \cdot \log_3 x = -4$$

Az $a_1 = 2$ gyököt visszahelyettesítve: $\log_x y = 2$, ebből $x^2 = y$. Ezt írjuk be a második egyenletbe:

$$\log_3 x^2 \cdot \log_3 x = -4$$

$$2 \cdot (\log_3 x)^2 = -4$$

Ez nem lehetséges. Az $a_2 = -1$ gyököt visszahelyettesítve: $\log_x y = -1$, ebből $\frac{1}{x} = y$. Ezt írjuk be a második egyenletbe:

$$\log_3 x^{-1} \cdot \log_3 x = -4$$

$$(\log_3 x)^2 = 4$$

Ebből: $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}, y_1 = \frac{1}{9}, y_2 = 9$.

8.3.10. Legyenek *a*,*b*,*x*,*y* pozitív számok! Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} xy = a^2 \\ \dfrac{x}{y} = b^4 \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek két gyökpárja van:

1. $x_1 = ab^2, és\ y_1 = \frac{a}{b^2}$

2. $x_2 = -ab^2, és\ y_2 = -\frac{a}{b^2}$

A második megoldás hamis, mert negatív értéket ad.

8.3.11. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{10} = 13 \\ \dfrac{x+y}{x-y} = 8 \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek két gyökpárja van: $x_1 = 9, y_1 = 7, x_2 = -9, y_2 = -7$

A második gyökpár hamis, mert a második egyenlet itt nincs értelmezve.

8.3.12. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} x - y = xy \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Az egyenletrendszernek két gyökpárja van:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, y_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, y_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

A második gyökpár hamis, mert a két egyenlet itt nincs értelmezve.

8.3.13. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} 1 + \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^2}{y} \\ xy = b^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + x = a^2 \\ xy = b^4 \end{cases}$$

Az egyenletrendszernek két gyökpárja van:

$$x_1 = \frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^2}}{2}, y_1 = \frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^2}}{2}, x_2 = \frac{a^2-\sqrt{a^4-4b^2}}{2}, y_2 = \frac{a^2+\sqrt{a^4-4b^2}}{2}$$

Az eredeti egyenletek feltételeinek csak az első gyökpár felel meg.

8.3.14. Legyen $a > 0, és\ a \neq 1$. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} 4xy = 9a^2 \\ x + y = 5a \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek két gyökpárja van:

1. $x_1 = \frac{a}{2}, és\ y_1 = \frac{9}{2}a$

2. $x_2 = \frac{9}{2}a, és\ y_2 = \frac{a}{2}$

A feltételeknek mind a kettő megfelel.

8.3.15. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} xy = a \\ \left(\frac{x}{y}\right)^2 = b \end{cases}$$

Az eredeti egyenletrendszer feltételei miatt az *a,b,x,y* pozitív számok, ezért a második egyenletből: $\frac{x}{y} = \sqrt{b}$. Ezért az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} xy = a \\ \frac{x}{y} = \sqrt{b} \end{cases}$$

A megoldás:

$$x = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b}, \qquad y = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}$$

8.3.16. Alakítsuk át az egyenleteket az alábbi módon:

$$\begin{cases} \log_a x + \frac{1}{2} \cdot \log_a y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot \log_b x + \log_b y = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad (1)$$

Ebből:

$$\begin{cases} x \cdot \sqrt{y} = a^{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{x} \cdot y = b^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

A két egyenletet összeszorozva a következőt kapjuk:

$$x^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{3}{2}}$$

Vagyis:

$$xy = ab$$

Ezt az egyenletet elosztjuk az (1) egyenletrendszer első, majd a második egyenletével.

A megoldás:

$$x = \frac{a^2}{b}, \qquad y = \frac{b^2}{a}$$

8.3.17. A megoldás menete ugyanaz, mint a **8.3.16.** feladatban. A megoldás:

$$x = a \cdot \sqrt[3]{b^2}, \qquad y = \frac{a}{b \cdot \sqrt[3]{b}}$$

8.3.18. Az alábbi összefüggést használjuk fel:

$$\log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

Ekkor az egyenletek:

$$\begin{cases} \log_a x + \log_a y = 2 \\ -\log_a x + \log_a y = 1 \end{cases}$$

Az egyenletrendszert összeadjuk: $2 \cdot \log_a y = 3$

Ebből:

$$\log_a y = \frac{3}{2}, illetve\ \log_a x = \frac{1}{2}$$

A megoldás: $x = \sqrt{a},\ y = a\sqrt{a}$.

8.3.19. Írjuk át az egyenleteket az alábbi alakba:

$$\begin{cases} 2^{6x+3} = 2^{4y+4} \\ 5^{1+x-y} = 5^{\frac{4y+2}{2}} \end{cases}$$

Ebből:

$$\begin{cases} 6x - 4y = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

A megoldás: $x = \frac{3}{14}, y = \frac{1}{14}$.

8.3.20. Az első egyenletet átírva kapjuk:

$$x + y = 2^{x-y} \cdot 3^{\frac{x-y}{2}}$$

Az második egyenletet átírva kapjuk:

$$x + y = 2^{x-y} \cdot 3$$

Ezeket összevetve adódik:

$$\frac{x-y}{2} = 1$$

Ezért a második egyenletből:

$$x + y = 3 \cdot 2^2 = 12$$

A megoldás: $x = 7, y = 5$.

8.3.21. Az egyenletrendszer a következő alakba írható:

$$\begin{cases} 2^{\frac{2x}{y}} = 2^{5+\frac{3y}{x}} \\ 3^{\frac{x}{y}} = 3^{1+\frac{2-2y}{y}} \end{cases}$$

Vagyis:

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} = 5 + \frac{3y}{x} \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{2-2y}{y} \end{cases}$$

Legyen $a = \frac{x}{y}$, ekkor az első egyenletből kapjuk:

$$2a^2 - 5a - 3 = 0$$

Ebből: $a_1 = 3, és\ a_2 = -\frac{1}{2}$. Tehát: $x = 3y, vagy\ x = -\frac{1}{2}y$.

Ezeket behelyettesítve a második egyenletbe.

A megoldás: $x_1 = -2, y_1 = 4, x_2 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{1}{2}$.

8.3.22. Alakítsuk át az egyenleteket:

$$\begin{cases} 20 \cdot 2^{x-y} - 12 \cdot 2^{x+y} = 37 \\ 12 \cdot 2^{x-y} - 20 \cdot 2^{x+y} = 19 \end{cases}$$

Az első egyenletet szorozzuk meg 3-mal, a másodikat 5-tel, majd vonjuk ki őket:

$$64 \cdot 2^{x+y} = 16, ebből\ x + y = -2$$

Ezt felhasználva:

$$20 \cdot 2^{x-y} - 3 = 37, ebből\ x - y = 1$$

A megoldás: $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$.

8.4. Vegyes feladatok

8.4.1. Alakítsuk át a jobb oldalt az alábbi módon:

$$\log_4(12 \cdot 2^x + 1) = \log_9 3^{-x} = -\frac{1}{2}x$$

Ebből:

$$4^{-\frac{1}{2}x} = 12 \cdot 2^x + 1$$

$$2^{-x} = 12 \cdot 2^x + 1$$

Legyen $2^x = y$. Ekkor:

$$\frac{1}{y} = 12y + 1$$

Megoldva az egyenletet: $y_1 = \frac{1}{4}, y_2 = -\frac{1}{3}$. A második gyök hamis. Az elsőt visszahelyettesítve: $x = -2$.

8.4.2. A tört miatt $x \neq 0$. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\log_5 \frac{5^{\frac{1}{x}} + 125}{6} = 1 + \frac{1}{2x}$$

$$5^{1+\frac{1}{2x}} = \frac{5^{\frac{1}{x}} + 125}{6}$$

Legyen $5^{\frac{1}{2x}} = y$. Ekkor rendezés után: $y^2 - 30y + 125 = 0$

Ezt megoldva: $y_1 = 25, y_2 = 5$. Visszahelyettesítve kapjuk: $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$.

8.4.3. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Használjuk fel a következő összefüggést:

$\log_a b = -\log_a \frac{1}{b}$. Legyen $\log_2 \frac{4x^2-4x+1}{x} = y$.

Ez alapján az egyenlet: $|y| = -y$. Ez csak akkor teljesülhet, ha $y = 0$. Vagyis:

$$\log_2 \frac{4x^2 - 4x + 1}{x} = 0$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{x} = 1$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Ezt megoldva: $x_1 = 4, x_2 = 1$. Az első gyök hamis.

8.4.4. A logaritmus definíciója miatt: $5x^2 - 2x - 3 > 0$. Ebből: $x < -\frac{3}{5}, vagy\ 1 < x$. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\frac{x^2}{2} \cdot \log_6(5x^2 - 2x - 3) + x \cdot \log_6(5x^2 - 2x - 3) = x^2 + 2x$$

$$\log_6(5x^2 - 2x - 3) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + x\right) = x^2 + 2x$$

$$\log_6(5x^2 - 2x - 3) = 2$$

$$5x^2 - 2x - 3 = 36$$

Ezt megoldva kapjuk a megoldást: $x_1 = 3, x_2 = -\frac{13}{5}$.

8.4.5. A logaritmus definíciója miatt: $x > 1$. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$x^{\frac{\log_x(x-1)}{\log_x 3}} + 2 \cdot (x-1)^{\frac{\log_x x}{\log_x 3}} = 3x^2$$

$$x^{\frac{\log_x(x-1)}{\log_x 3}} + 2 \cdot (x-1)^{\frac{1}{\log_x 3}} = 3x^2$$

Írjuk át gyökös alakba:

$$\sqrt[\log_x 3]{x^{\log_x(x-1)}} + 2 \cdot \sqrt[\log_x 3]{x-1} = 3x^2$$

$$\sqrt[\log_x 3]{x-1} + 2 \cdot \sqrt[\log_x 3]{x-1} = 3x^2$$

Vonjuk össze, majd osszuk el 3-mal:

$$\sqrt[\log_x 3]{x-1} = x^2$$

Hatványozás után:

$$x - 1 = (x^2)^{\log_x 3}$$

$$x - 1 = \left(x^{\log_x 3}\right)^2$$

$$x - 1 = 3^2$$

Ebből a megoldás: $x = 10$.

8.4.6. A jobb oldal értékére igaz a következő egyenlőtlenség:

$$0 \leq 1 - \cos(\pi x) \leq 2$$

A bal oldalt átírva:

$$\frac{3^x}{3} + \frac{3}{3^x} = 1 - \cos(\pi x)$$

Egy szám és a reciprokának az összegére igaz az alábbi:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Legyen $3^x = y$. Ezek alapján:

$$\frac{y}{3} + \frac{3}{y} = 2$$

Ezt megoldva: $y = 3, vagyis\ x = 1.$

8.4.7. A logaritmus definíciója miatt: $x > 0$. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\log_2[2(x^2 + 9)] - \log_2(6x) = 6x - x^2 - 8$$

$$1 + \log_2(x^2 + 9) - \log_2(6x) = 6x - x^2 - 8$$

$$\log_2 \frac{x^2 + 9}{6x} = 6x - x^2 - 9$$

$$\log_2 \frac{x^2 + 9}{6x} = -(x - 3)^2$$

A jobb oldalra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$-(x - 3)^2 \leq 0 = \log_2 2^0 = 1$$

Ebből:

$$\frac{x^2 + 9}{6x} \leq 1$$

Megoldva az egyenlőtlenséget, az eredmény: $x = 3$.

8.4.8. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$2^{-x^2 + px - \frac{p}{2} + \frac{3}{2}} = 2^{\frac{3(p-1)}{2}}$$

Ebből:

$$-x^2 + px - \frac{p}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3p - 3}{2}$$

Rendezés után:

$$-x^2 + px - 2p + 3 = 0$$

Az egyenletnek akkor van két megoldása, ha a diszkrimináns pozitív. Vagyis:

$$p^2 - 8p + 12 > 0$$

Ezt megoldva: $2 < p < 6$.

8.4.9. A négyzetgyök miatt:

$$2 \cdot 2^y \cdot 3^x - 9^x - 2^{2y} \geq 0$$

Ebből:

$$2 \geq \frac{9^x + 4^y}{2^y \cdot 3^x}$$

Ezt bontsuk két törtre:

$$2 \geq \frac{3^x}{2^y} + \frac{2^y}{3^x}$$

Legyen $\frac{3^x}{2^y} = a$. Egy tetszőleges a szám és a reciprokának összegére igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Ezeket összevetve:

$$a + \frac{1}{a} = 2$$

Ebből:

$$a = 1, \qquad \frac{3^x}{2^y} = 1, \qquad 3^x = 2^x, \qquad x = y = 0$$

Ezt visszahelyettesítve az egyenletbe, ellentmondásra jutunk, tehát nincs megoldás.

8.4.10. Legyen $3^x = y$. Ekkor:

$$4y^2 - 4my + m^2 - 16 = 0$$

Az egyenletnek akkor van egy megoldása, ha a diszkrimináns nulla. Vagyis:

$$(-4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - 16) = 0$$

$$16m^2 - 16m^2 + 16^2 = 0$$

Ez viszont nem teljesülhet, tehát nincs megoldás.

8.4.11. Legyen $2^{\sin x} = y$. Ekkor:

$$y^2 - (p+3) \cdot y - p - 4 = 0$$

Az egyenletnek akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nulla, vagy pozitív. Vagyis:

$$(p+3)^2 - 4(p-4) \geq 0$$

$$p^2 + 2p + 25 \geq 0$$

Ez viszont minden *p* esetén teljesül.

8.4.12. A második egyenletből: $y - x = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$, vagyis $y = x + 4$.

Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$3^x \cdot 2^{x+4} = 576$$

Vagyis:

$$6^x \cdot 2^4 = 576$$

A megoldás: $x = 2, y = 6$.

8.4.13. Alakítsuk át a második egyenletet az alábbi módon:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

A második egyenletet emeljük négyzetre, majd vonjuk ki az elsőből:

$$\begin{cases} x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \\ xy = \frac{a^2}{3} \end{cases}$$

Ennek egy megoldása van: $x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

8.4.14. Használjuk fel az alábbi összefüggést:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

Így az első egyenlet:

$$x = y^2$$

A megoldás: $x_1 = 4, y_1 = 2, x_2 = 1, y_2 = 1.$

8.4.15. Az egyenleteket átalakítva az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{10} = \dfrac{7}{x} \\ x^2 - y^2 = 40 \end{cases}$$

A második egyenletet az elsővel elosztva:

$$x - y = \frac{4x}{7}$$

Tehát az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{70}{x} \\ x - y = \dfrac{4x}{7} \end{cases}$$

Ennek a gyökei: $x_1 = 7, y_1 = 3, x_2 = -7, y_2 = -3$. Viszont a második gyökpár hamis, mert az eredeti feladat második egyenlete ilyen értékekre nincs értelmezve.

8.4.16. Az egyenleteket átalakítva az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y}{x} = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Legyen $\frac{x}{y} = a$. Ezzel a helyettesítéssel megoldva az egyenletrendszert: $\frac{x}{y} = 3, vagy\ \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$.

Ezeket az értékeket a második egyenletbe helyettesítve kapjuk:

$$x_1 = \frac{3}{2}, y_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -2, y_2 = 4$$

Viszont a második gyökpár hamis, mert az eredeti feladat második egyenlete ilyen értékekre nincs értelmezve.

8.4.17. Az egyenleteket átalakítva az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 4 - \sqrt{x} \\ 2 \cdot \sqrt{xy} = 3 + \sqrt{y} \end{cases}$$

Legyen $\sqrt{x} = a, \sqrt{y} = b$. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{cases} ab = 4 - a \\ 2ab = 3 + b \end{cases}$$

Ezt megoldva, majd visszahelyettesítve a következőket kapjuk:

$$x_1 = 4, y_1 = 1, x_2 = 1, y_2 = 9$$

8.4.18. Az egyenleteket átalakítva az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} = 3 \\ xy = 20 \end{cases}$$

Ezt megoldva, a következőket kapjuk:

$$x_1 = 5, y_1 = 4, x_2 = 4, y_2 = 5$$

8.4.19. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát:

$$\frac{\log x + 7}{4} \cdot \log x = \log x + 1$$

Ebből:

$$(\log x)^2 + 3 \log x - 4 = 0$$

Az egyenlet gyökei:

$$\log x = 1, \text{és } \log x = -4$$

A megoldás: $x_1 = 10, \text{és } x_2 = 0{,}0001$

8.4.20. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\log \frac{4^{-1} \cdot 2^{\sqrt{x}} - 1}{10} = \log \frac{\sqrt{2^{\sqrt{x}-2}} + 2}{2^2}$$

Elhagyva a logaritmust, majd rendezve:

$$2^{\sqrt{x}} - 5 \cdot 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} - 24 = 0$$

Legyen $2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = y$. Ekkor: $y^2 - 5y - 24 = 0$

Ebből: $y_1 = 8, és\ y_2 = -3.$

Ezeket visszahelyettesítve adódik:

$$2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = 8, és\ 2^{\frac{\sqrt{x}}{2}} \neq -3$$

Ezért a megoldás: $x = 36.$

8.4.21. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\log\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(5^{\sqrt{x}} + 1\right)\right] = \log\left(\frac{5\left(1 + 5^{\sqrt{x}}\right)}{5^{\sqrt{x}}}\right)$$

Elhagyva a logaritmust, majd rendezve:

$$5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$$

Legyen $5^{\sqrt{x}} = y$. Ekkor: $y^2 - 124y - 125 = 0$

Ebből: $y_1 = 125, és\ y_2 = -1.$

Ezeket visszahelyettesítve adódik:

$$5^{\sqrt{x}} = 125, 5^{\sqrt{x}} \neq -1$$

Ezért a megoldás: $x = 9.$

8.4.22. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$5^{\log x} + 5^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} + 3^{\log x - 1}$$

$$5^{\log x}\left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3^{\log x}\left(3 + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{5^{\log x}}{3^{\log x}} = \frac{25}{9}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

Ezért a megoldás: $x = 100.$

8.4.23. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$2 \cdot (\log x)^4 - 1{,}5 \cdot (\log x)^2 = \frac{1}{2}$$

Ezt vissza lehet vezetni egy másodfokú egyenletre, melynek két valós megoldása van:

$$\log x = 1, \text{és } \log x = -1$$

A megoldás: $x_1 = 10, \text{és } x_2 = 0{,}1$

8.4.24. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$64 \cdot \sqrt[24]{2^{x^2-40x}} = 1$$

$$2^{x^2-40x} = \left(\frac{1}{64}\right)^{24}$$

$$2^{x^2-40x} = 2^{-144}$$

A kitevők egyenlők. Oldjuk meg az egyenletet. A megoldás: $x_1 = 36, \text{és } x_2 = 4$

8.4.25. Írjuk át az egyenletet hatvány alakra:

$$9 - 2^x = 2^{3-x}$$

Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$9 - 2^x = \frac{2^3}{2^x}$$

Ebből:

$$2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

Megoldva az egyenletet: $2^x = 8, \text{és } 2^x = 1$. A megoldás: $x_1 = 3, \text{és } x_2 = 0$

8.4.26. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$2 \cdot (4^{x-2} + 9) = 10 \cdot (2^{x-2} + 1)$$

$$2 \cdot \left(\frac{2^{2x}}{16} + 9\right) = 10 \cdot \left(\frac{2^x}{4} + 1\right)$$

Legyen $2^x = y$. Ekkor rendezve az egyenletet:

$$y^2 - 20y + 64 = 0$$

Megoldva az egyenletet, és visszahelyettesítve, a megoldás: $x_1 = 4, és\ x_2 = 2$

8.4.27. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$4 \cdot 3^{1+\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$$

$$12 \cdot 3^{\frac{1}{2x}} = 3^{\frac{1}{x}} + 27$$

Legyen $3^{\frac{1}{2x}} = y$. Ekkor rendezve az egyenletet:

$$y^2 - 12y + 27 = 0$$

Megoldva az egyenletet, és visszahelyettesítve, a megoldás: $x_1 = \frac{1}{4}, és\ x_2 = \frac{1}{2}$.

8.4.28. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$\frac{3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}}{100} = \frac{\sqrt[4]{16}}{4^{\sqrt{x+0,25}}}$$

$$\frac{1}{100}\left(3^{\sqrt{4x+1}} - \frac{16}{2^{\sqrt{4x+1}}}\right) = \frac{2}{2^{\sqrt{4x+1}}}$$

$$6^{\sqrt{4x+1}} - 16 = 200$$

$$6^{\sqrt{4x+1}} = 216$$

$$\sqrt{4x+1} = 3$$

Ebből a megoldás: $x = 2$.

8.4.29. Alakítsuk át az egyenletet az alábbi módon:

$$(3 + \log x)(\log x - \log 3) = 4 + \log 3$$

$$(\log x)^2 + (3 - \log 3) \cdot \log x - 4(1 + \log 3) = 0$$

Megoldva az egyenletet: $\log x = \log 30\,, és\ \log x = \log 10^{-4}$.

Ebből a megoldás: $x_1 = 30, x_2 = 0{,}0001$.

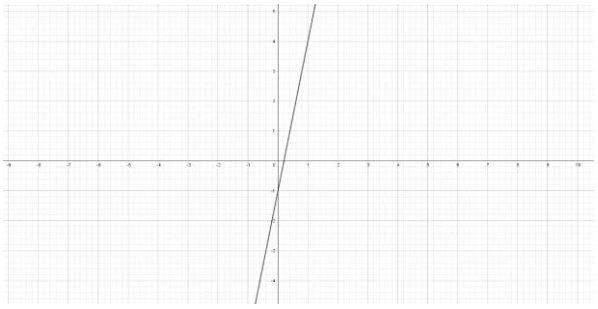
9. Függvények

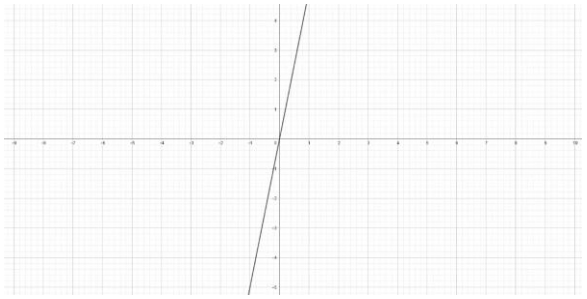
9.1. Elemi függvények

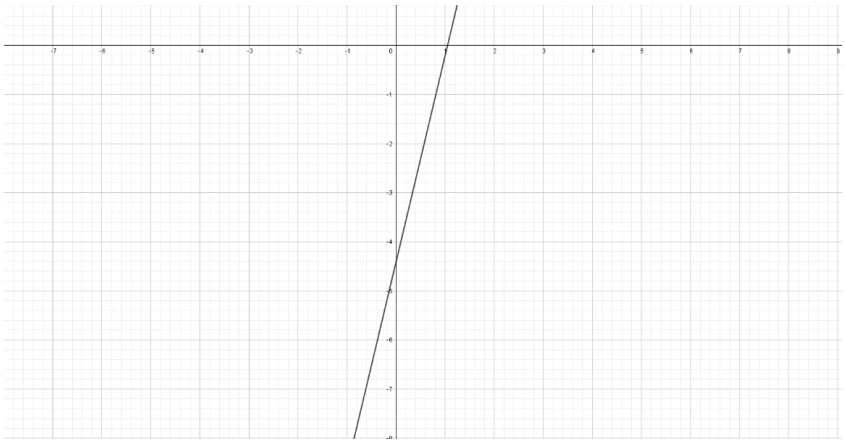
9.1.1 A megoldás:

$$1.\, f(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \quad 2.\, f(x) = \frac{2}{3}x - 1 \quad 3.\, f(x) = -2 \quad 4.\, f(x) = 3x - \frac{1}{2}$$

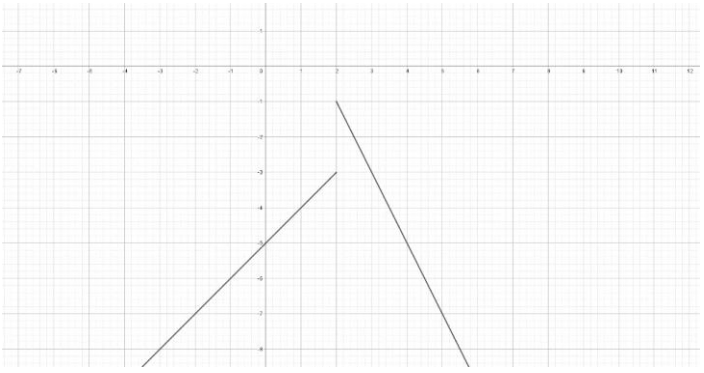
9.1.2 A megoldás:

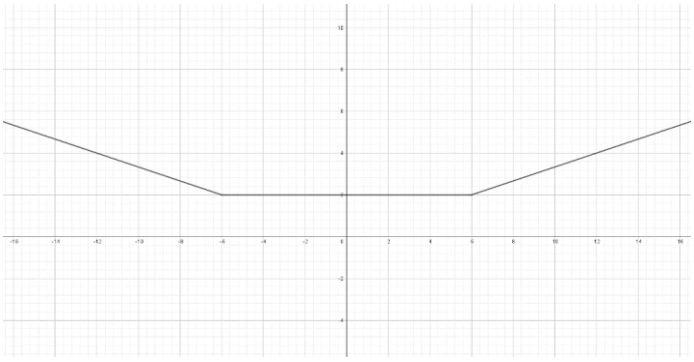


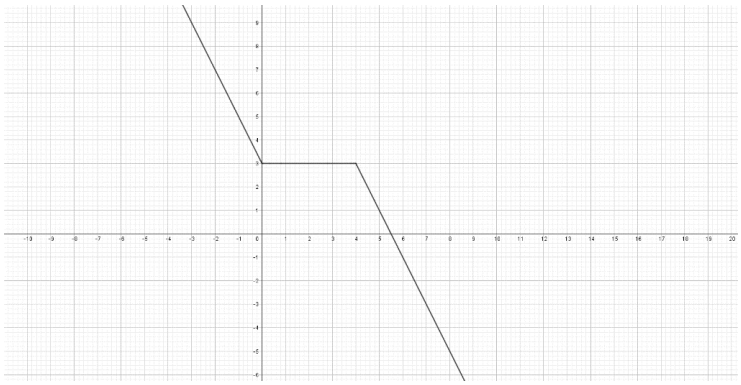




9.1.3 A megoldás:



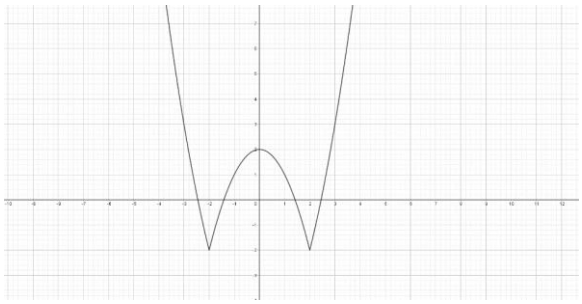


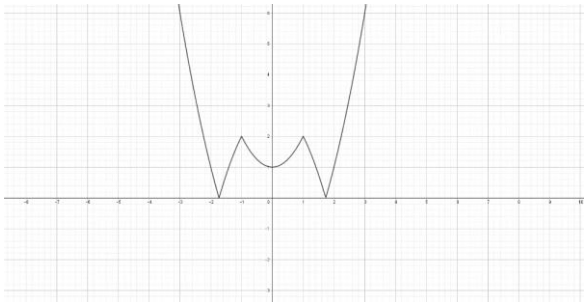


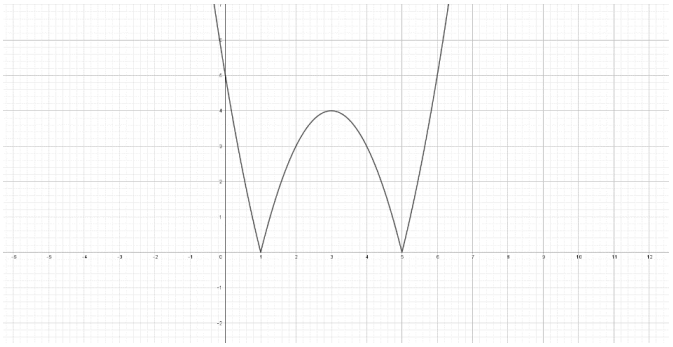
9.1.4 A megoldás:

$$1.\, f(x) = 2|x+2| + 2 \qquad 2.\, f(x) = -|x-3| - 1 \qquad 3.\, f(x) = -\frac{1}{2}|x+4| + 3$$

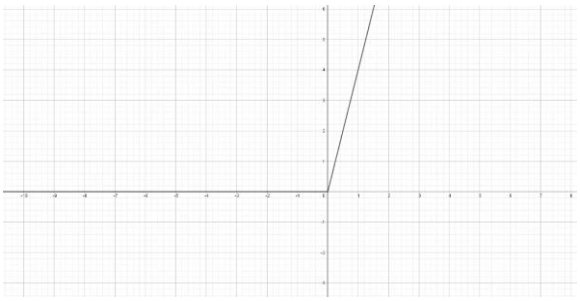
9.1.5 A megoldás:

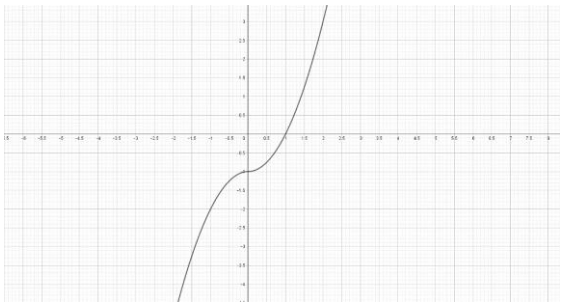


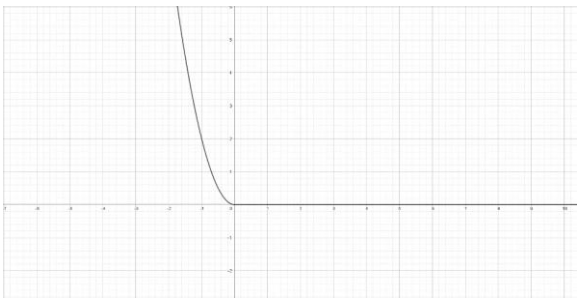


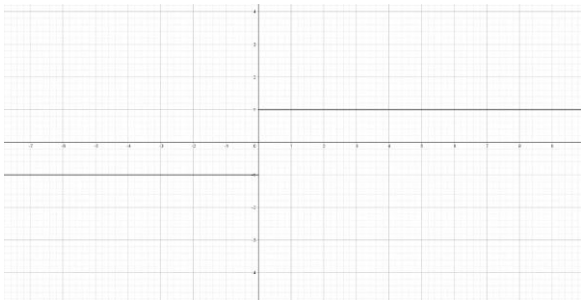


9.1.6 A megoldás:

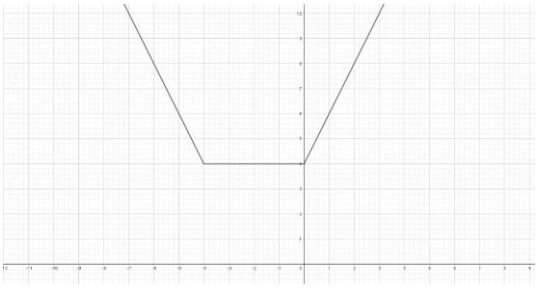


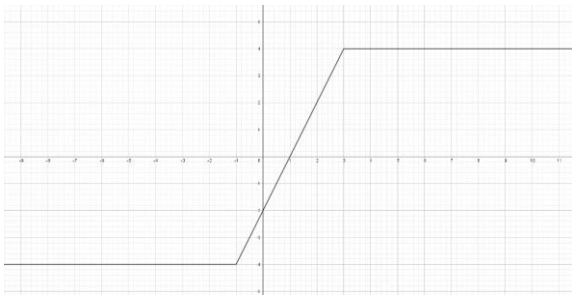


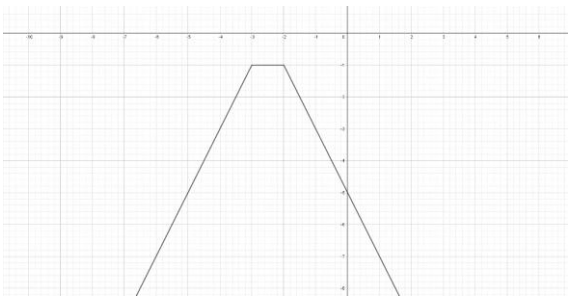


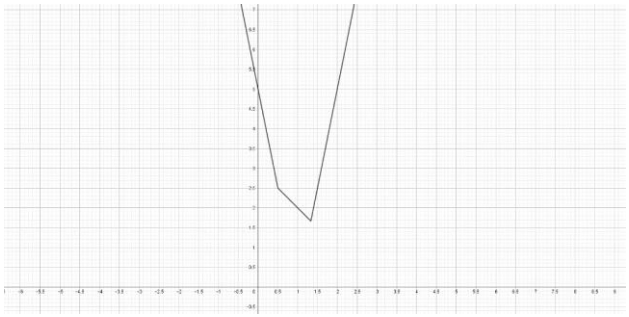


9.1.7 A megoldás:

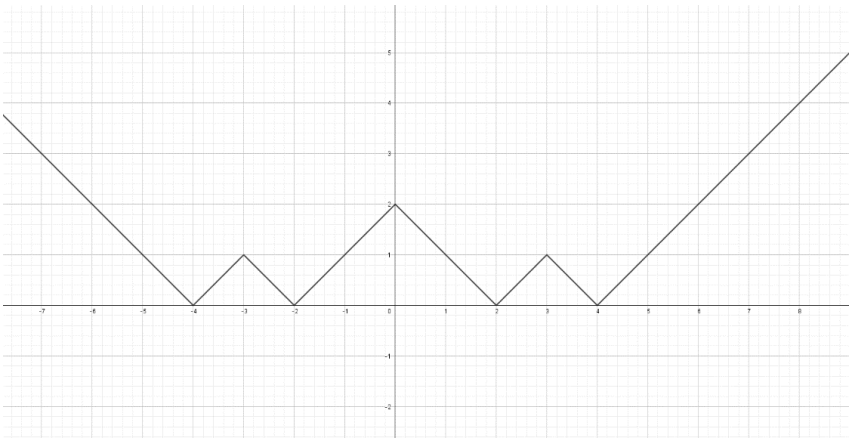


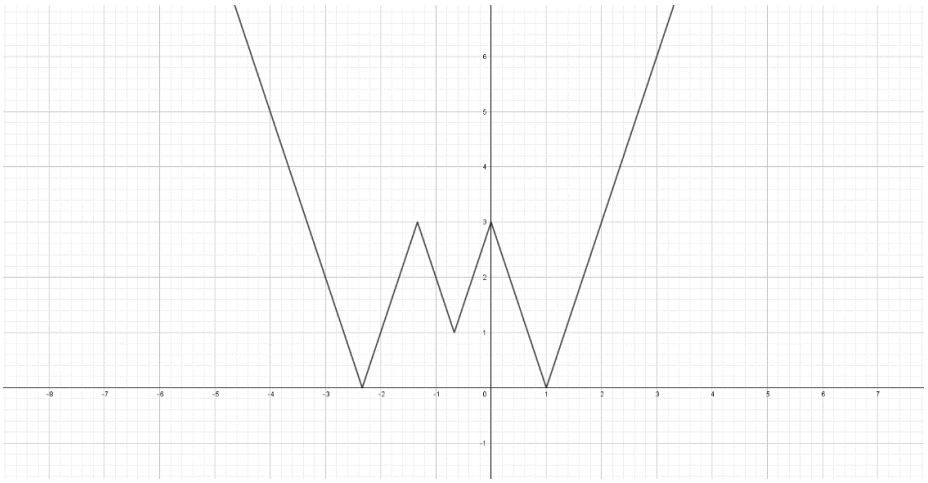






9.1.8 A megoldás:



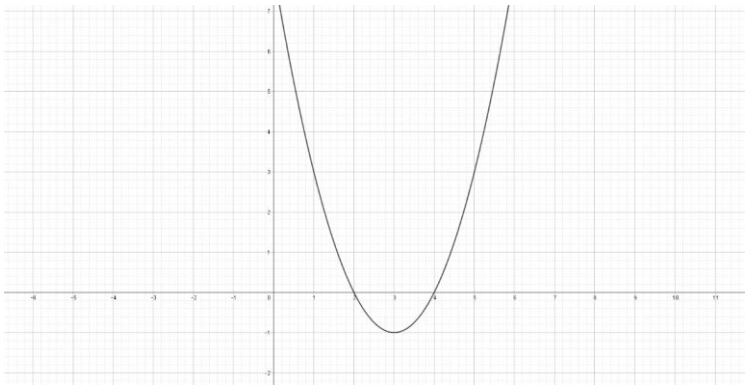


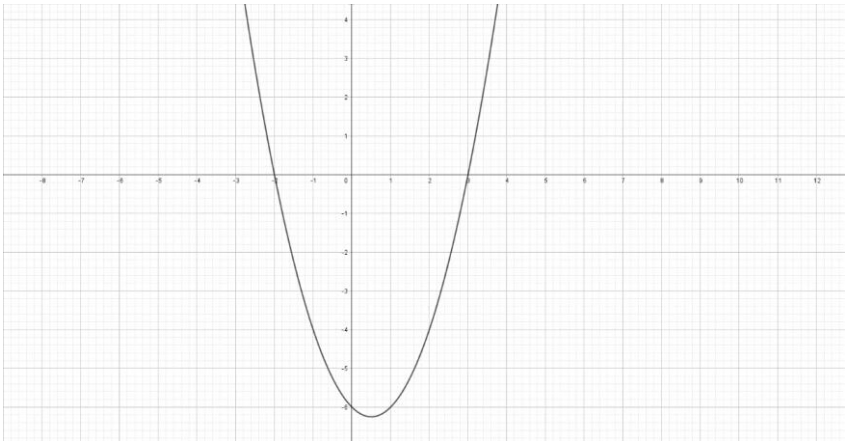
9.1.9 A megoldás:

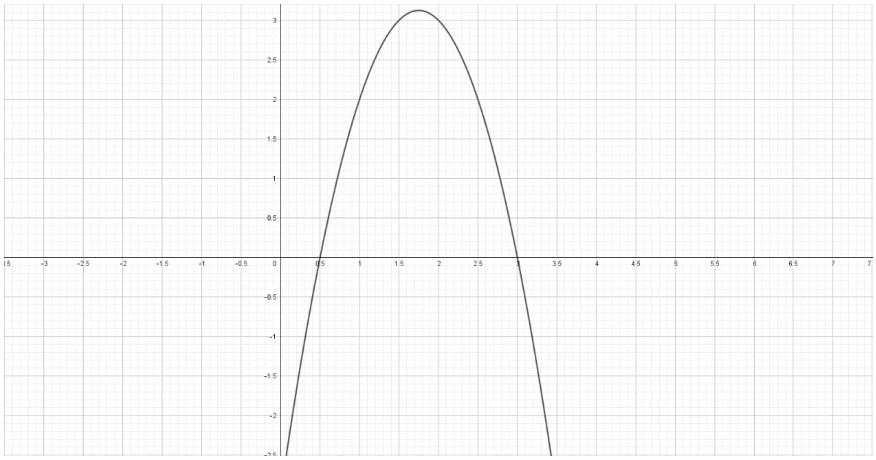
$$1.\, f(x) = 2(x-2)^2 - 2 \qquad 2.\, f(x) = -2(x+4)^2 + 4$$

$$3.\, f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 3 \qquad 4.\, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5$$

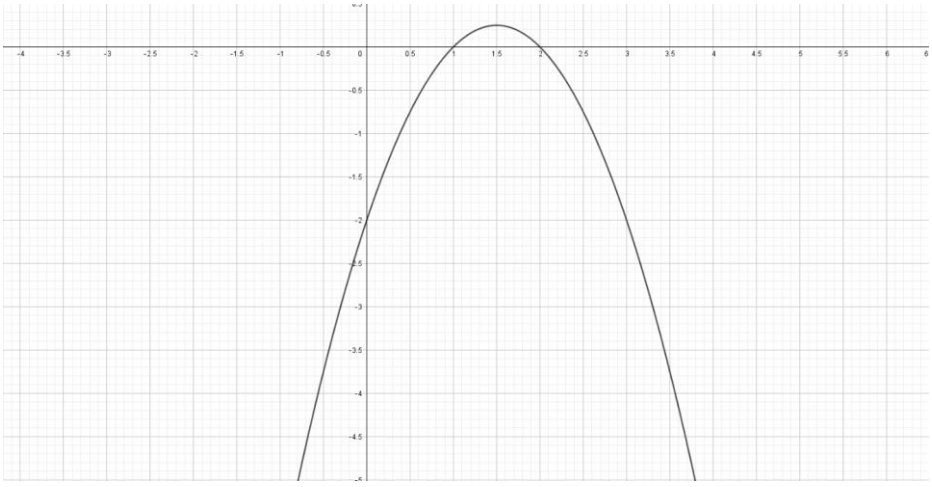
9.1.10 A megoldás:

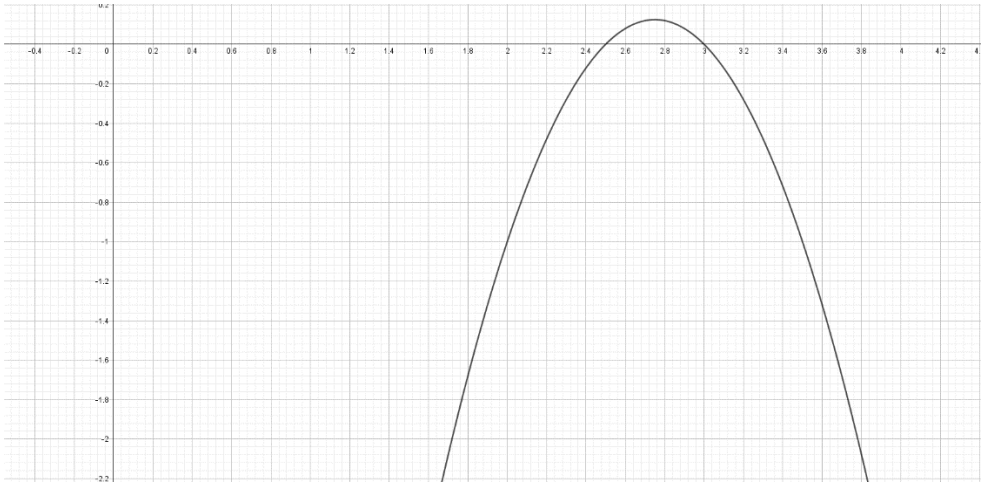


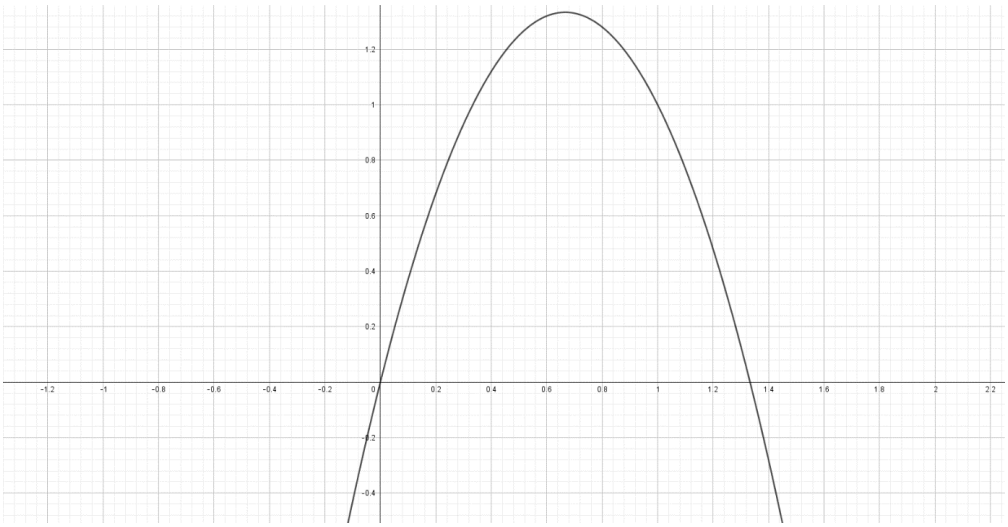




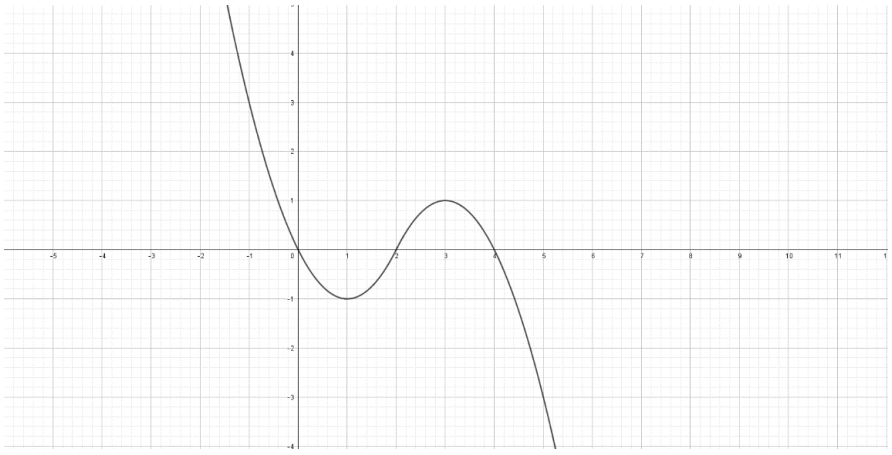
9.1.11 A megoldás:

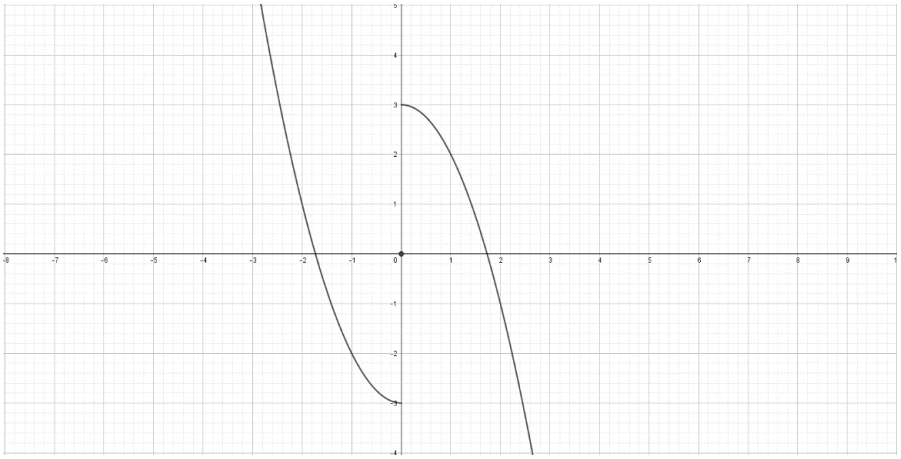


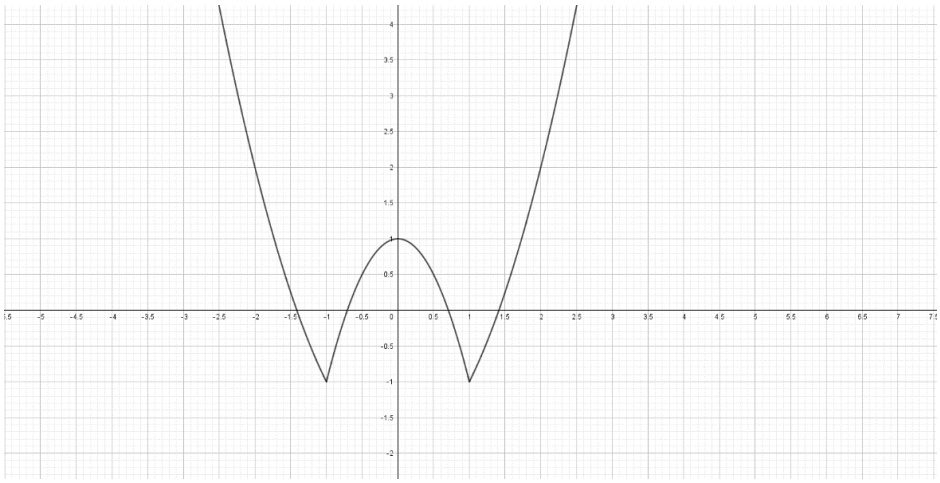




9.1.12 A megoldás:



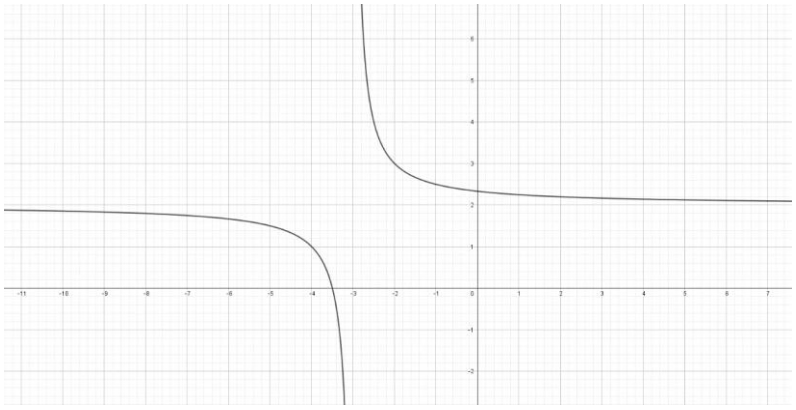


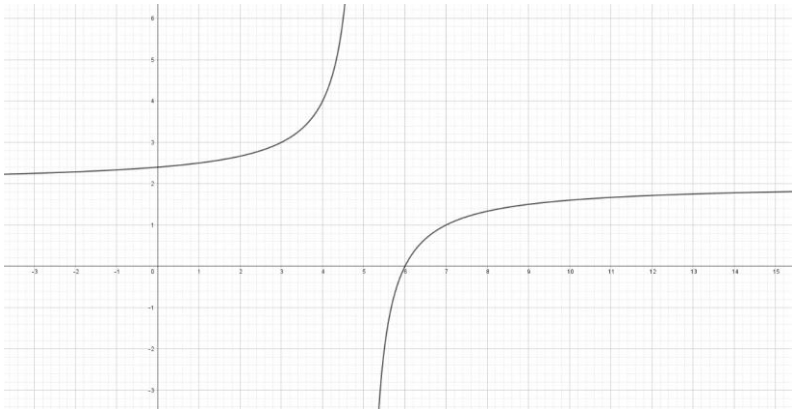


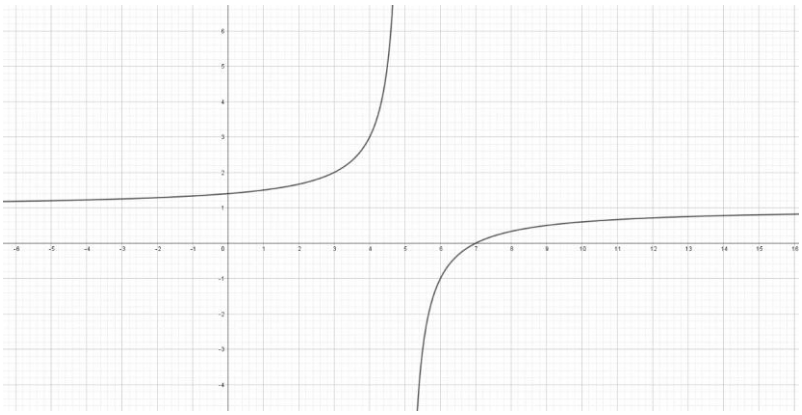
9.1.13 A megoldás:

$$1.\, f(x) = \frac{1}{x-3} - 3 \qquad 2.\ f(x) = \frac{2}{x} - 2 \qquad 3.\ f(x) = \frac{-1}{x+4} + 4$$

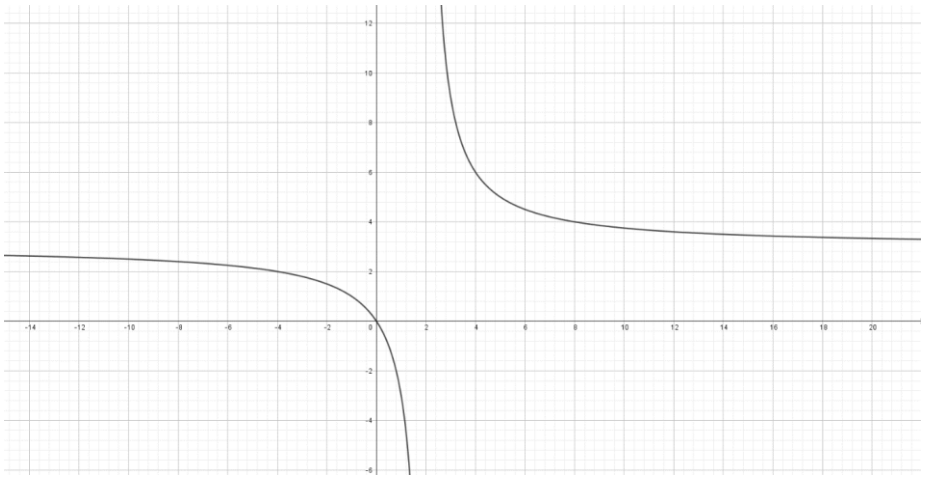
9.1.14 A megoldás:

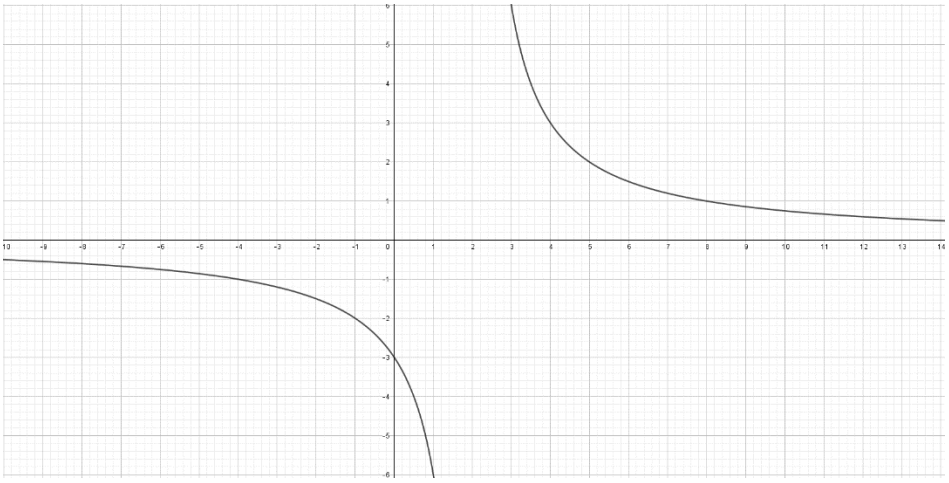


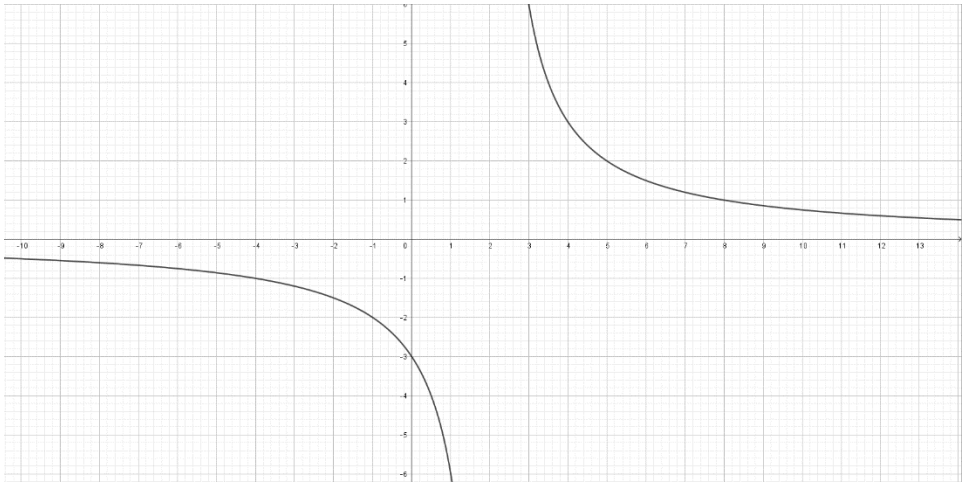




9.1.15 A megoldás:







9.2. Irracionális és magasabb fokú függvények

9.2.1 A megoldás:

$$1.\, f(x) = 2\sqrt{x-3} + 1 \quad 2.\, f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x+4} + 2$$

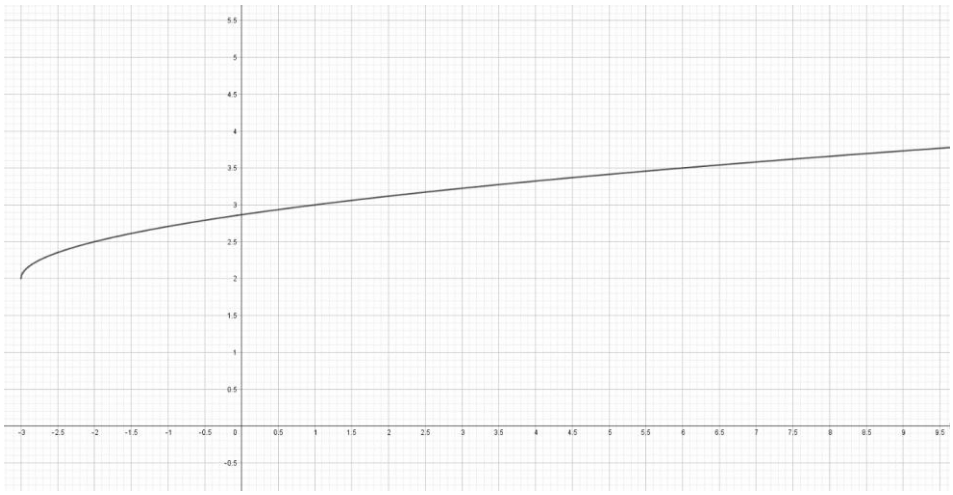
$$3.\, f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-4} - 2 \quad 4.\, f(x) = 2\sqrt{5-x} - 4$$

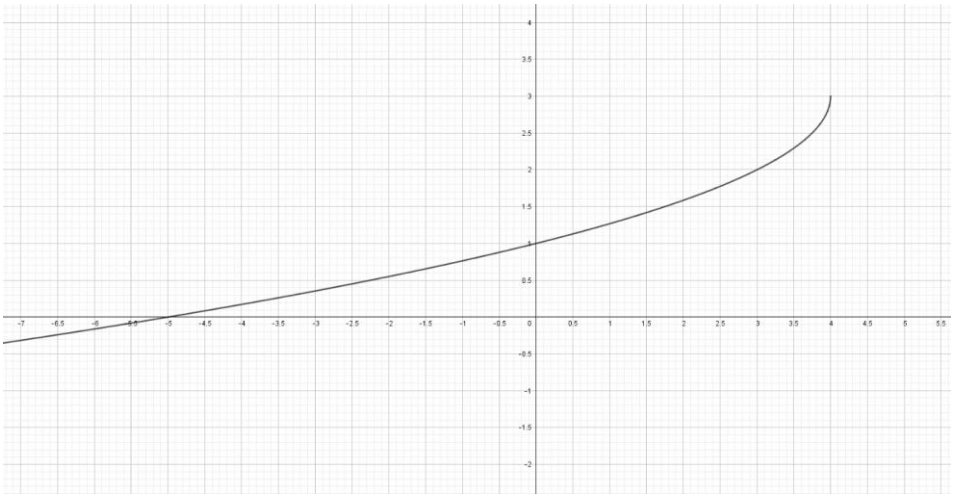
9.2.2 A megoldás:

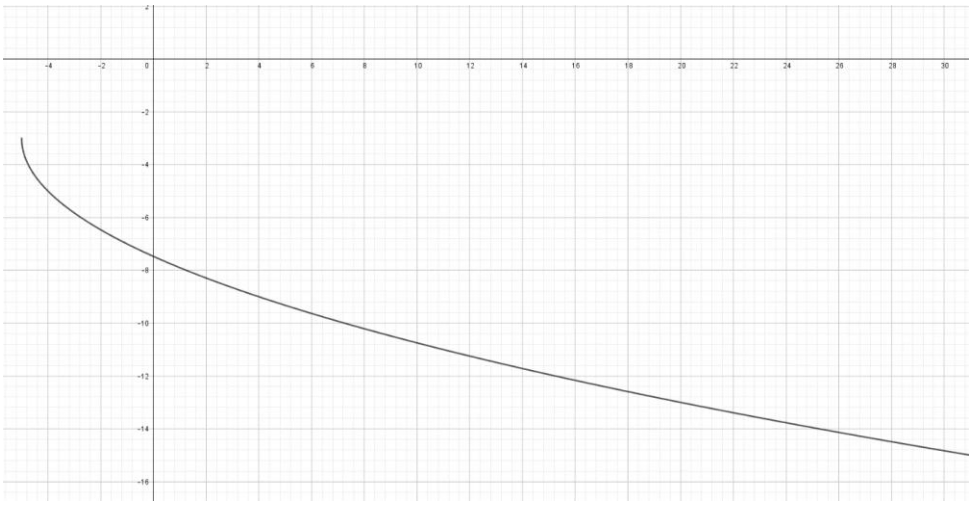
$$1.\, f(x) = \sqrt[3]{x-4} \quad 2.\, f(x) = 2\sqrt[4]{x+6}$$

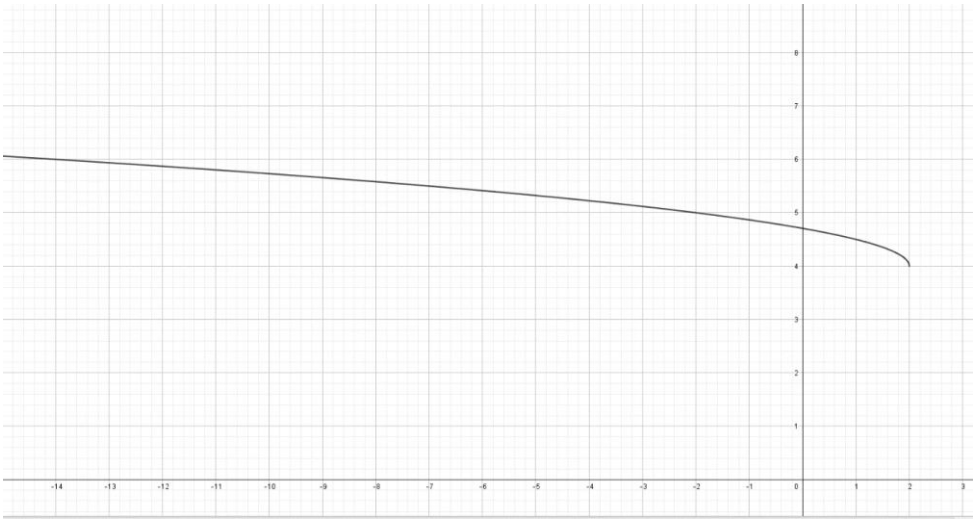
$$3.\, f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + 2 \quad 4.\, f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x} + 4$$

9.2.3 A megoldás:

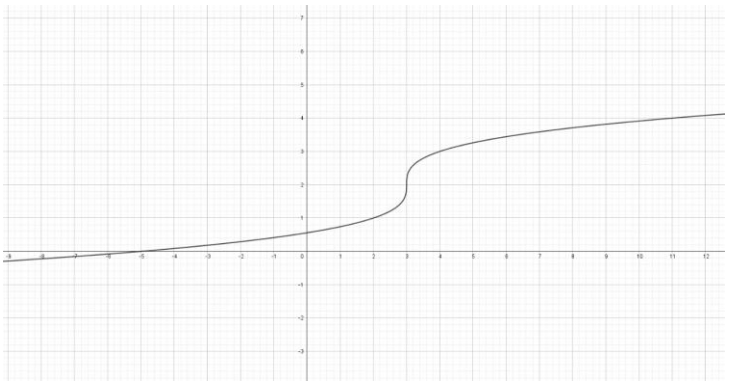


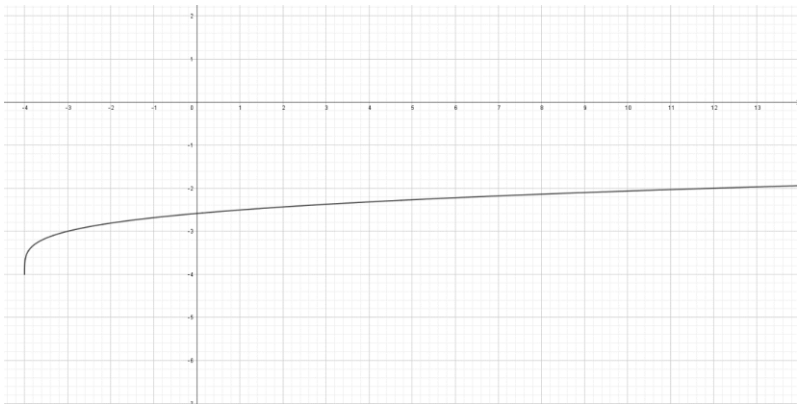


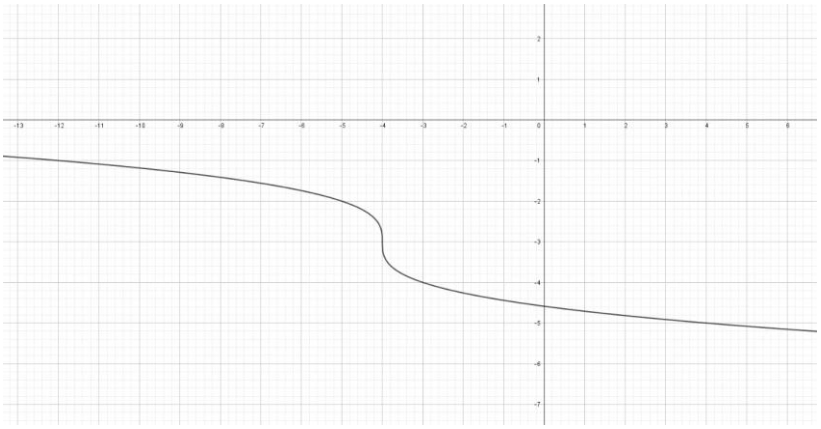


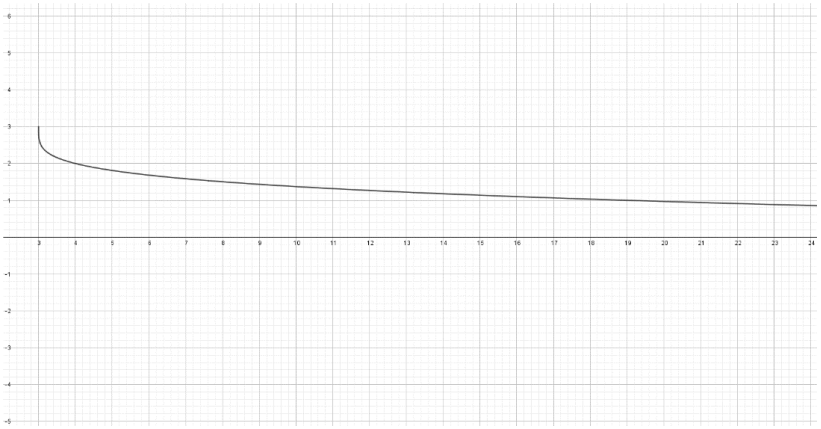


9.2.4 A megoldás:

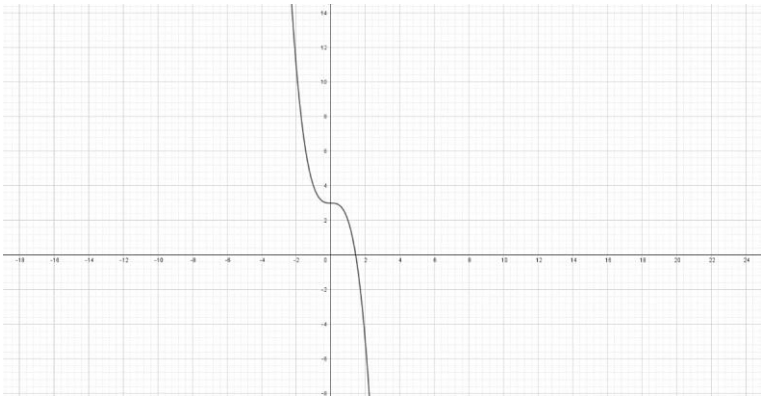


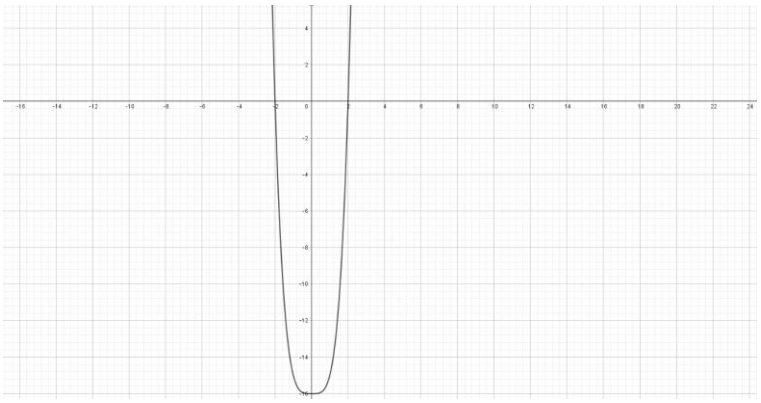


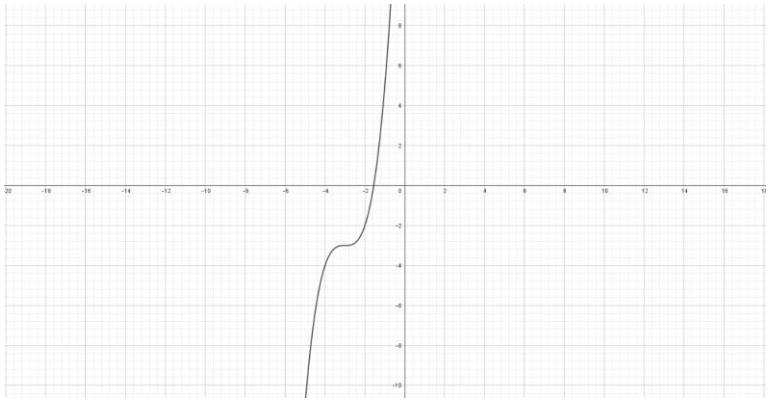


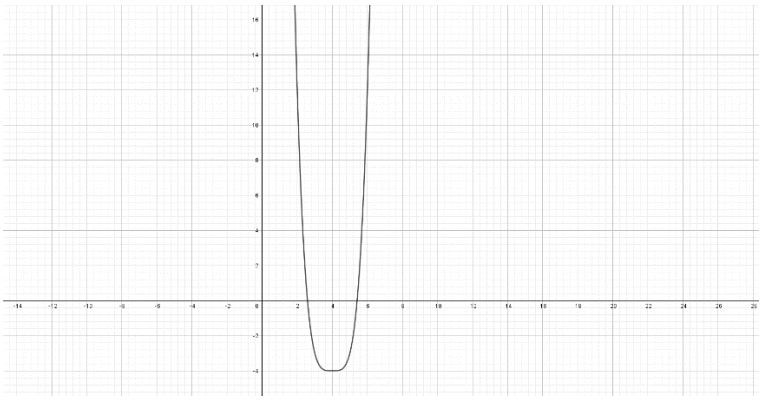


9.2.5 A megoldás:









9.3. Exponenciális és logaritmus függvények

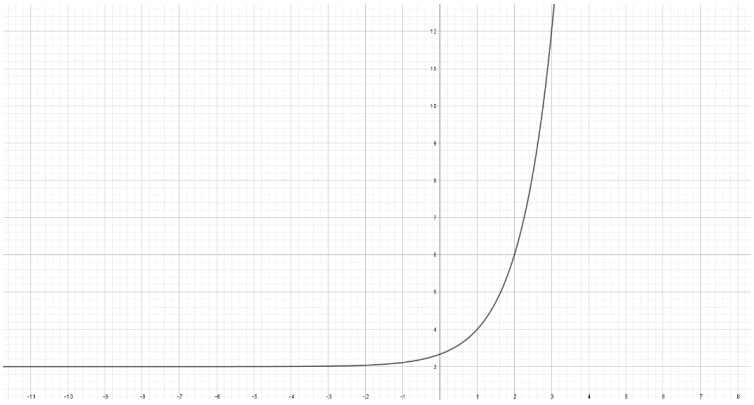
9.3.1 A megoldás:

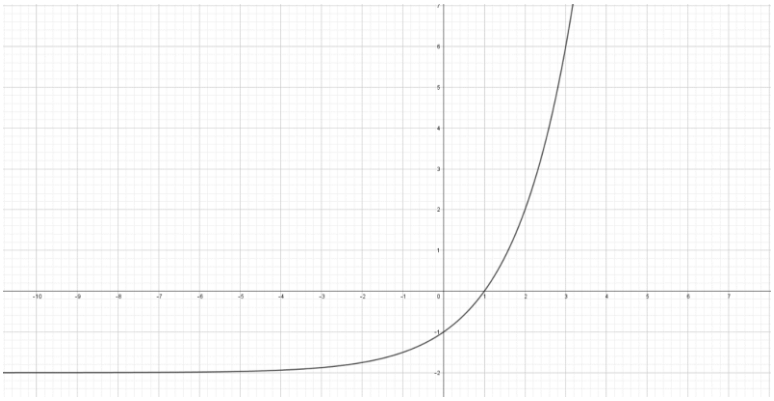
$$f(x) = 2^{x+1} - 2 \qquad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 2$$

9.3.2 A megoldás:

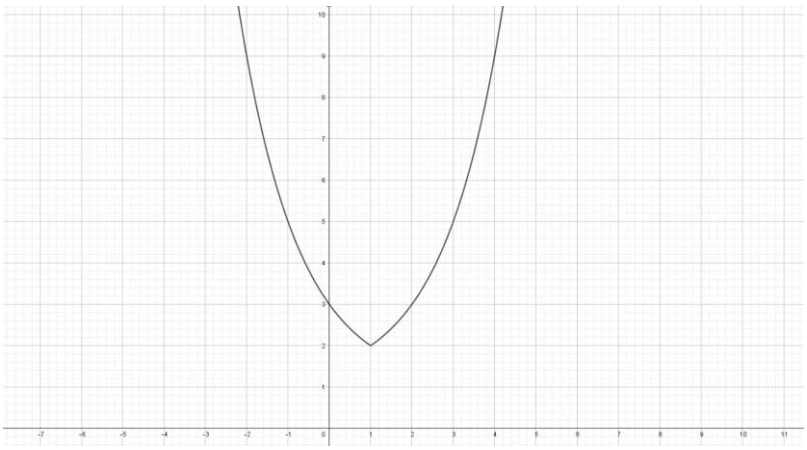
$$f(x) = -3^{x+1} + 3 \qquad f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} - 3$$

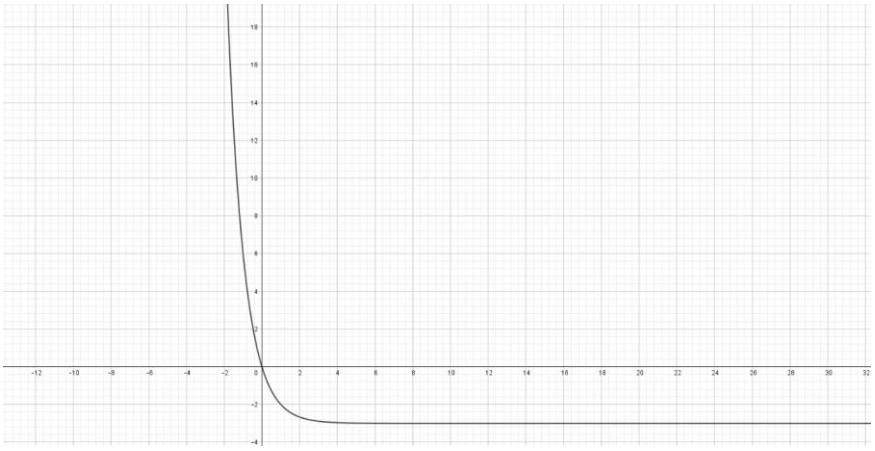
9.3.3 A megoldás:



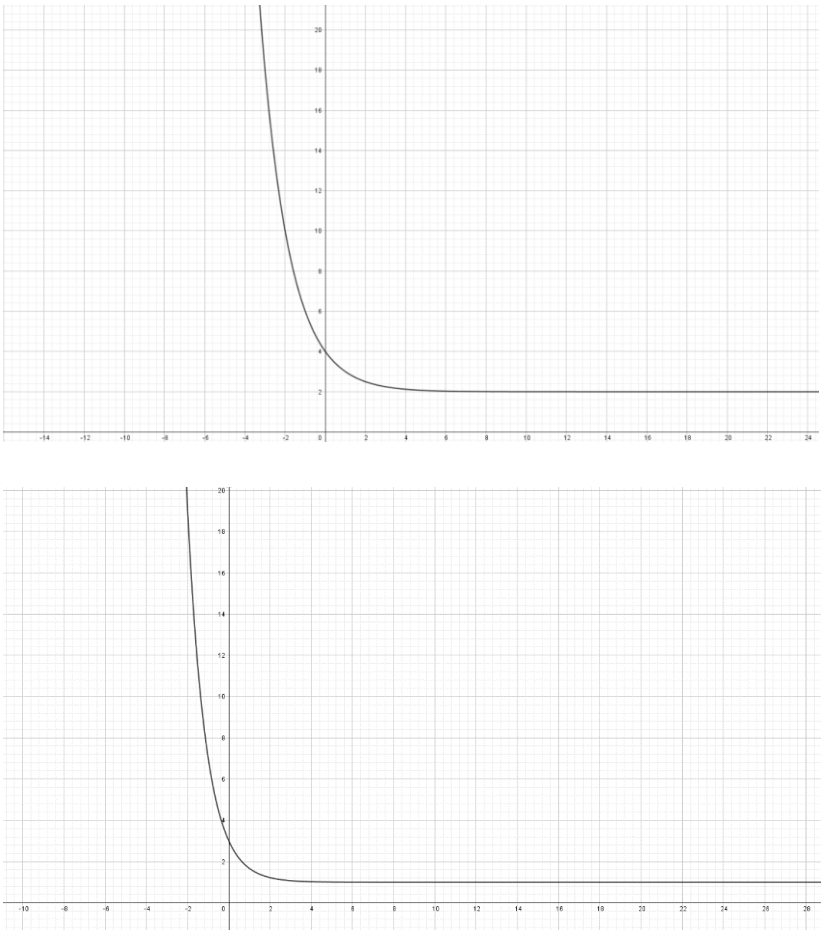


9.3.4 A megoldás:

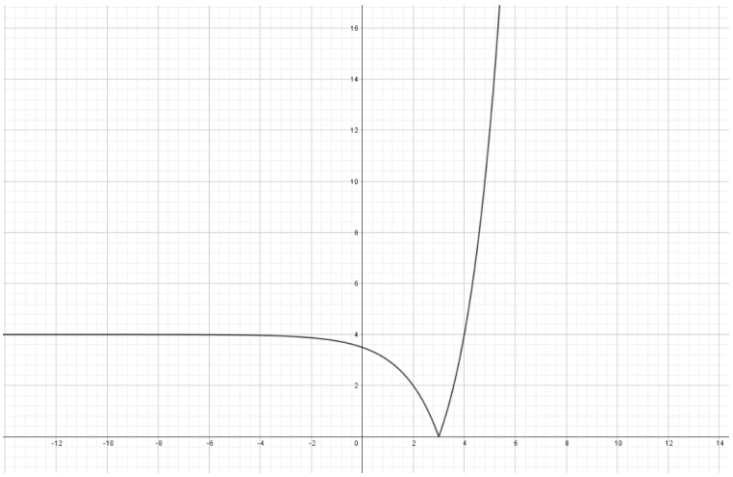


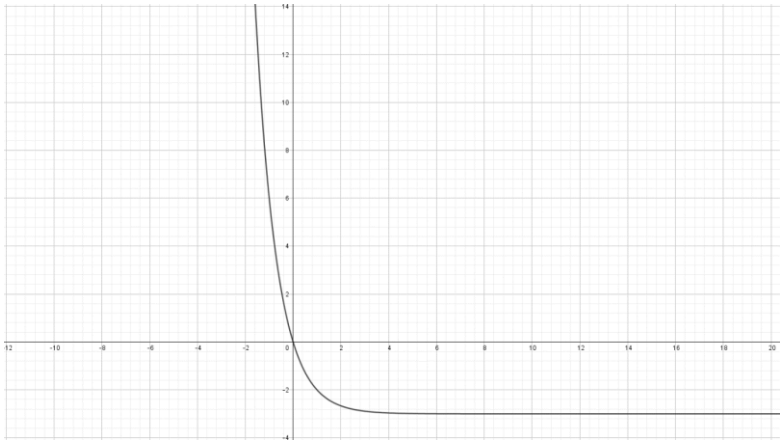


9.3.5 A megoldás:



9.3.6 A megoldás:





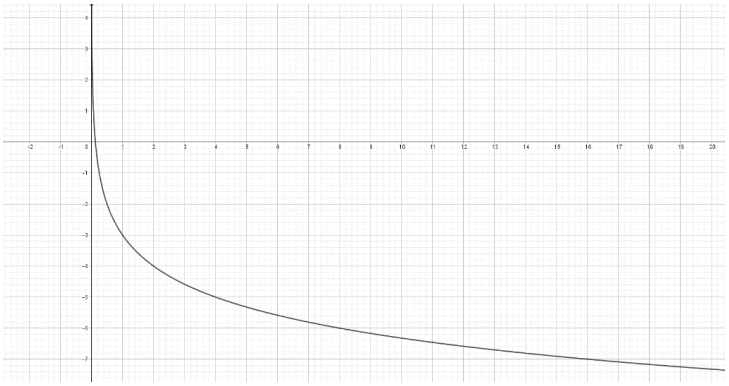
9.3.7 A megoldás:

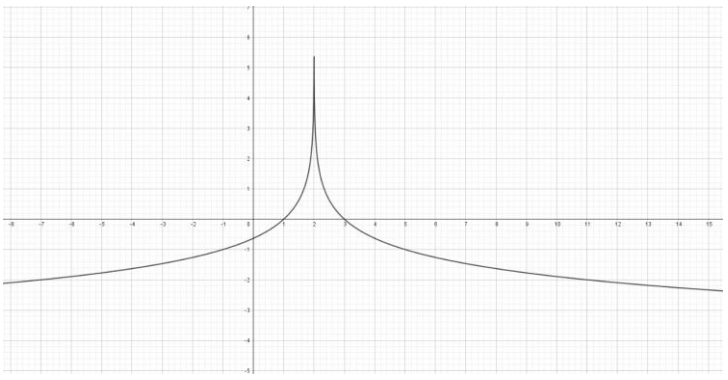
$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x + 3 \qquad f(x) = \log_2(x+2) + 2$$

9.3.8 A megoldás:

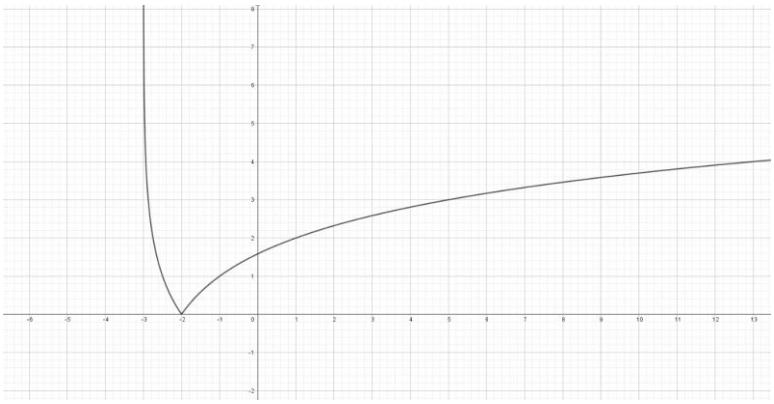
$$f(x) = \log_3(x-3) - 3 \qquad f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 1$$

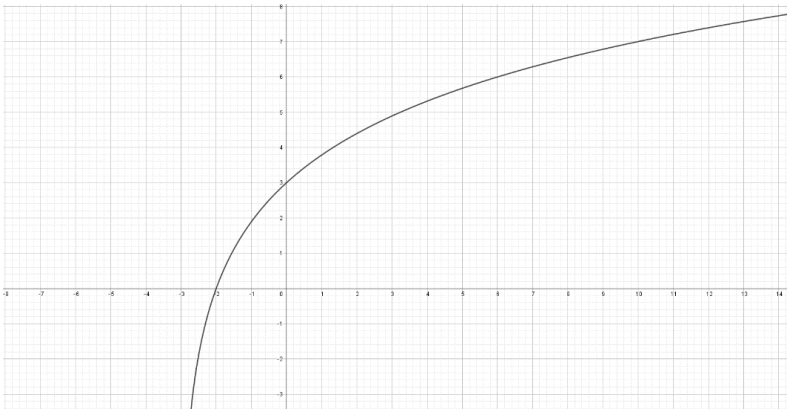
9.3.9 A megoldás:



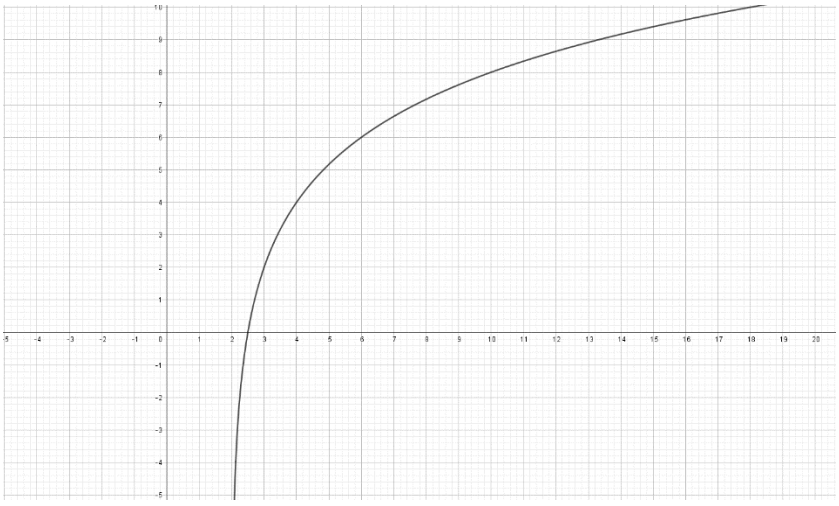


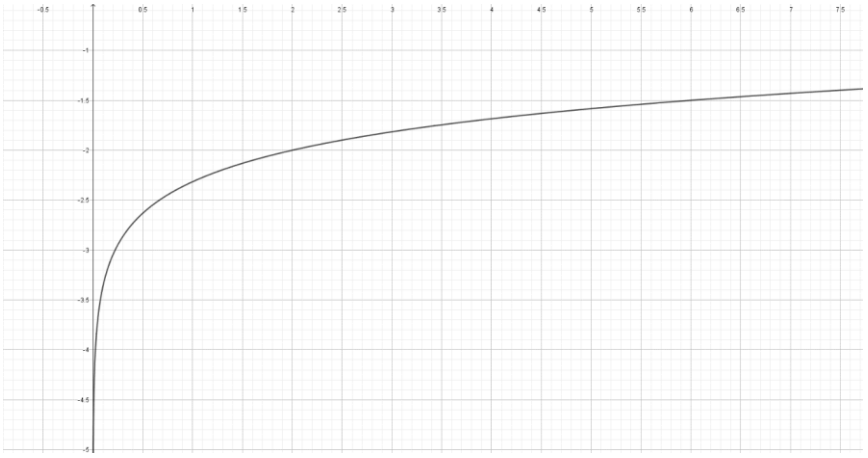
9.3.10 A megoldás:



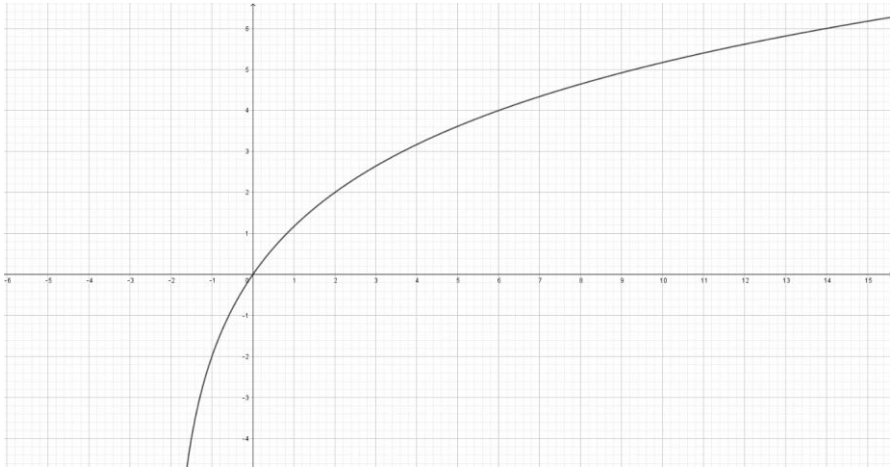


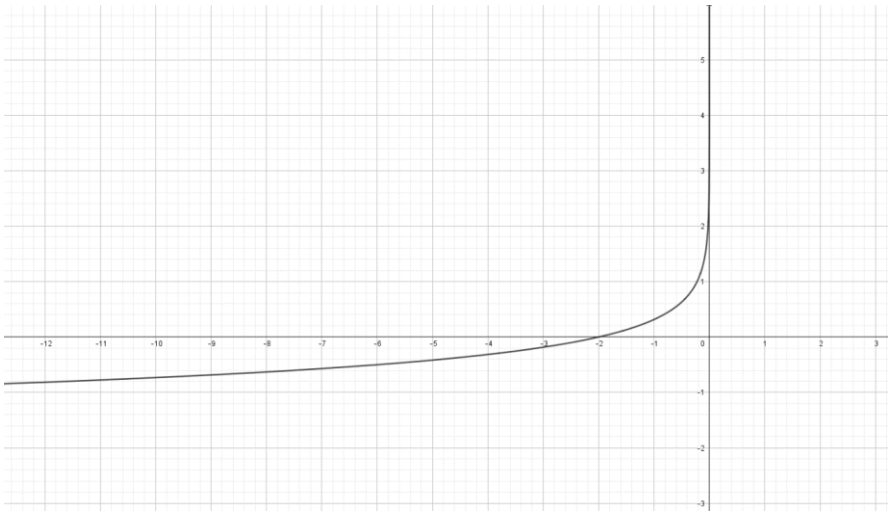
9.3.11 A megoldás:





9.3.12 A megoldás:





9.4. Trigonometrikus függvények

9.4.1 A megoldás:

1. $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 2. $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \sin x + 1$

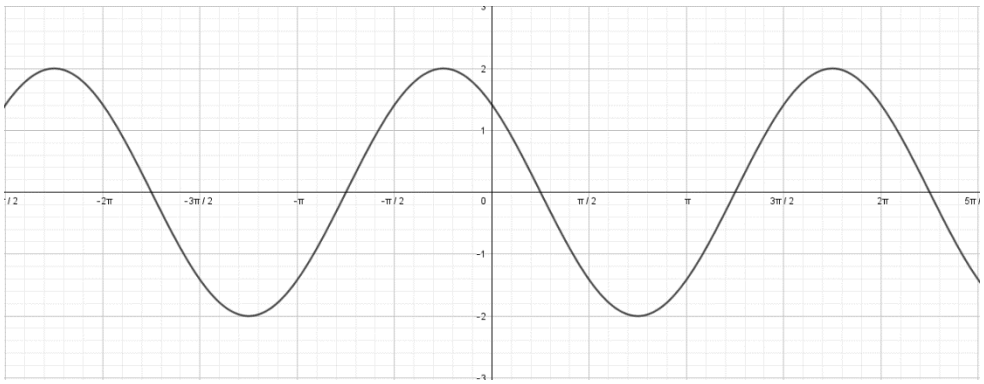
3. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 4. $f(x) = -2 \cdot \cos x - 1$

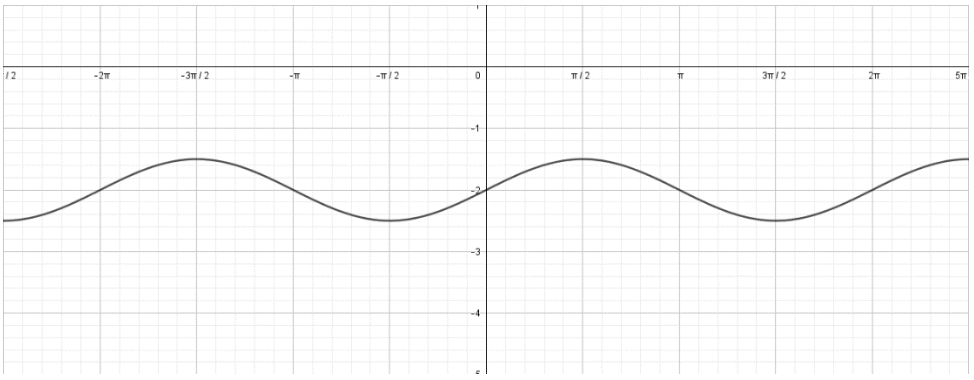
9.4.2 A megoldás:

1. $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ 2. $f(x) = -tgx + 2$

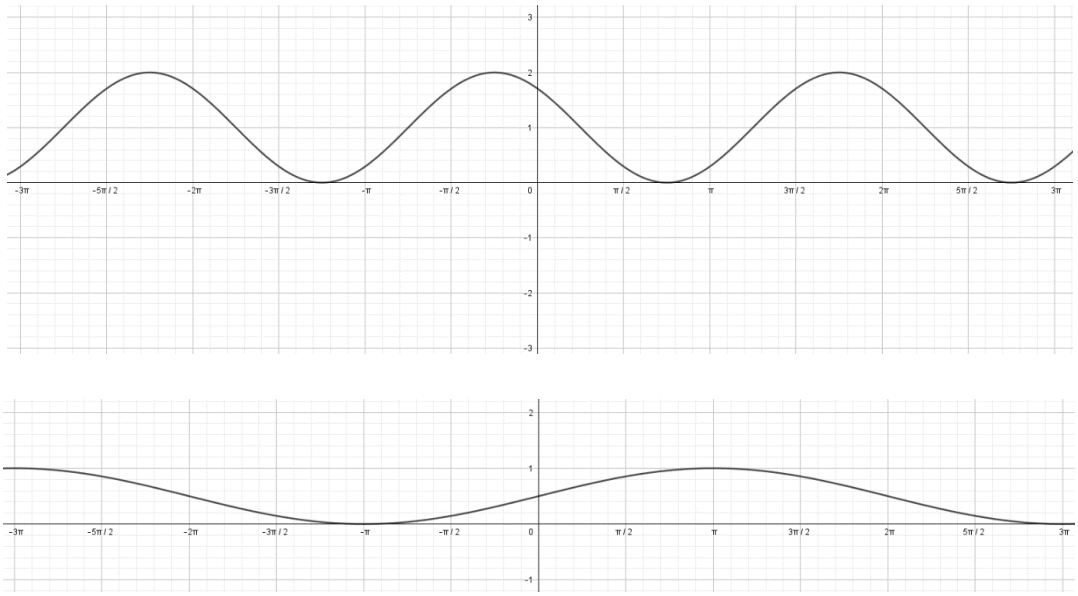
3. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot ctg\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 4. $f(x) = -1 \cdot ctgx - 1$

9.4.3 A megoldás:

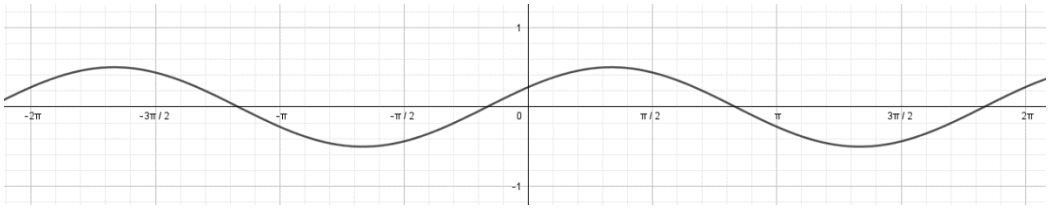


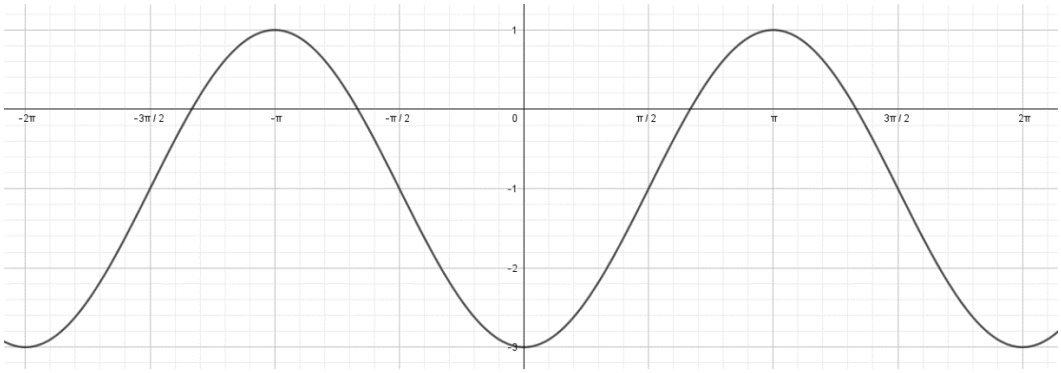


9.4.4 A megoldás:

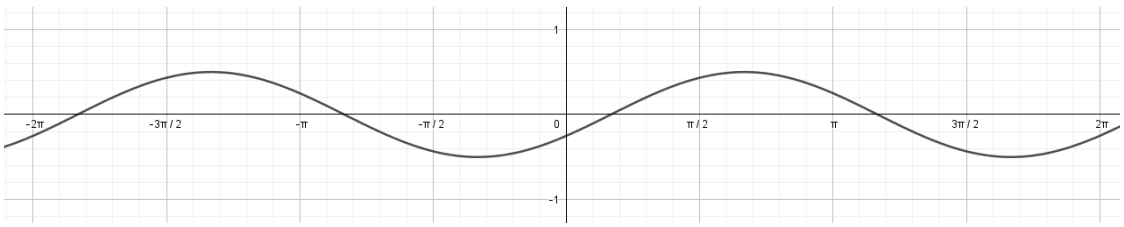


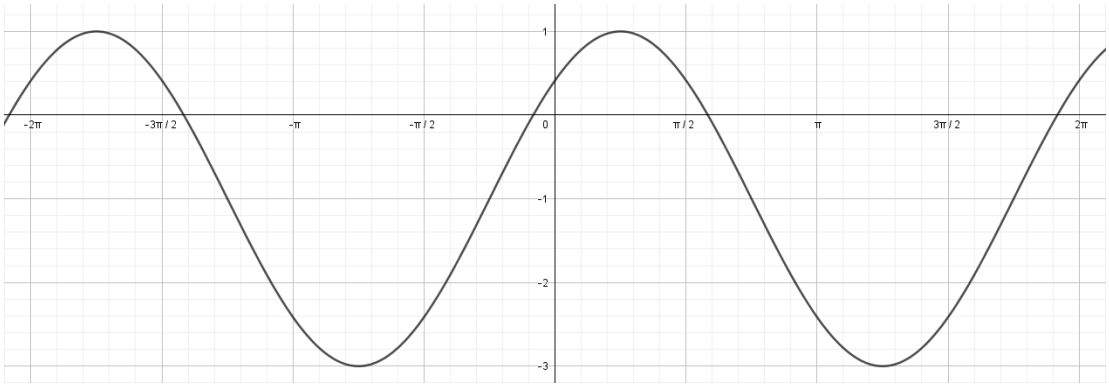
9.4.5 A megoldás:



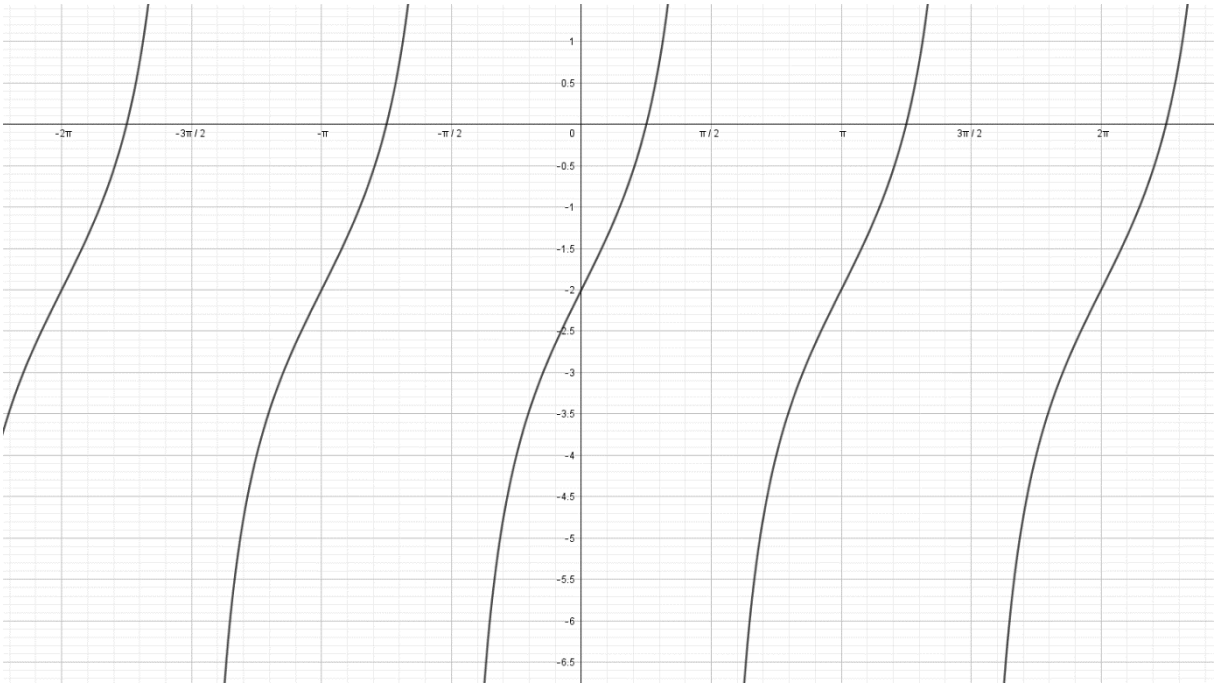


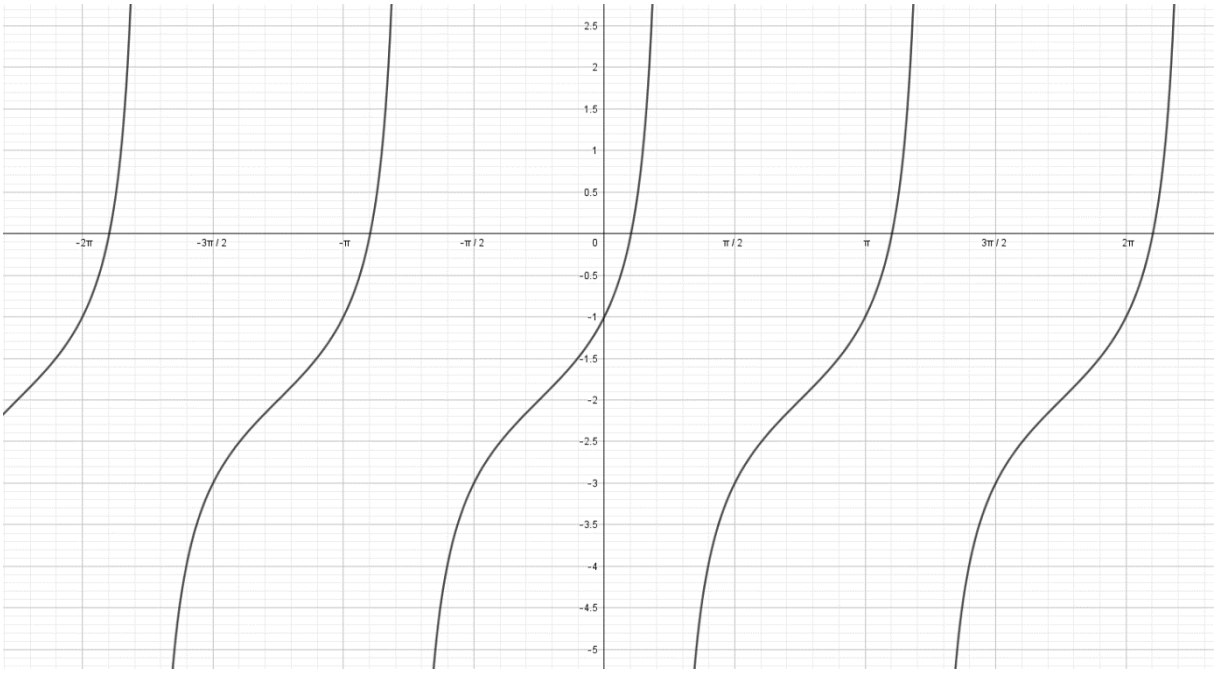
9.4.6 A megoldás:



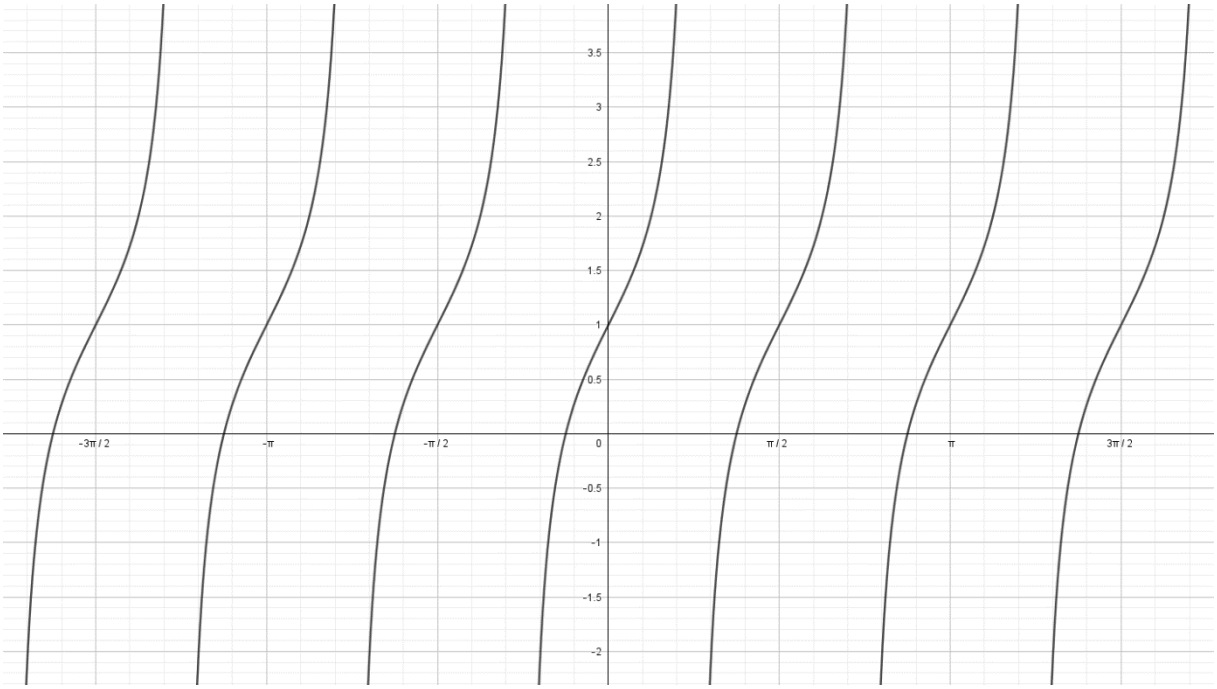


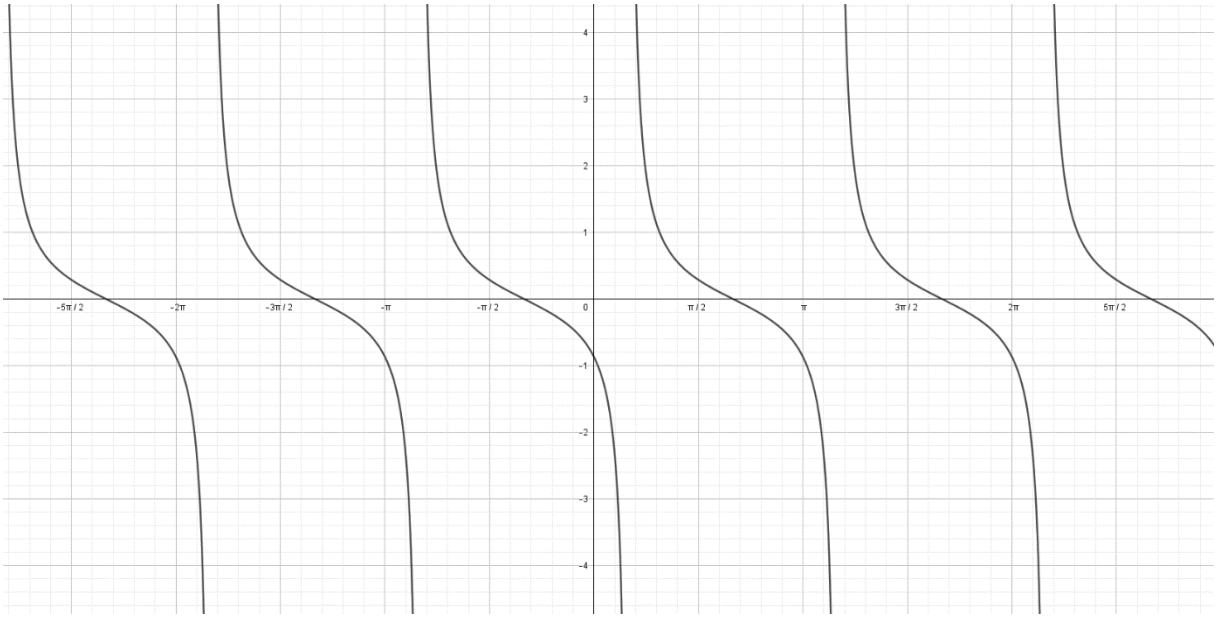
9.4.7 A megoldás:



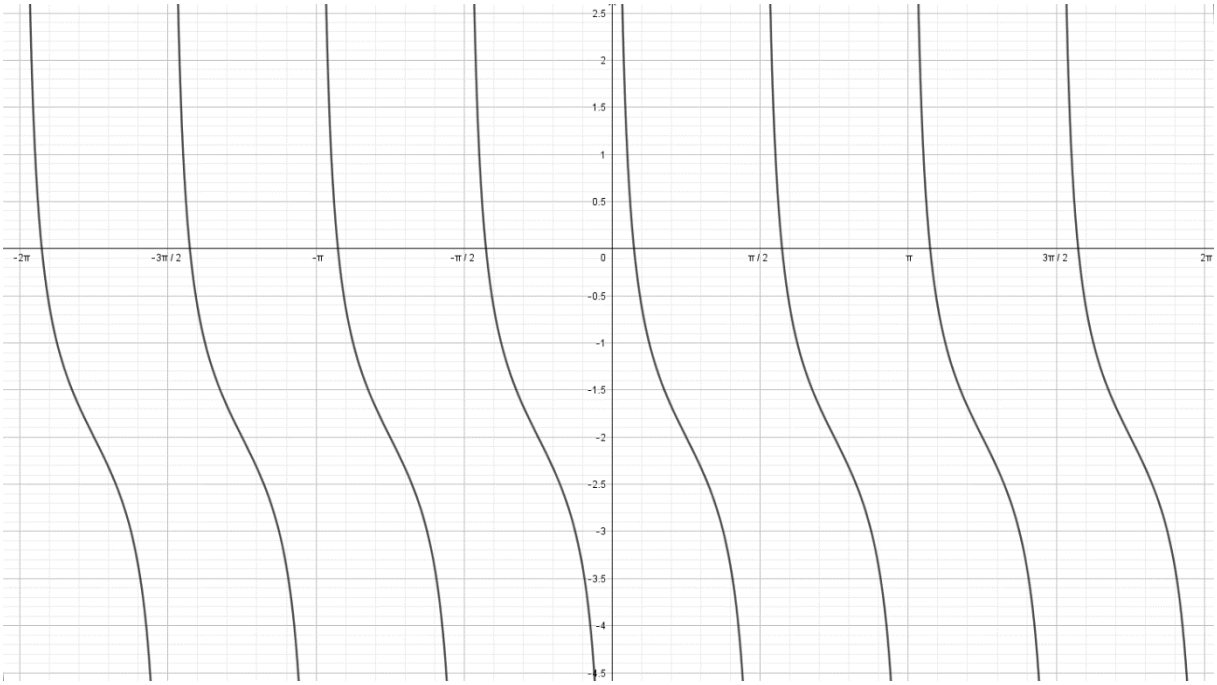


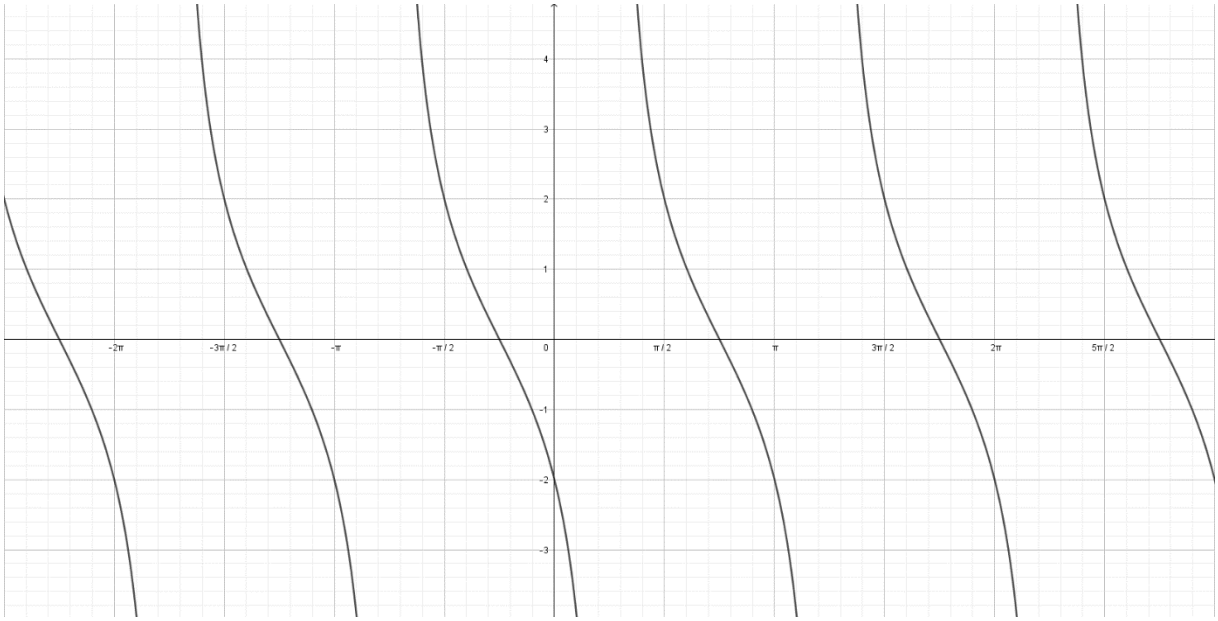
9.4.8 A megoldás:



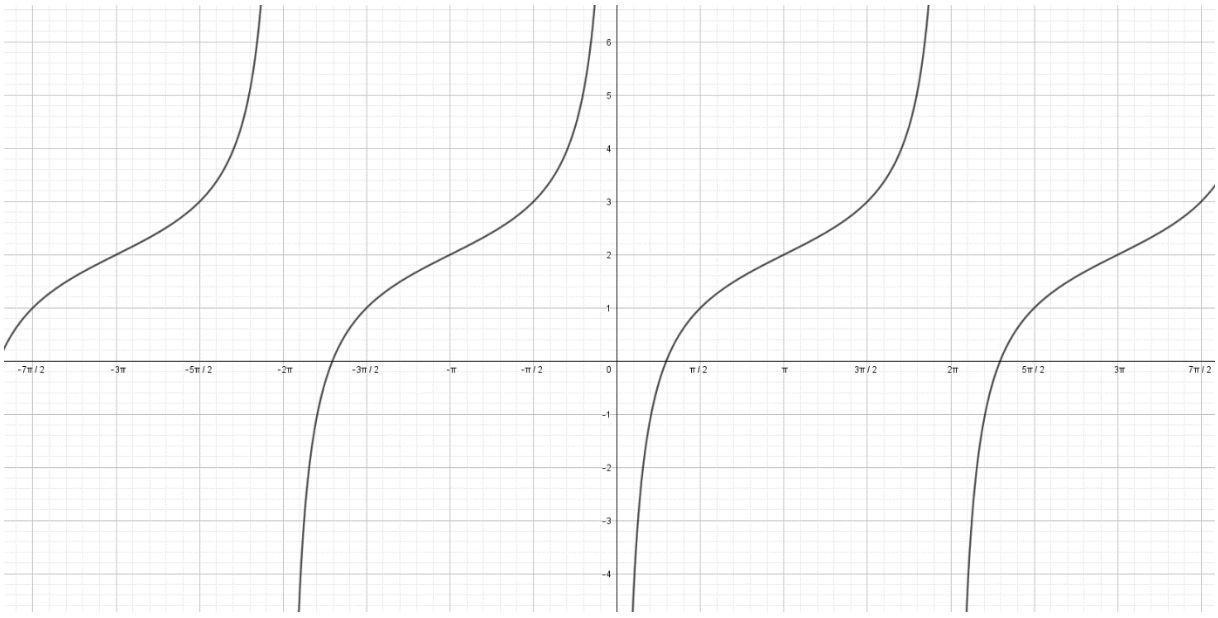


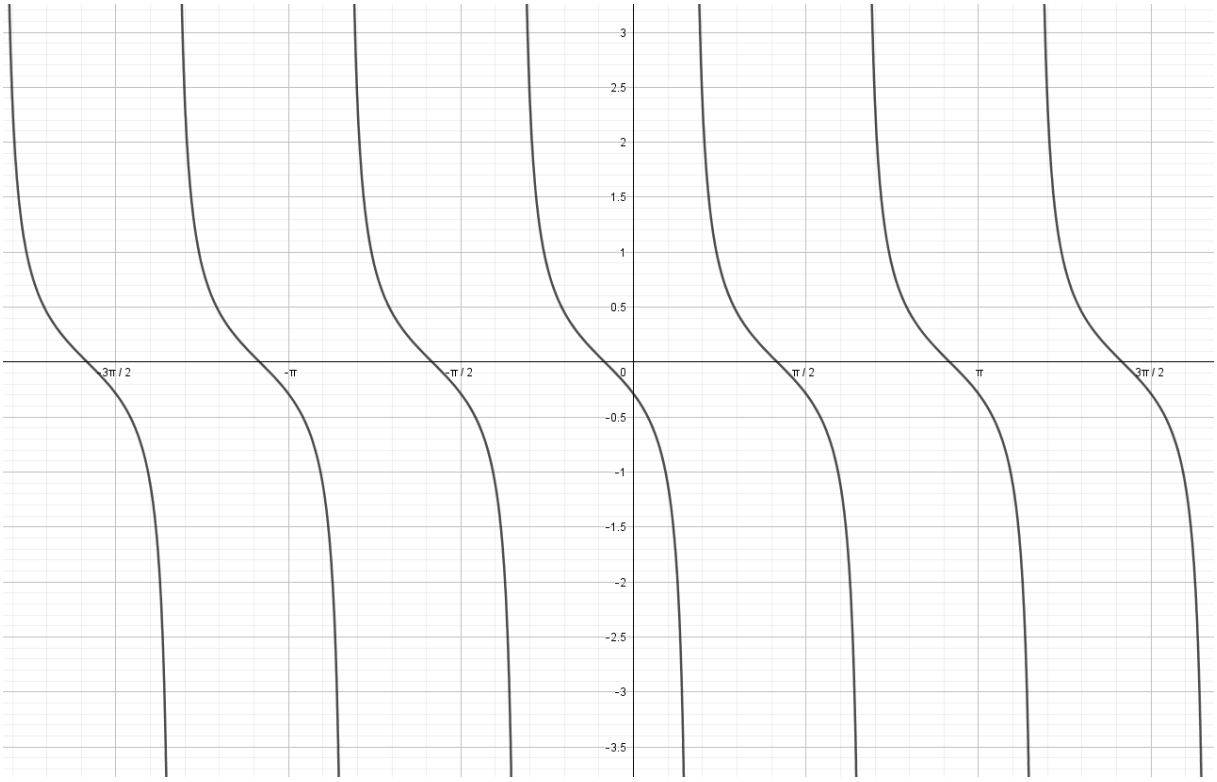
9.4.9 A megoldás:



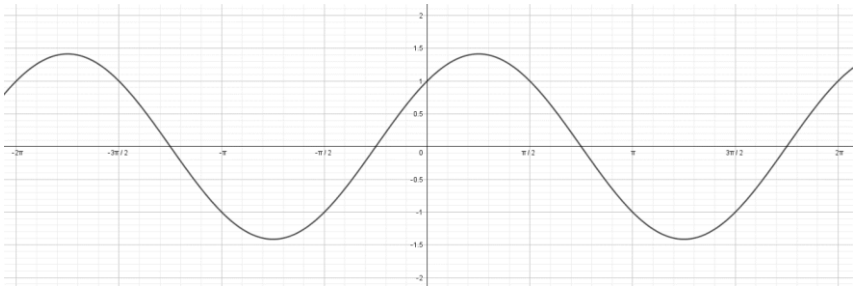


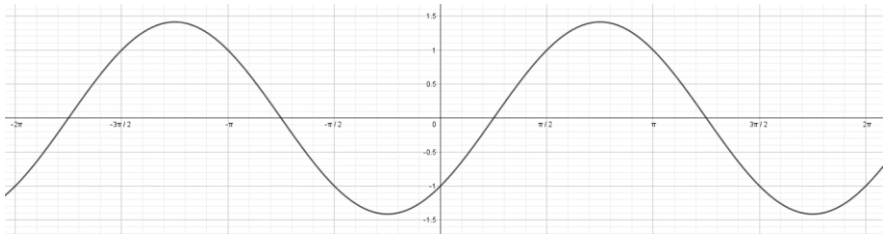
9.4.10 A megoldás:



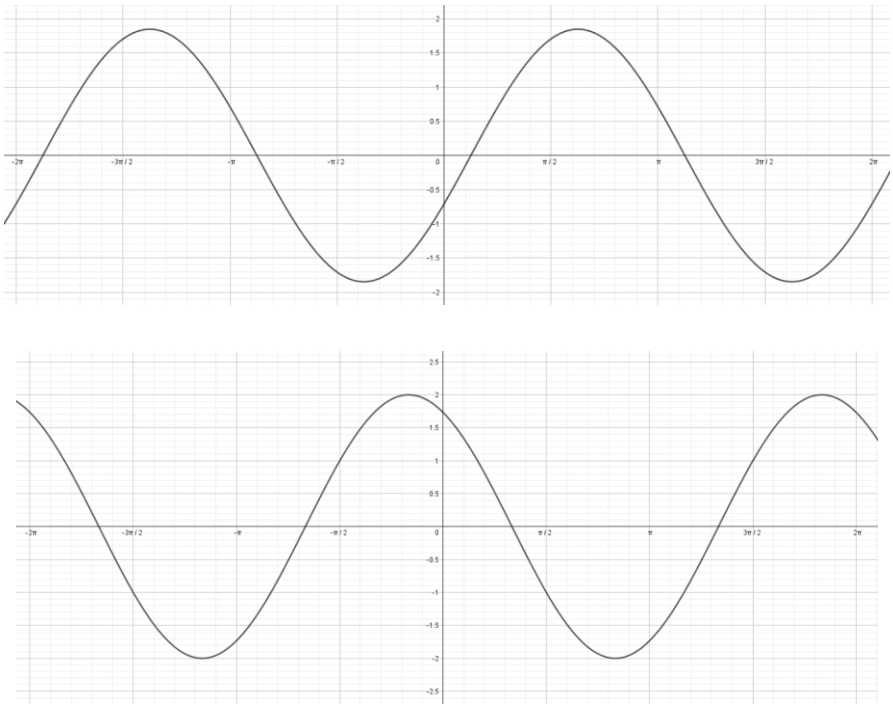


9.4.11 A megoldás:

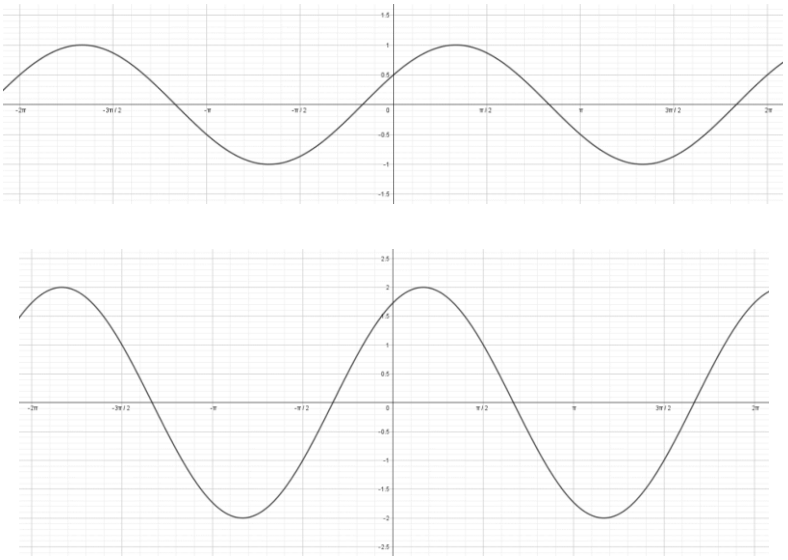




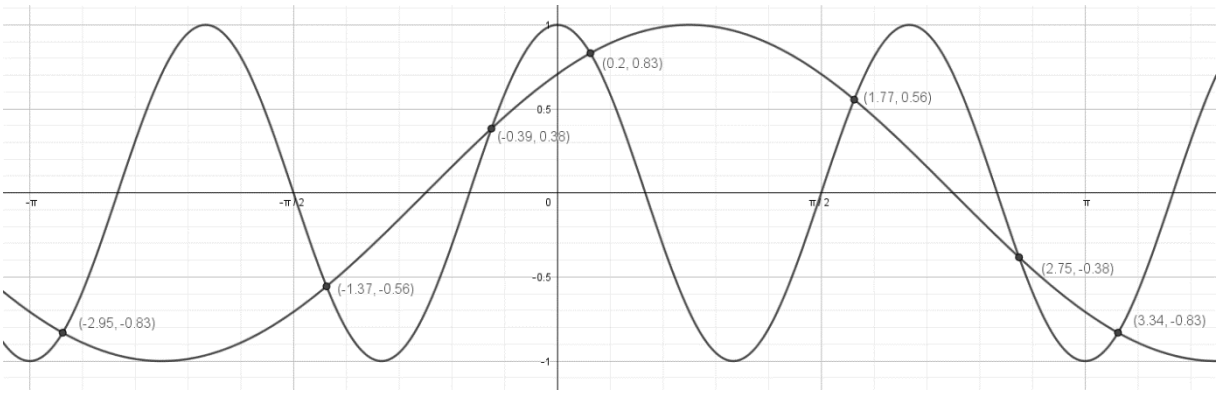
9.4.12 A megoldás:

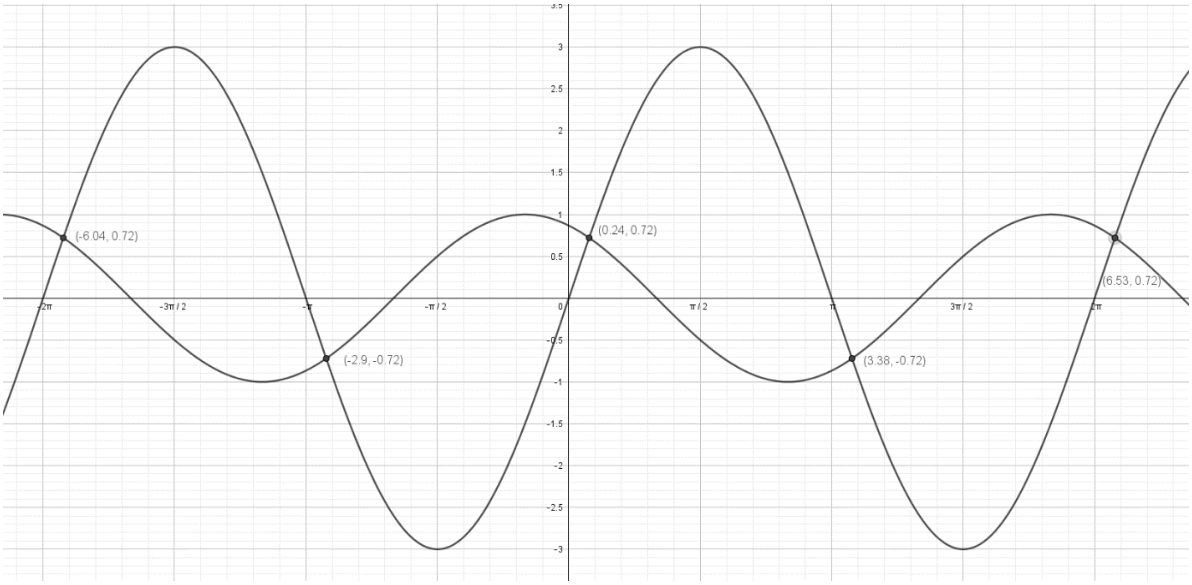


9.4.13 A megoldás:



9.4.14 A megoldás:





9.5. Összetett függvények, inverz függvények

9.5.1 A megoldás:

1. $fog = (3x-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$

2. $fog = \sqrt{\sin x}$

3. $fog = \log_2(|x| - x)$

4. $fog = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

5. $fog = (x-2)^2 + 2(x-2) = x^2 - 2x$

9.5.2 A megoldás:

1. $fog = \sqrt{\frac{1}{x}}$

2. $fog = (2x-1)^2 + 5 = 4x^2 - 4x + 6$

3. $fog = 2 - 3(x^2 - 4) = -3x^2 + 14$

4. $fog = \frac{1}{(1-2x)^2} = \frac{1}{1-4x+4x^2}$

5. $gof = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$

6. $gof = 2(x^2 + 5) - 1 = 2x^2 + 9$

7. $gof = (2 - 3x)^2 - 4 = 9x^2 - 12x$

8. $gof = 1 - 2\frac{1}{x^2} = 1 - \frac{2}{x^2}$

9.5.3 A megoldás:

1. $fof = 2 + 5(2 + 5x) = 12 + 25x$

2. $fof = (x^2 - 3)^2 - 3 = x^4 - 6x^2 + 6$

3. Az $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $fof = (x^2 - 6x + 9)^2 - 6(x^2 - 6x + 9) + 9$

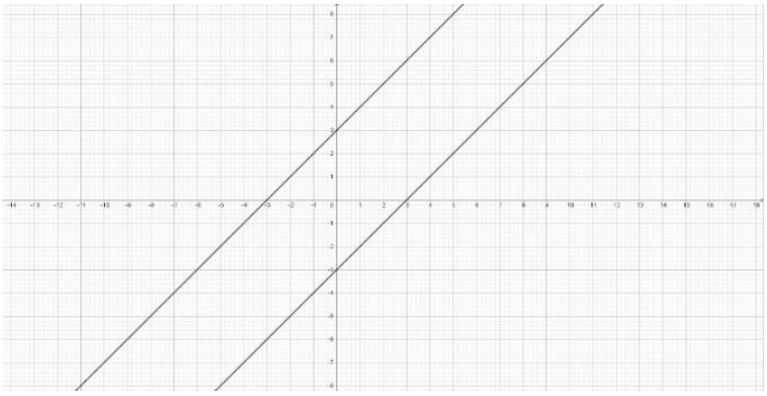
4. $fof = \sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2}$

5. $fof = \frac{2}{\frac{2}{x-3} - 3} = \frac{2x-6}{11-3x}$

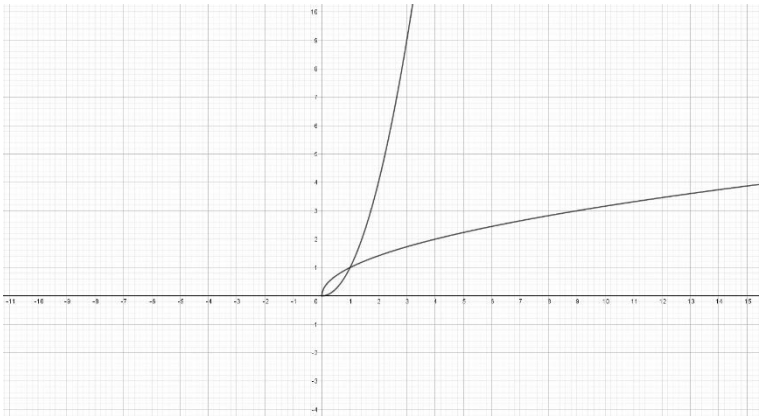
6. $fof = \sqrt{\left(\sqrt{x^3}\right)^3} = \sqrt[4]{x^9}$

9.5.4 A megoldás:

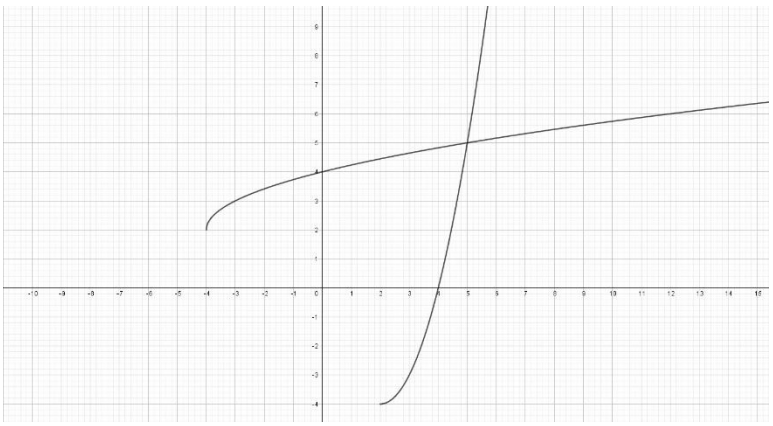
1. $f(x) = x + 3,\ f^{-1}(x) = x - 3$



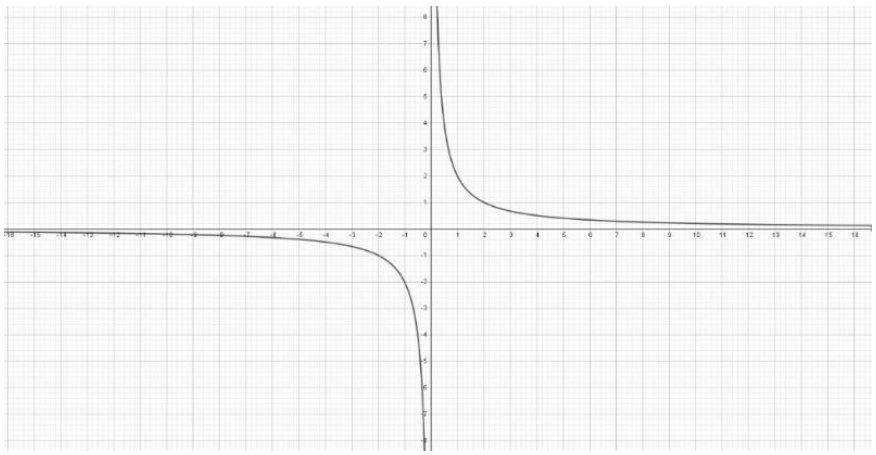
2. $f(x) = \sqrt{x},\ ahol\ x \geq 0,\ f^{-1}(x) = x^2$



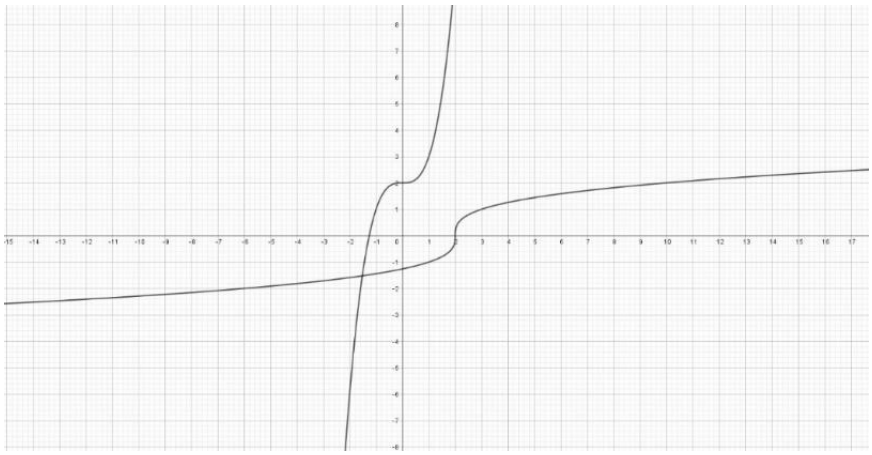
3. $f(x) = x^2 - 4x,\ ahol\ x \geq 2,\ f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 2$



4. $f(x) = \frac{2}{x},\ ahol\ x \neq 0,\ f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$

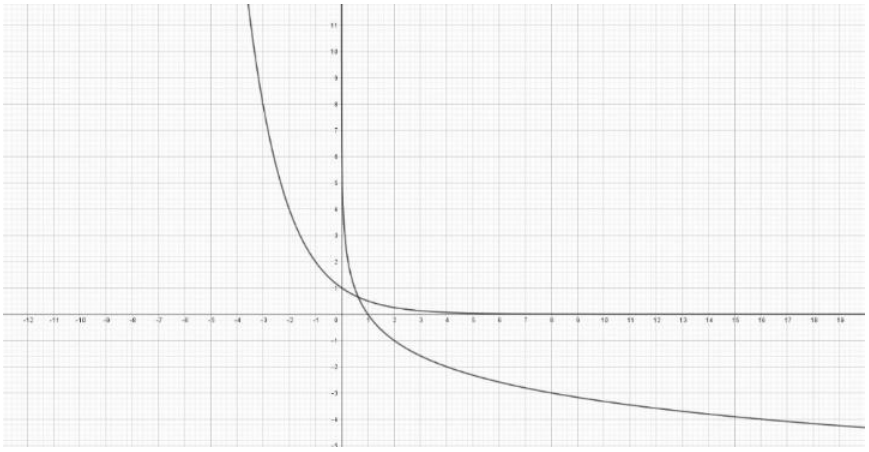


5. $f(x) = \sqrt[3]{x-2},\ f^{-1}(x) = x^3 + 2$

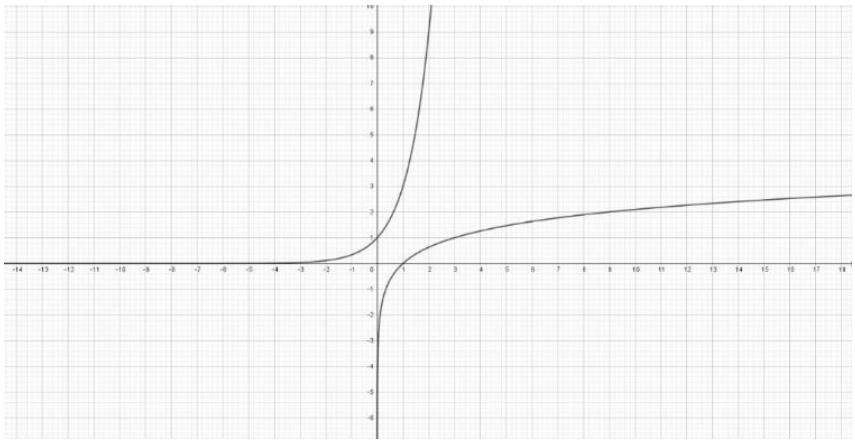


9.5.5 A megoldás:

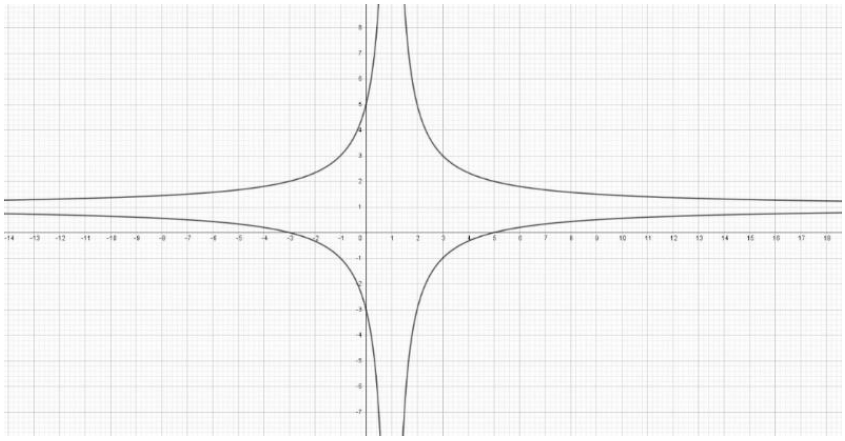
1. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



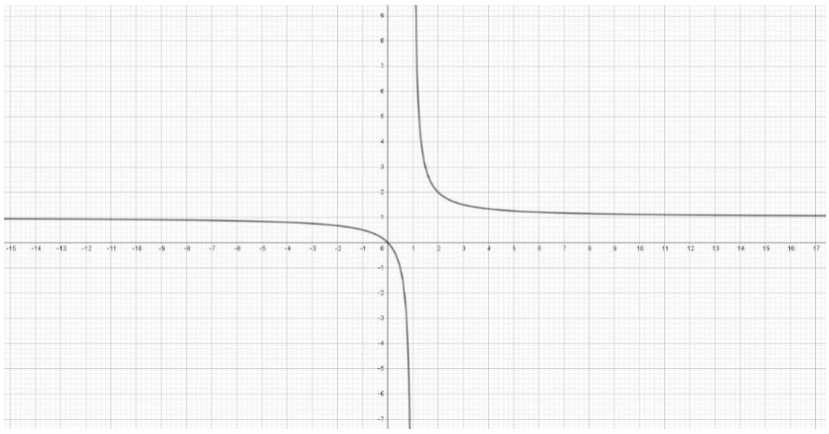
2. $f(x) = \log_3 x\,, ahol\ x > 0,\ f^{-1}(x) = 3^x$



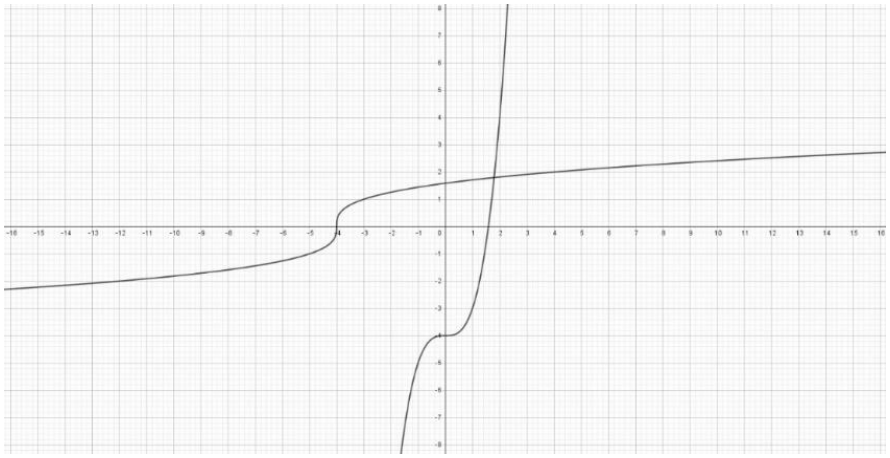
3. $f(x) = \frac{x+3}{x-1}, ahol\ x \neq 1,\ f^{-1}(x) = \frac{x-5}{x-1}$



4. $f(x) = \frac{x}{x-1}, ahol\ x \neq 1,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$



5. $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$, $f^{-1}(x) = x^3 - 4$

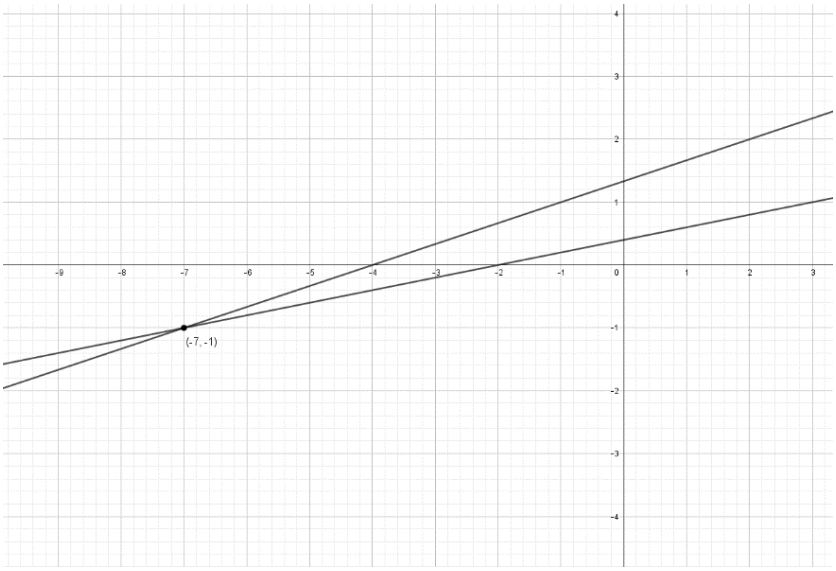


9.5.6 Ilyen az $f(x) = x$ függvény bármely leszűkítése. Az $f(x) = -x + c$, ahol c valós szám. Az $f(x) = \frac{c}{x}$, ahol c valós szám.

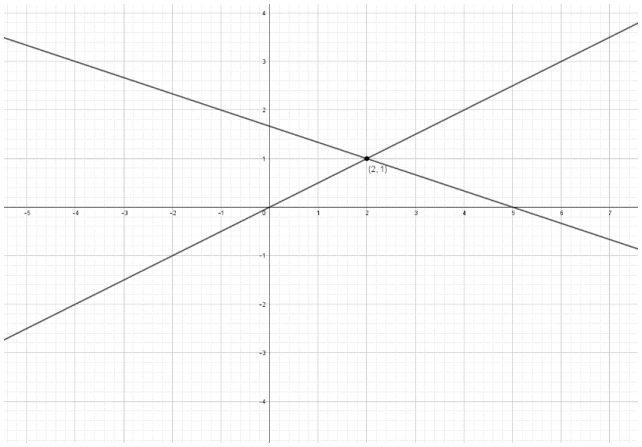
A függvények grafikonja tengelyesen tükrös az $y = x$ egyenesre.

9.6. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

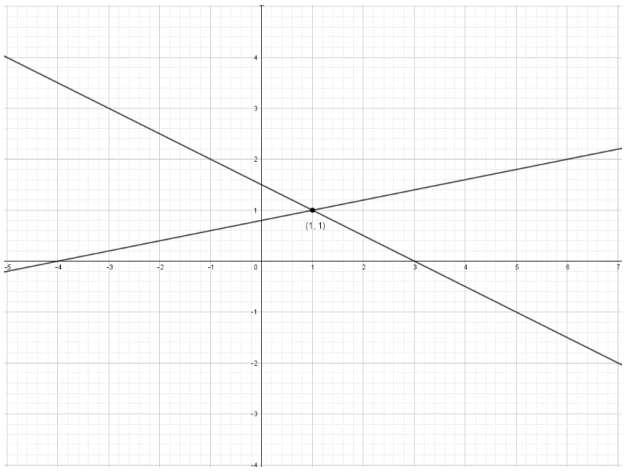
9.6.1 A megoldás: $x = -7$



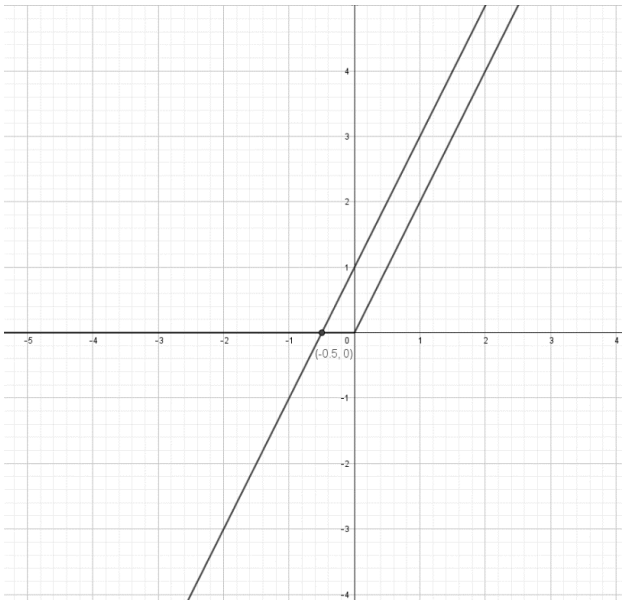
9.6.2 A megoldás: $x = 2$



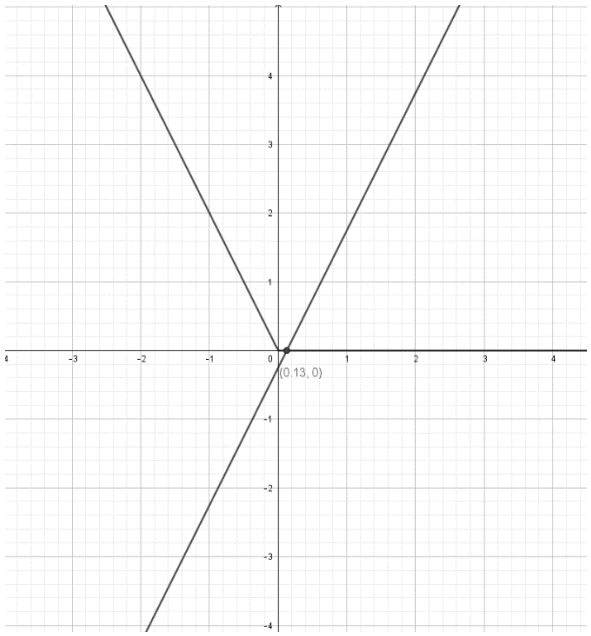
9.6.3 A megoldás: $x = 1$



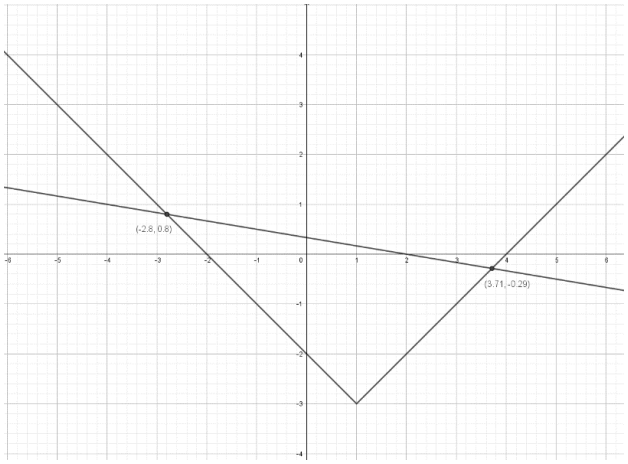
9.6.4 A megoldás:



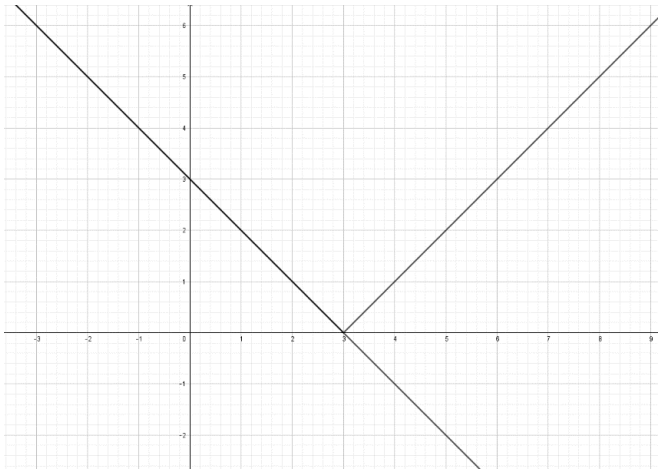
9.6.5 A megoldás: $x = 0{,}13$



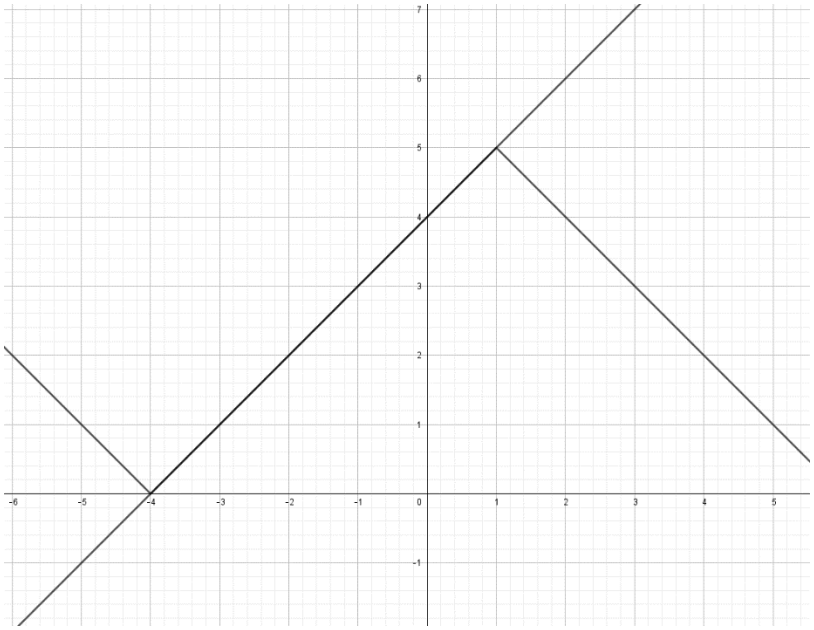
9.6.6 A megoldás: $x_1 = -2{,}8$ *és* $x_2 = 3{,}71$



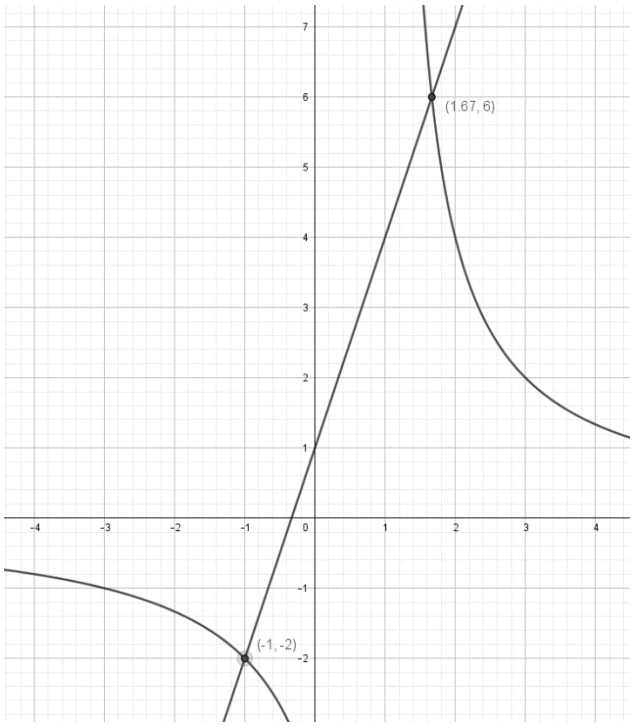
9.6.7 A megoldás: $x \leq 3$



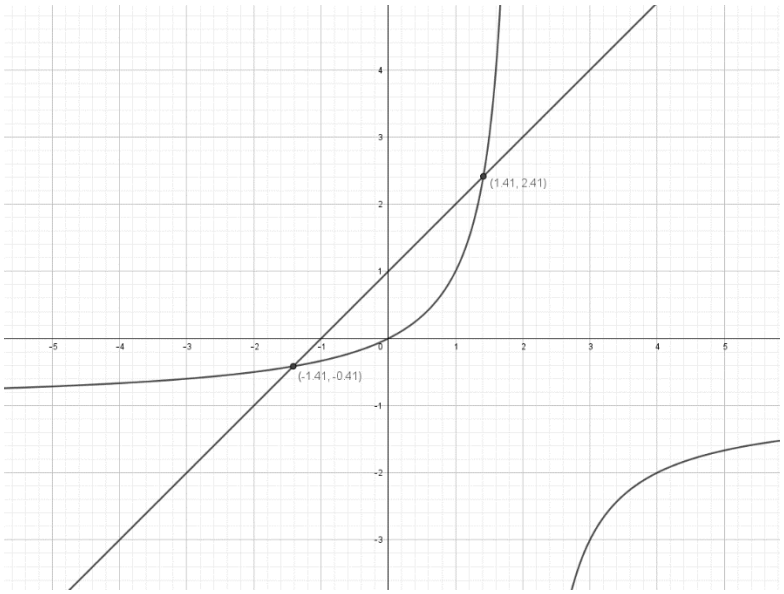
9.6.8 A megoldás: $-4 \leq x \leq 1$



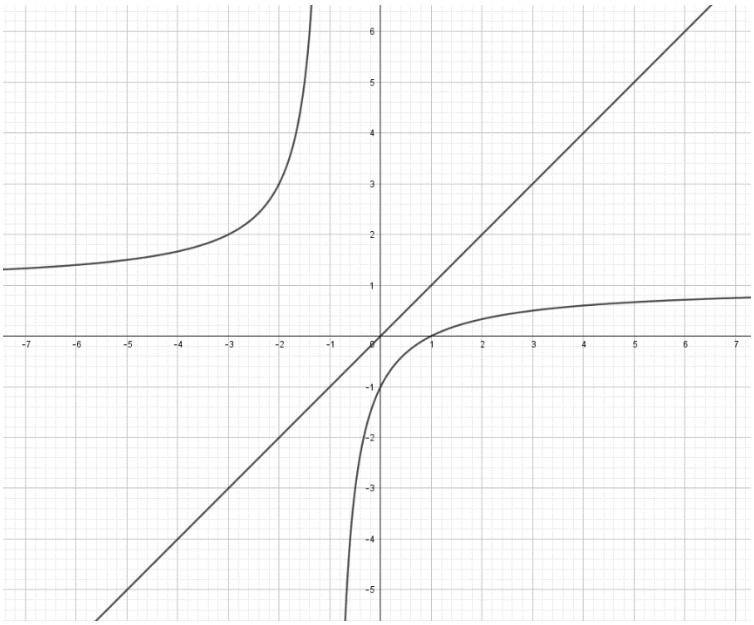
9.6.9 A megoldás: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1{,}67$



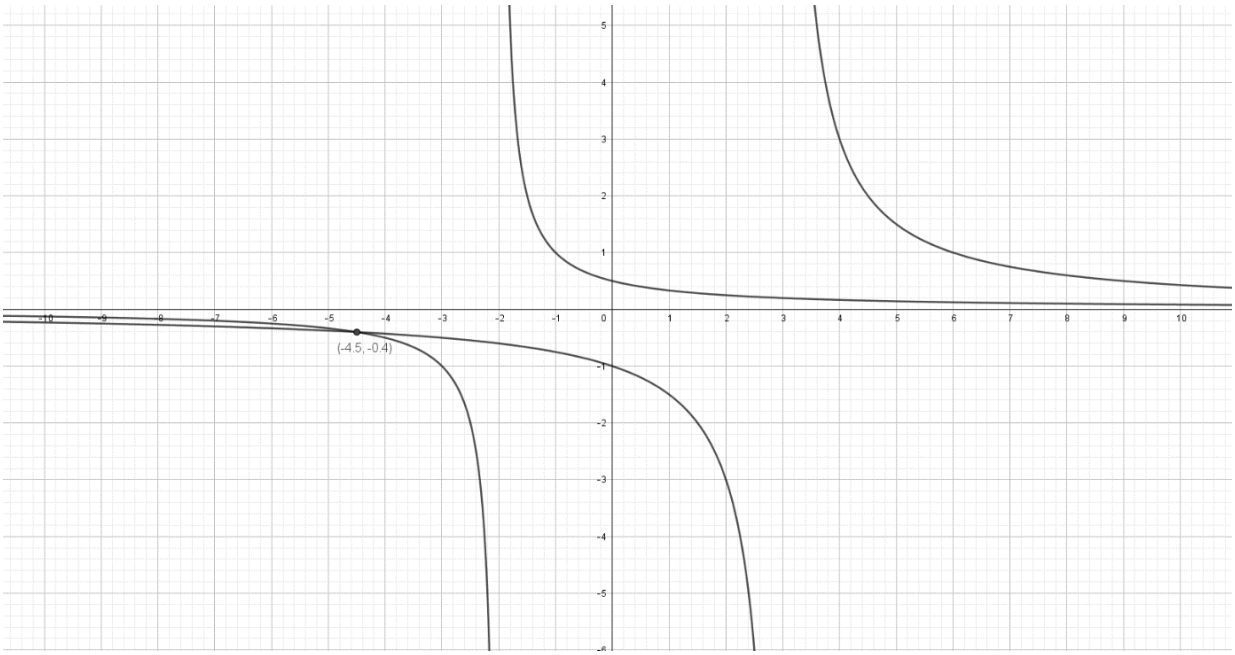
9.6.10 A megoldás: $x_1 = -1{,}41$ és $x_2 = 1{,}41$



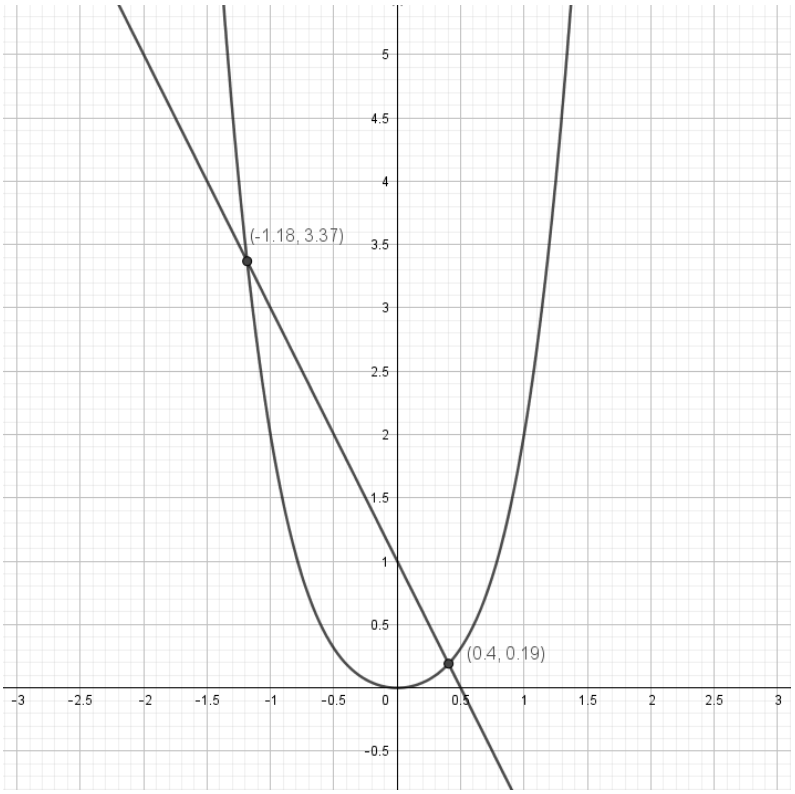
9.6.11 A megoldás: nincs megoldás



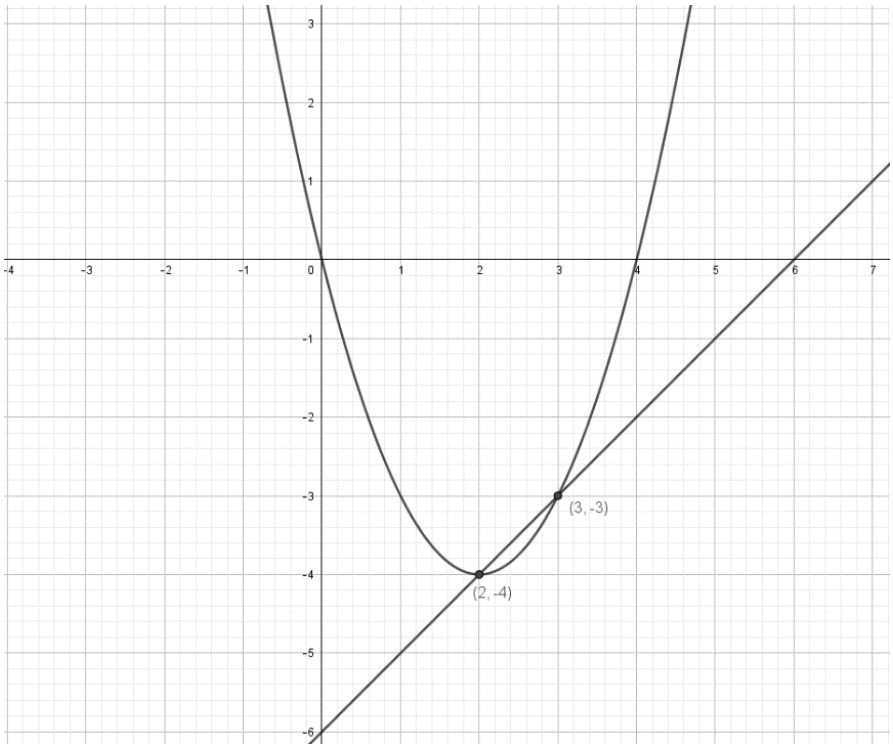
9.6.12 A megoldás: $x = -4{,}5$



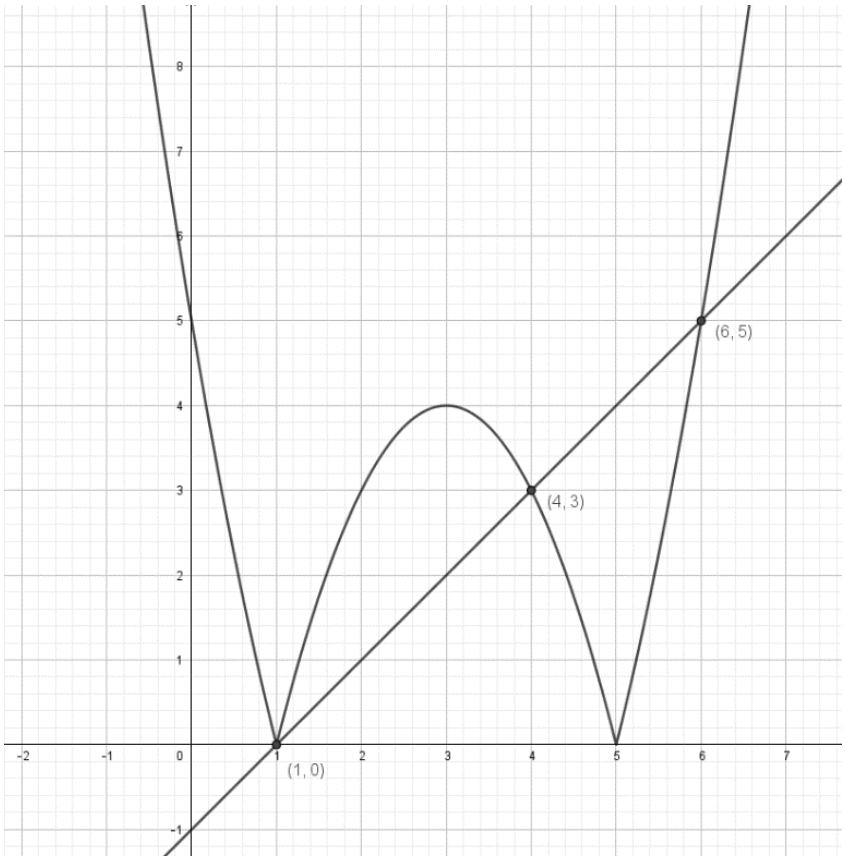
9.6.13 A megoldás: $x_1 = -1{,}18$ *és* $x_2 = 0{,}4$



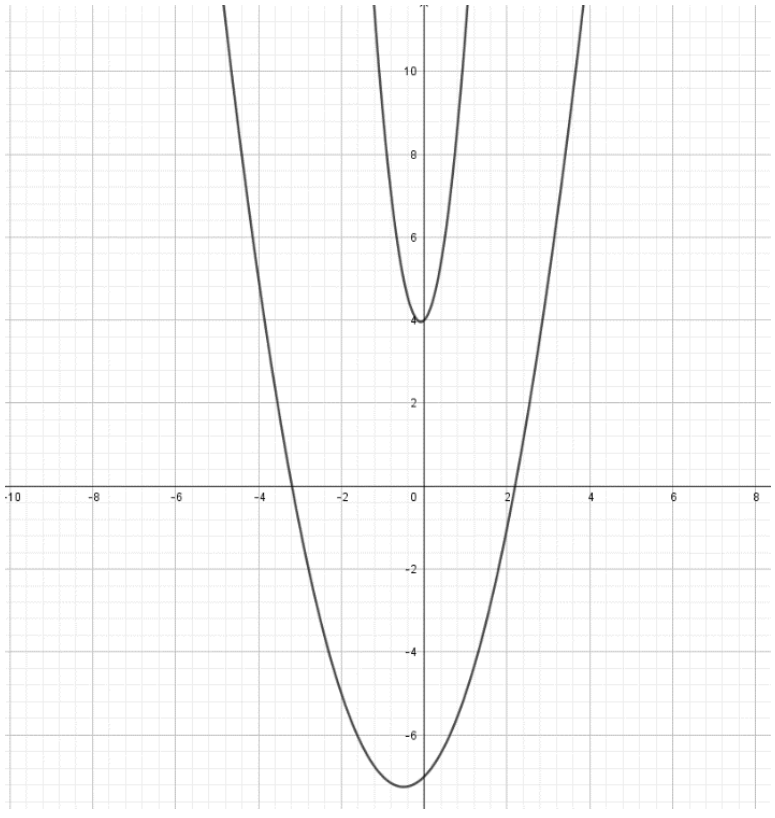
9.6.14 A megoldás: $x_1 = 2$ *és* $x_2 = 3$



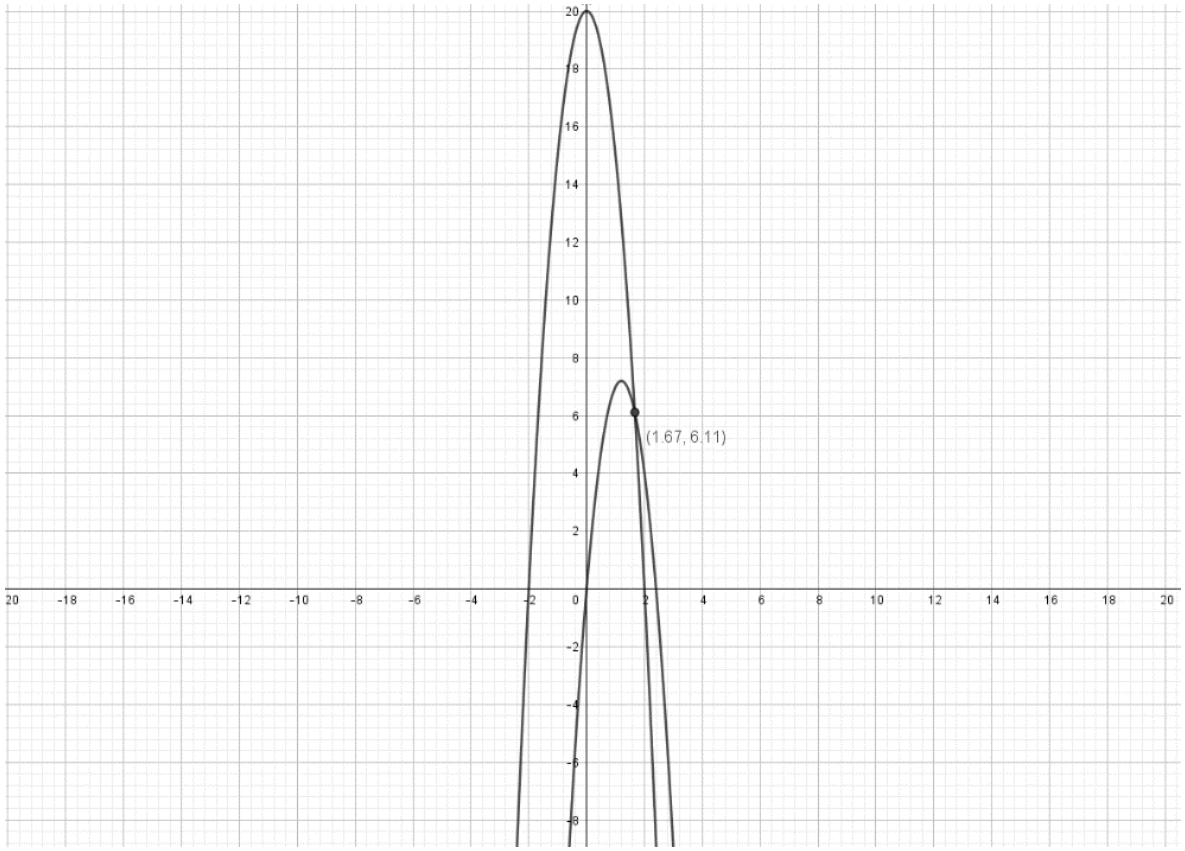
9.6.15 A megoldás: $x_1 = 1$ *és* $x_2 = 4$ *és* $x_3 = 6$



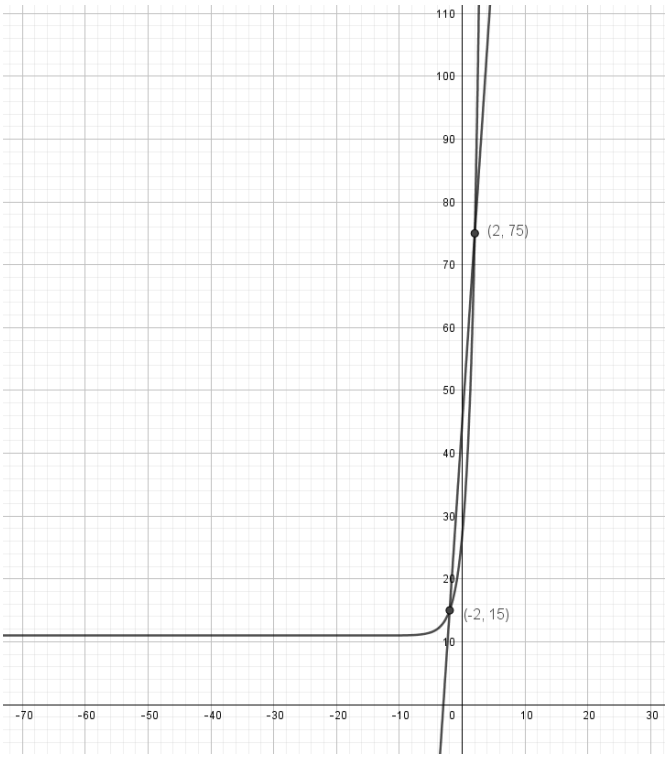
9.6.16 A megoldás: nincs megoldás



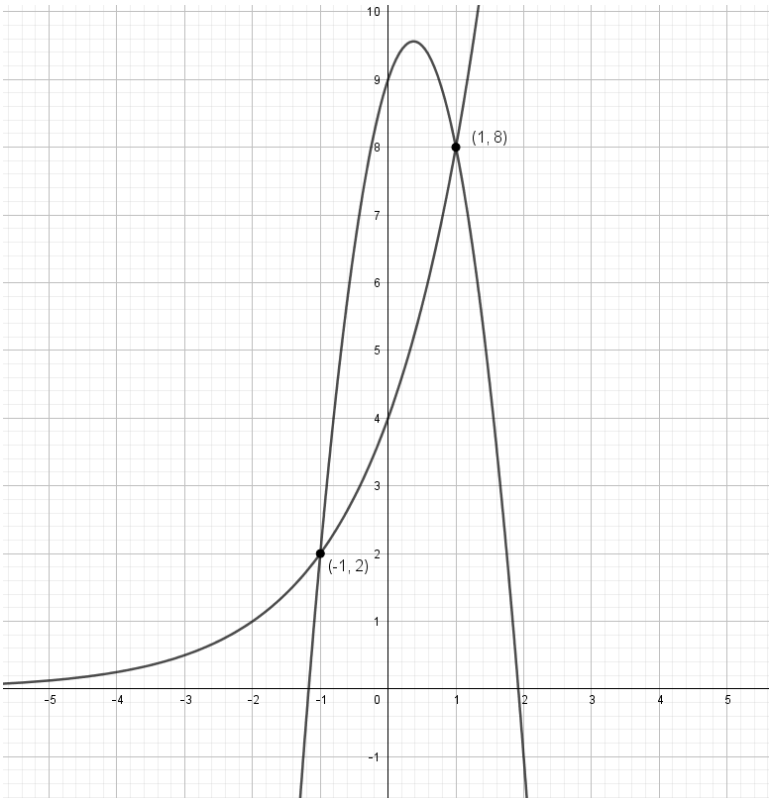
9.6.17 A megoldás: $x = 1{,}67$



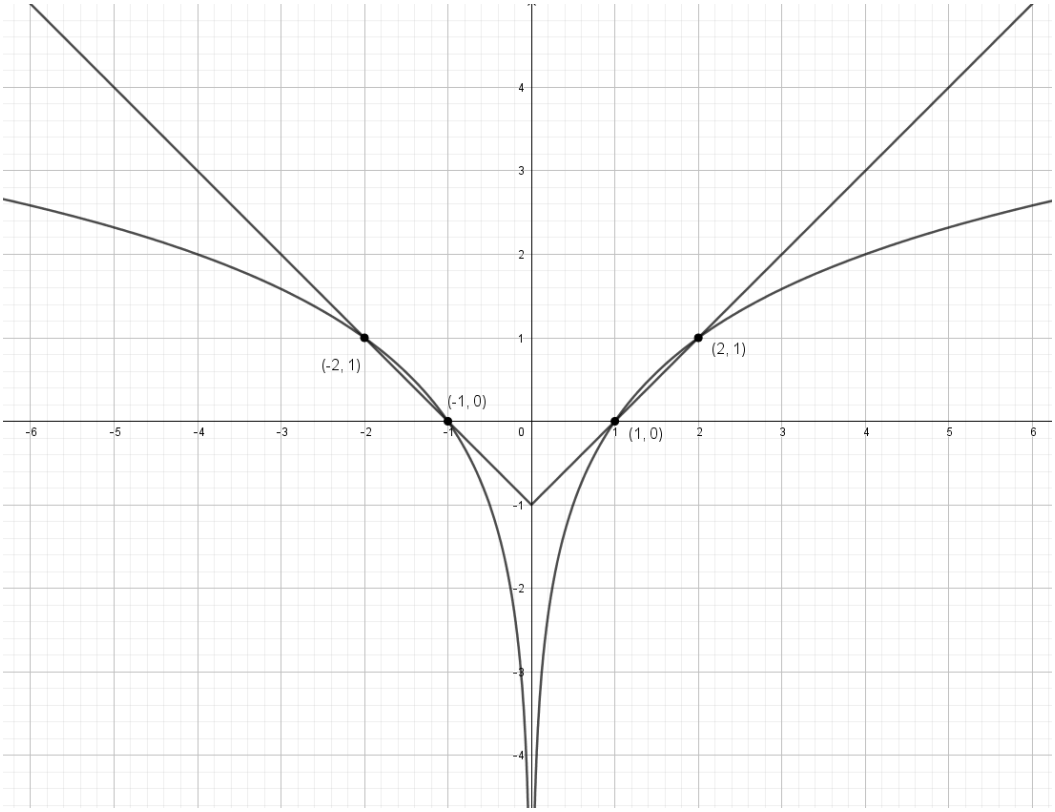
9.6.18 A megoldás: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$



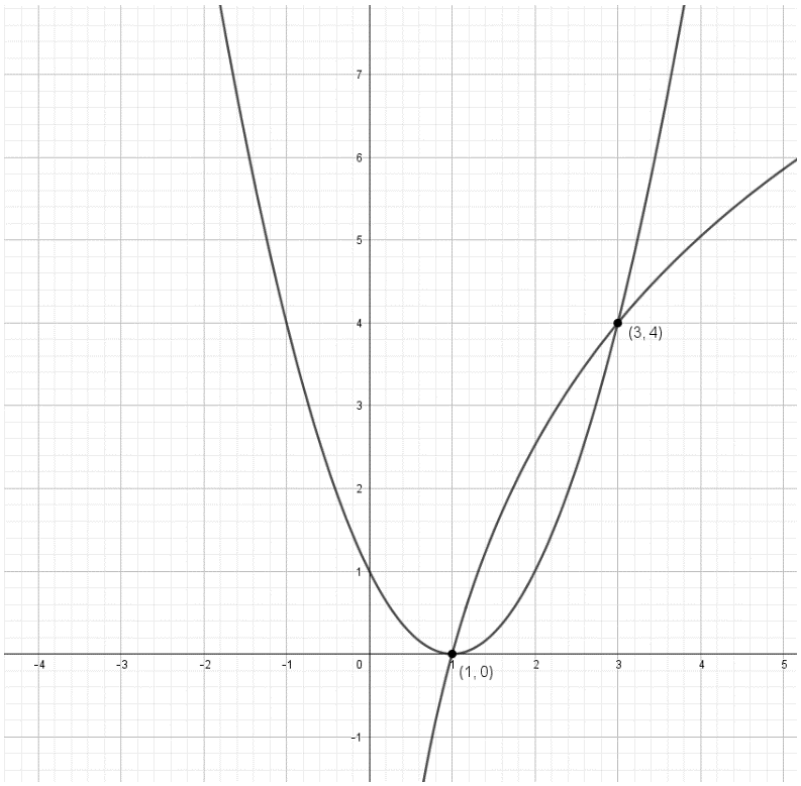
9.6.19 A megoldás: $x_1 = -1$ *és* $x_2 = 1$



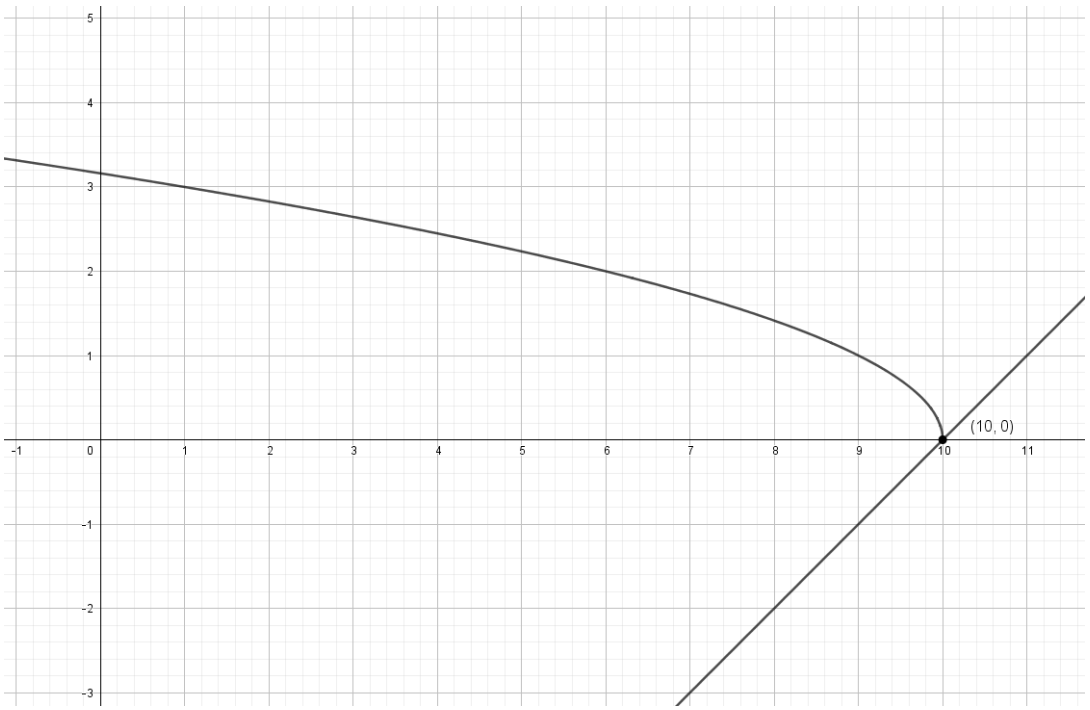
9.6.20 A megoldás: $x_1 = -2$; $x_2 = -1$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$



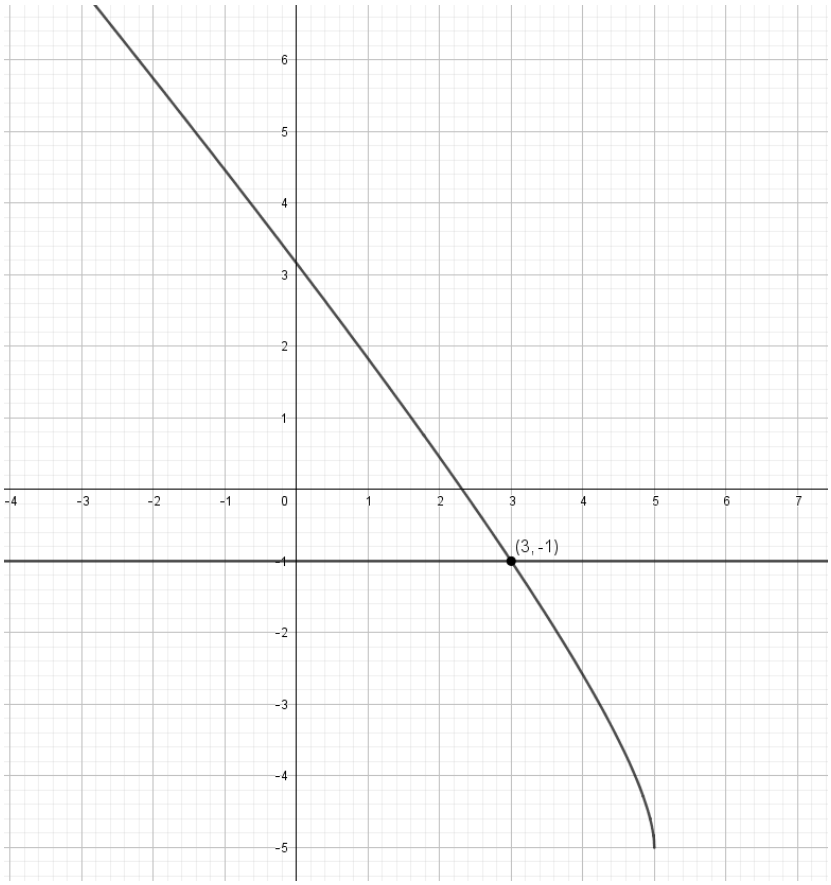
9.6.21 A megoldás: $x_1 = 1$ *és* $x_2 = 3$



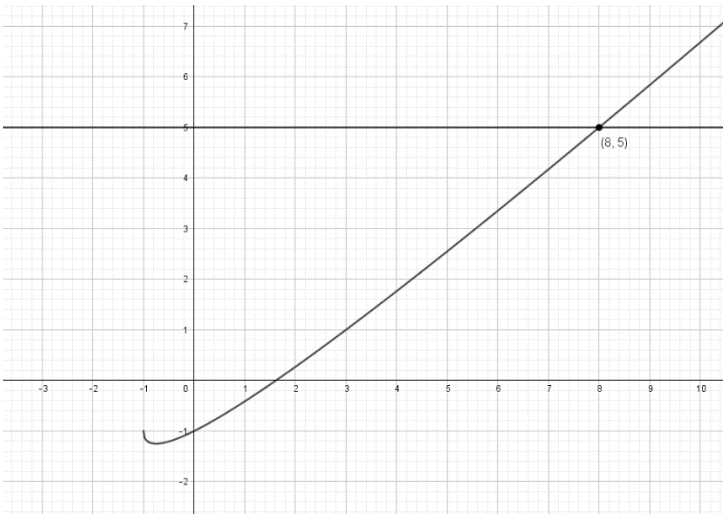
9.6.22 A megoldás: $x = 10$



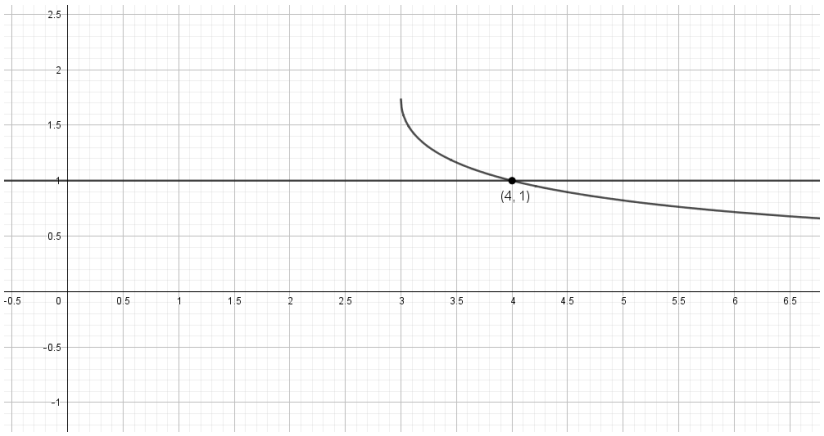
9.6.23 A megoldás: $x = 3$



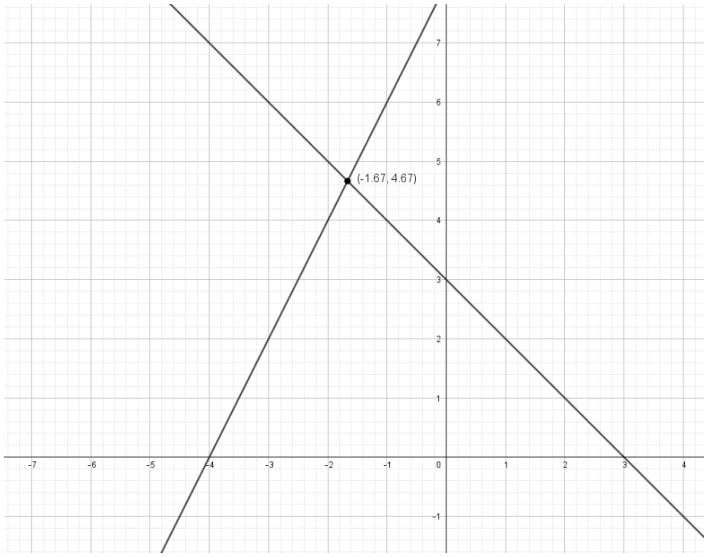
9.6.24 A megoldás: $x = 8$



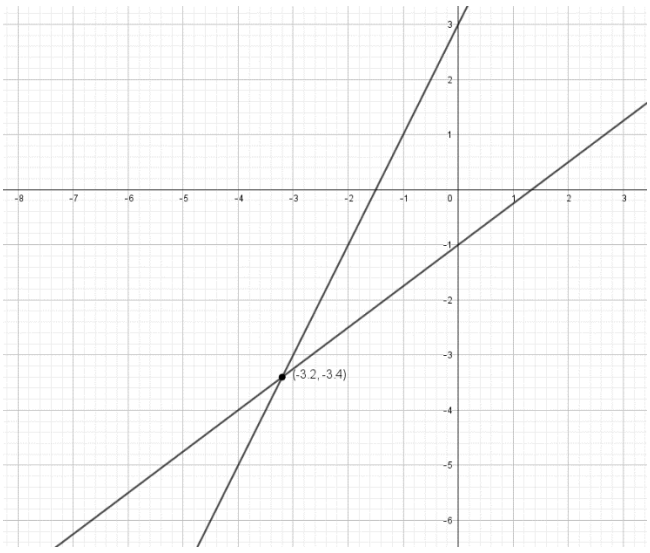
9.6.25 A megoldás: $x = 4$



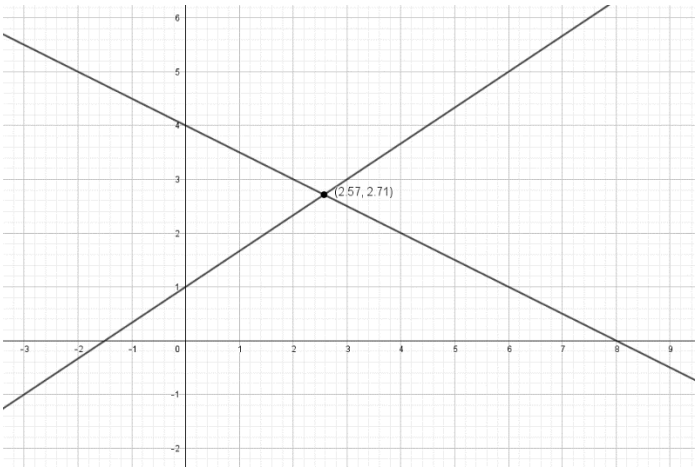
9.6.26 A megoldás: $x \leq -1{,}67$



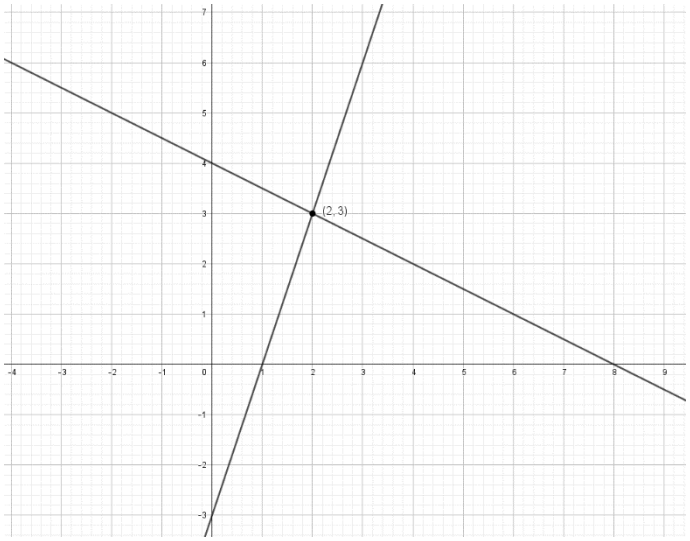
9.6.27 A megoldás: $x \leq -3{,}2$



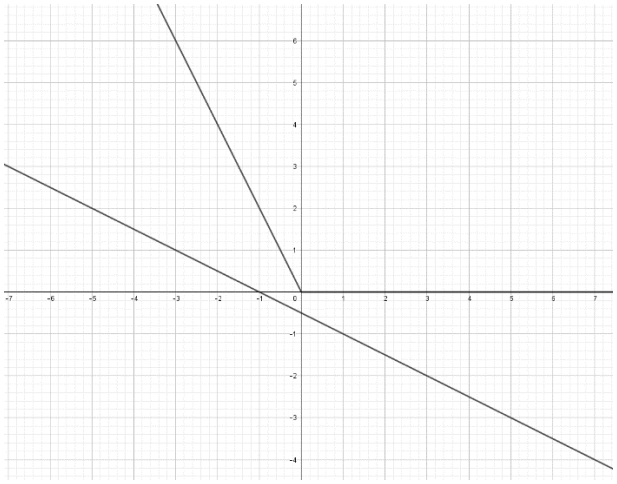
9.6.28 A megoldás: $x \leq 2{,}57$



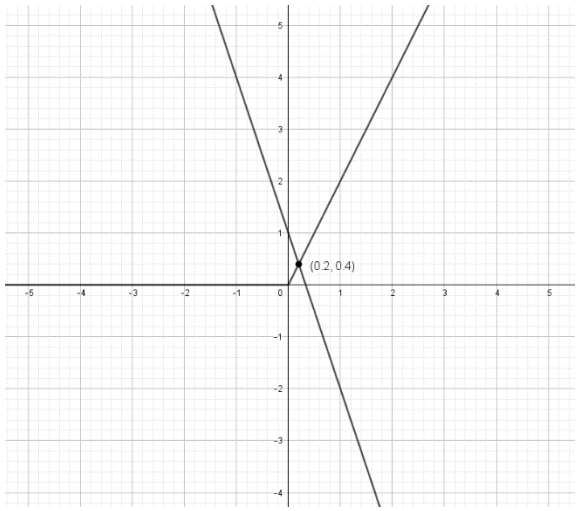
9.6.29 A megoldás: $x > 2$



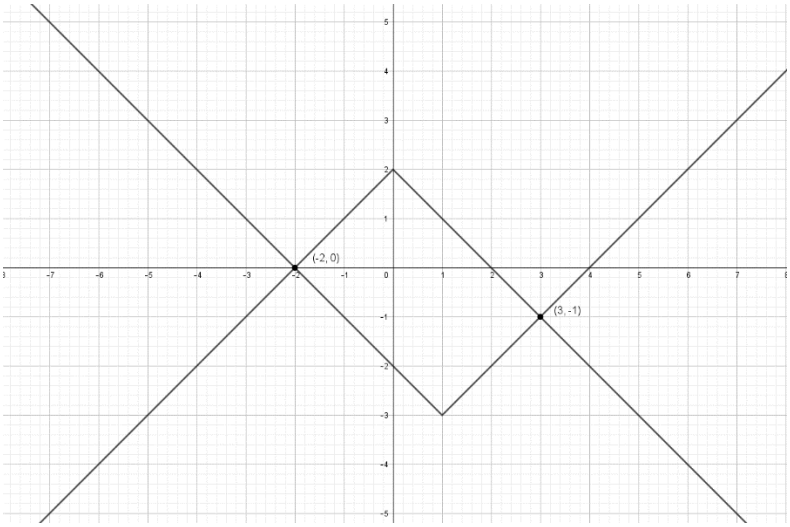
9.6.30 A megoldás: $x \in R$



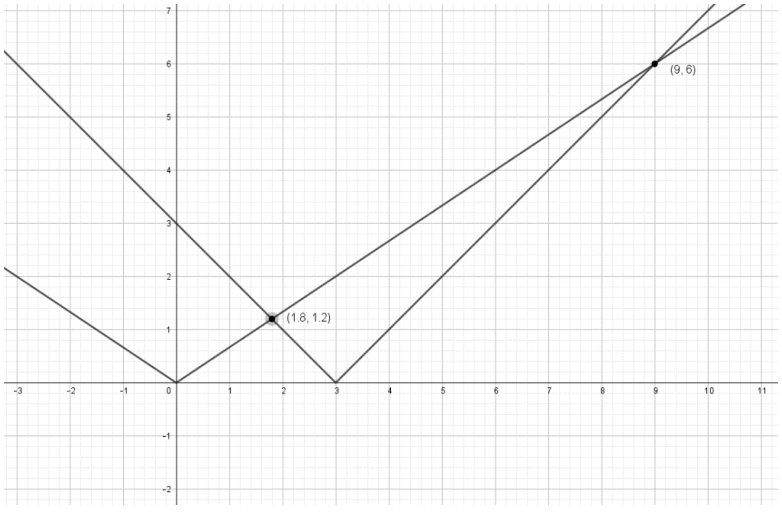
9.6.31 A megoldás: $x \leq 0{,}2$



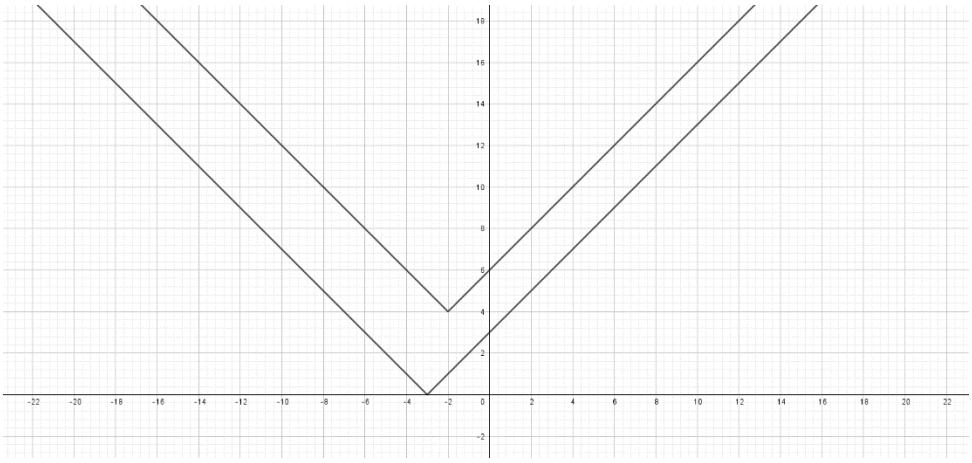
9.6.32 A megoldás: $x < -2 \; vagy \; x > 3$



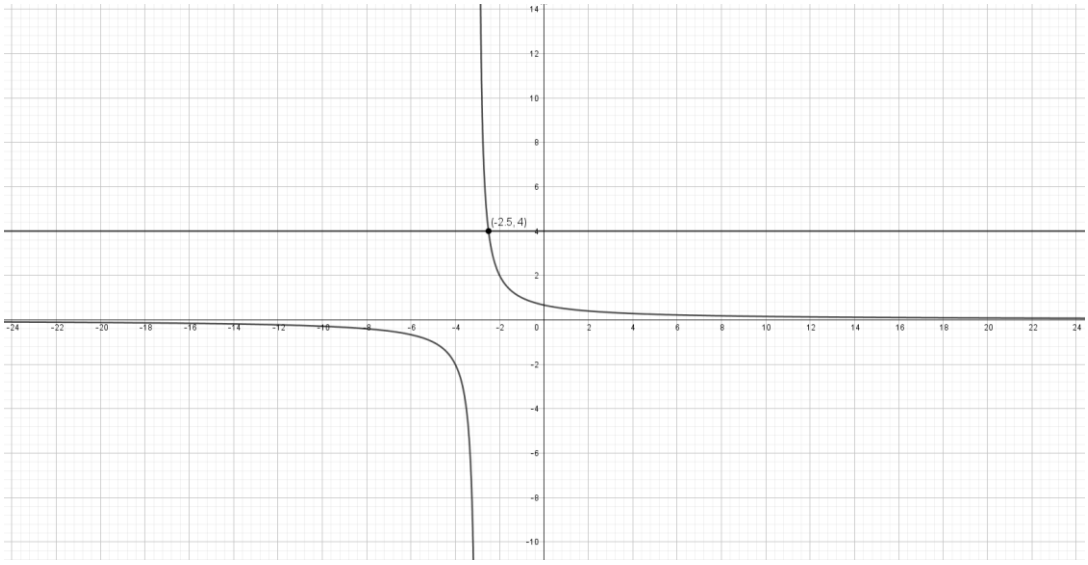
9.6.33 A megoldás: $x < 1{,}8 \; vagy \; x > 9$



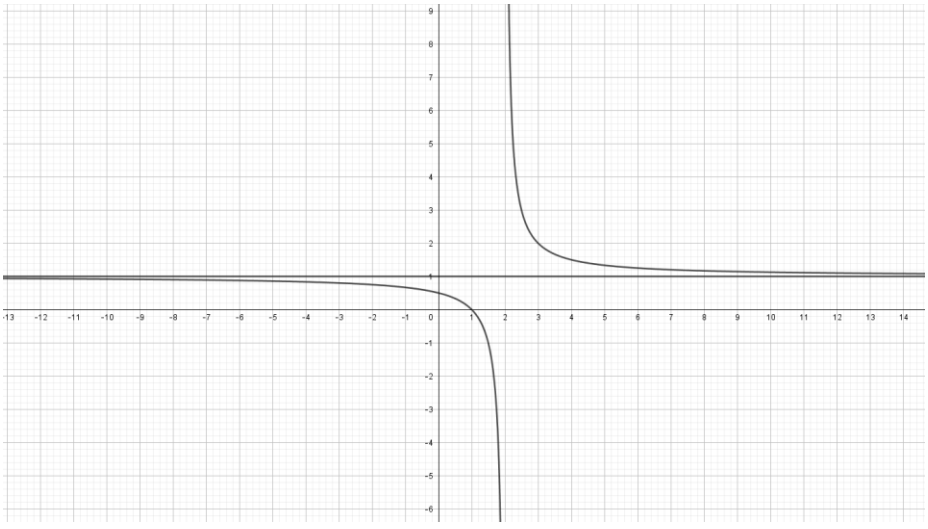
9.6.34 A megoldás: $x \in R$



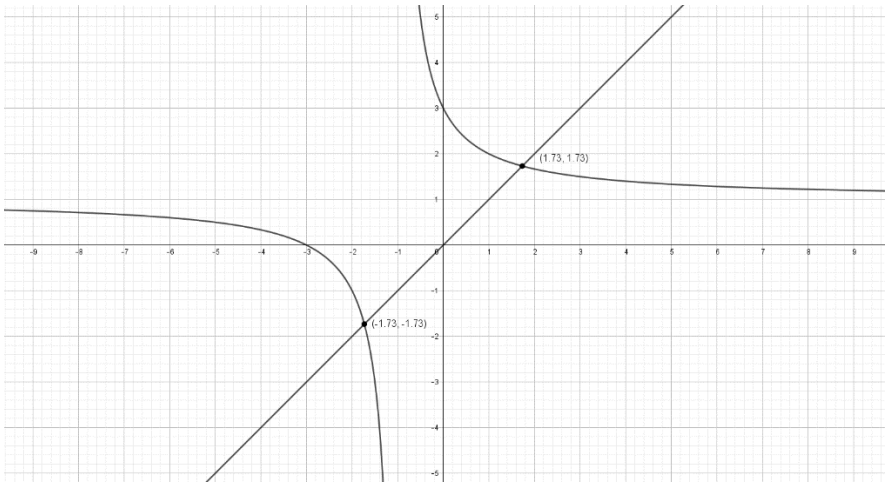
9.6.35 A megoldás: $x < -3 \; vagy \; x > -2{,}5$



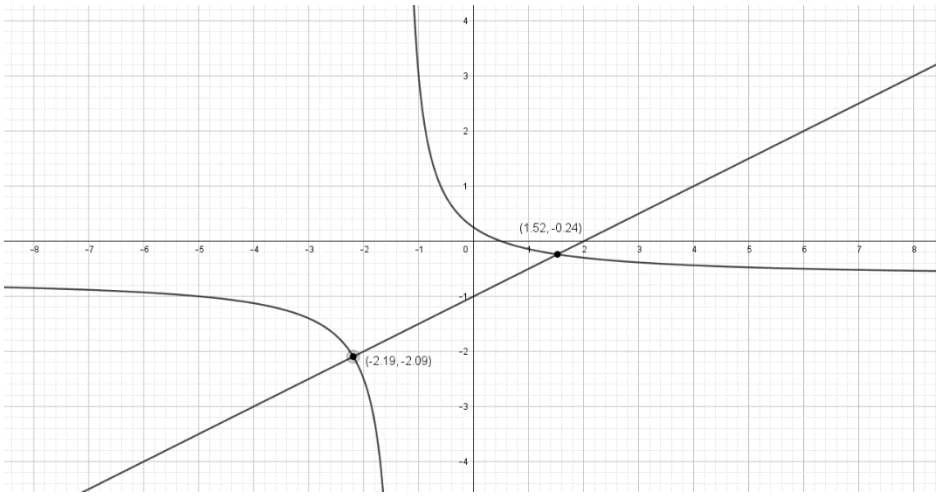
9.6.36 A megoldás: $x < 2$



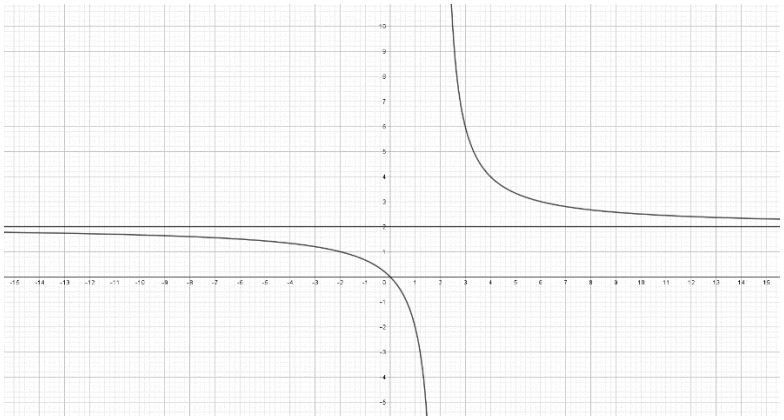
9.6.37 A megoldás: $x \leq -1{,}73$ és $-1 < x \leq 1{,}73$



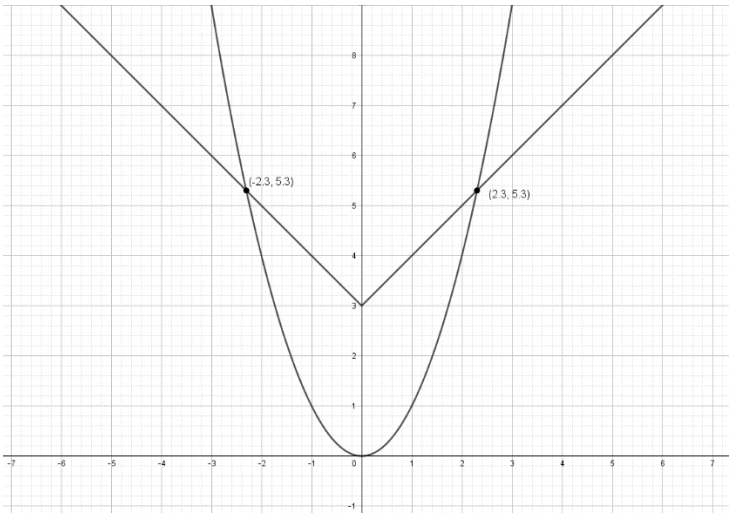
9.6.38 A megoldás: $x < -2{,}19$ és $-\frac{4}{3} < x < 1{,}52$



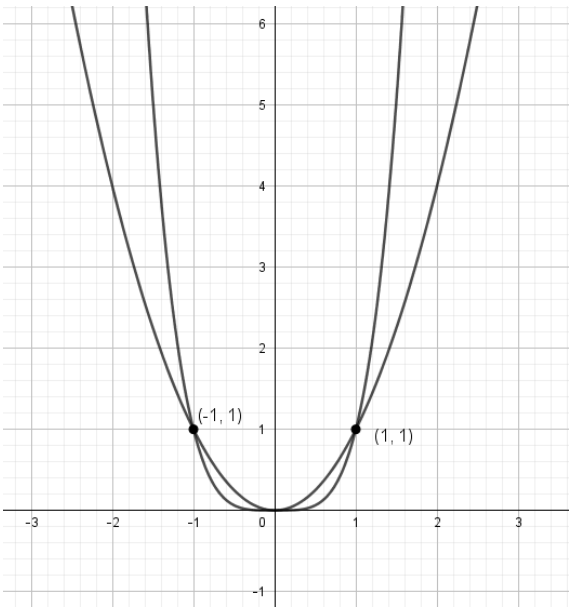
9.6.39 A megoldás: $x \leq 2$



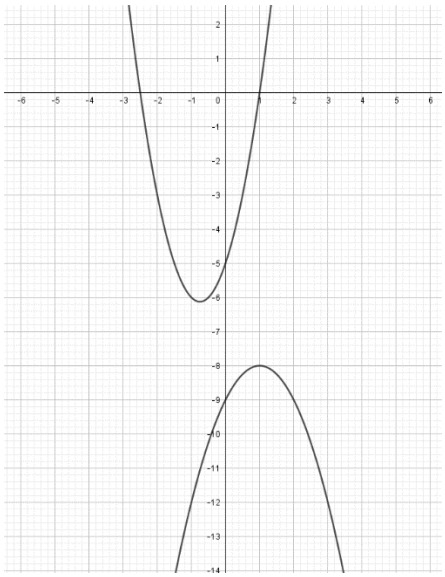
9.6.40 A megoldás: $x < -2{,}3 \; vagy \; x > 2{,}3$



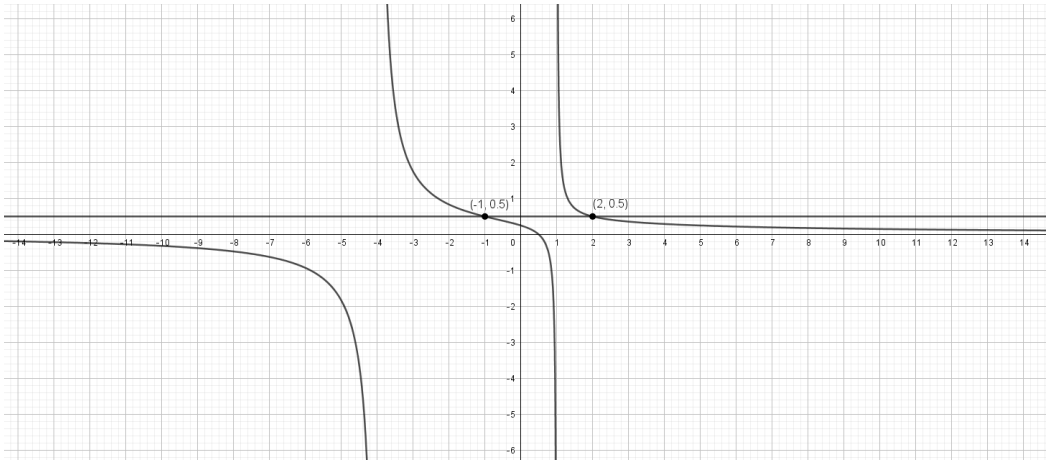
9.6.41 A megoldás: $x < -1$ és $x > 1$



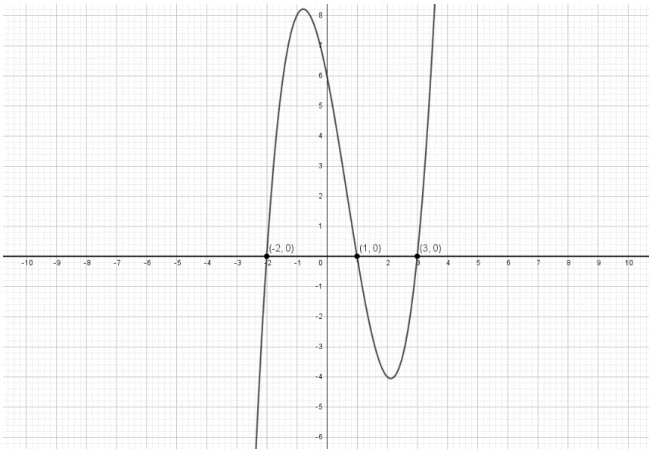
9.6.42 A megoldás: nincs megoldás



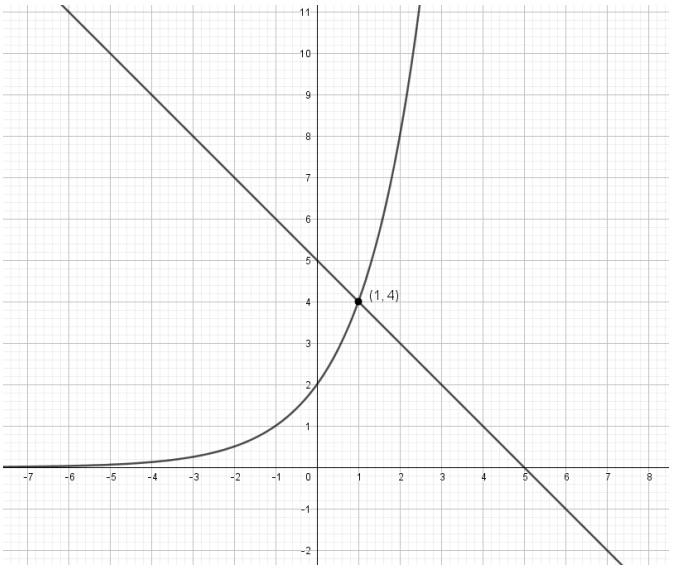
9.6.43 A megoldás: $x < -4\ vagy - 1 < x < 1\ vagy\ x > 2$



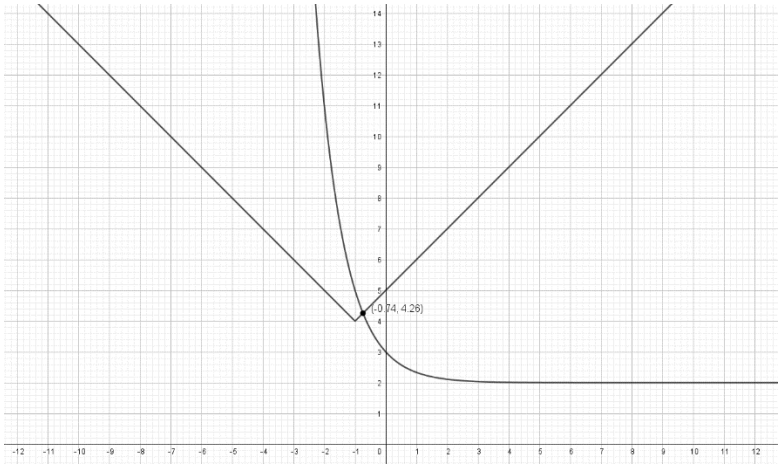
9.6.44 A megoldás: $-2 < x < 1\ vagy\ x > 3$



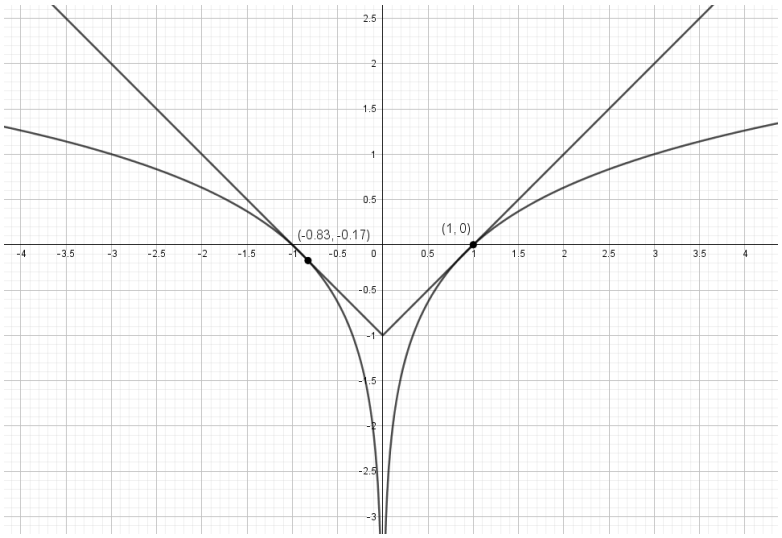
9.6.45 A megoldás: $x \leq 1$



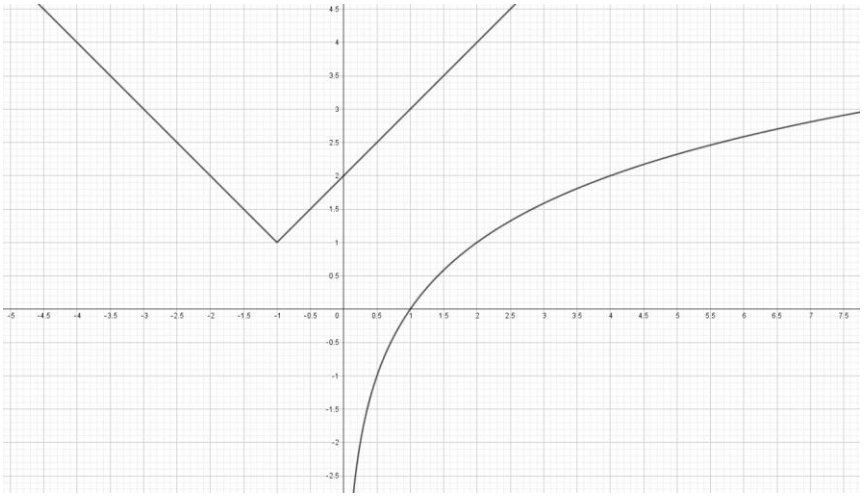
9.6.46 A megoldás: $x > -0{,}74$



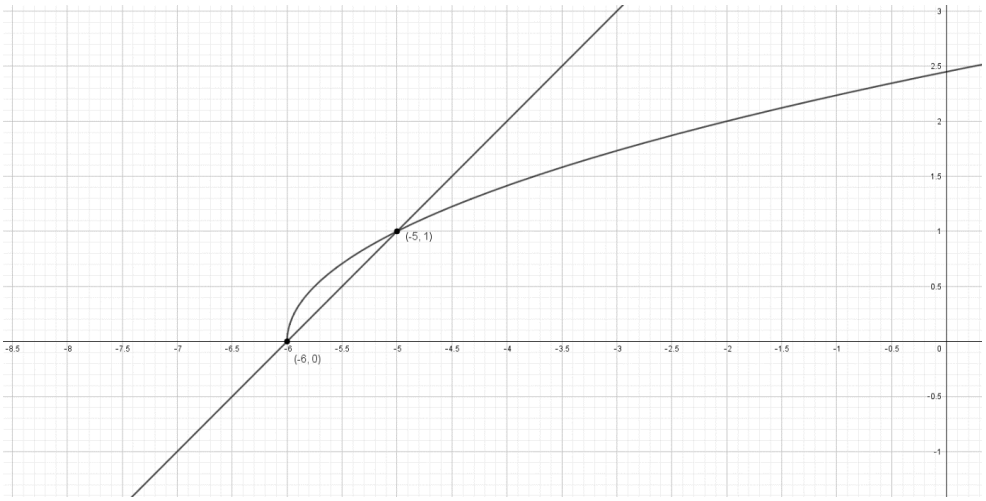
9.6.47 A megoldás: $x \in R$



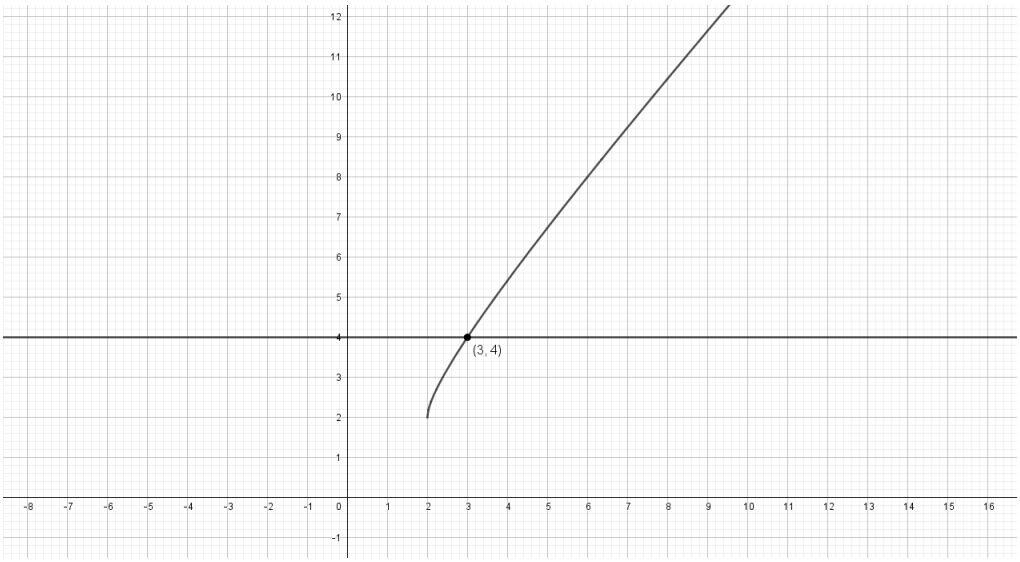
9.6.48 A megoldás: nincs megoldás



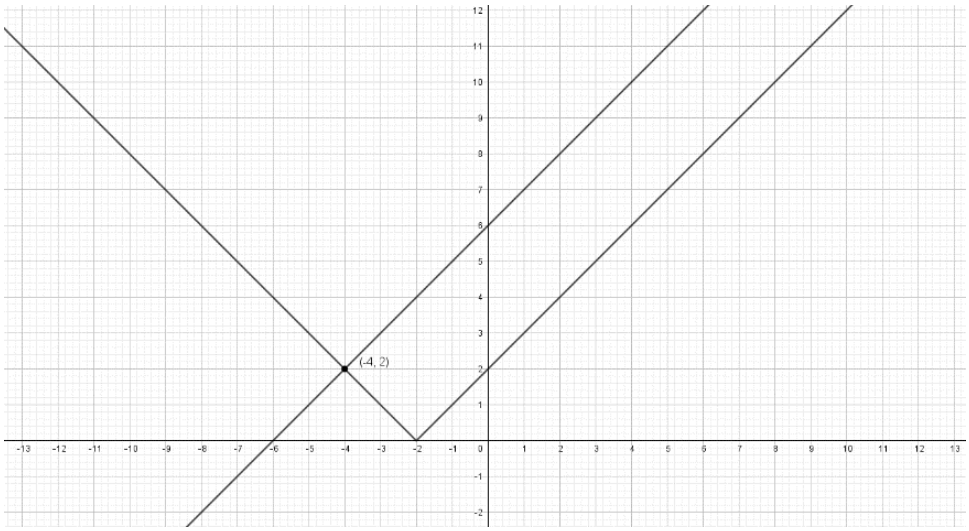
9.6.49 A megoldás: $-6 < x < -5$



9.6.50 A megoldás: $x > 3$



9.6.51 A megoldás: $x > -4$



9.7. Függvények jellemzése

9.7.1 A megoldás:

1. $x \neq \pm 1, x \epsilon R$

2. $x \neq 6, x \neq 0, x \epsilon R$

3. $x \neq 0, x \neq 1, x \neq 3, x \epsilon R$

9.7.2 A megoldás:

1. $x < -3 \; vagy \; x > 3, x \epsilon R$

2. $x < -5 \; vagy \; x > 5, x \epsilon R$

3. $-1 \leq x \leq 1, x \neq 0, x \epsilon R$

9.7.3 A megoldás:

1. $x > -1, x \neq 0, x \epsilon R$

2. $x \geq 2, x \epsilon R$

3. $-1 \leq x, x \neq 0, x \epsilon R$

9.7.4 A megoldás:

1. $-4 \leq x < -\pi \; vagy \; 0 < x < \frac{\pi}{2} \; vagy \; \frac{\pi}{2} < x < \pi, x \epsilon R$

2. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$

3. $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$

9.7.5 A megoldás:

1. $0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$

2. $0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$

3. $x > -3$ és $0 + k2\pi < x < \pi + k2\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$

9.7.6 A megoldás:

1. $-\frac{9}{2} \leq y \leq -\frac{7}{2}, y \epsilon R$

2. $y < 0, y \epsilon R$

9.7.7 A megoldás:

1. Ha $x < 2$, akkor szig. mon. csökkenő. Ha $x > 2$, akkor szig. mon. nő.

2. Ha $x < -1$, akkor szig. mon. nő. Ha $x > -1$, akkor szig. mon. csökkenő.

9.7.8 A megoldás:

1. Ha $x < -3$, akkor szig. mon. nő. Ha $x > -3$, akkor szig. mon. csökkenő.

2. Ha $x < 2\ vagy\ 3 < x$, akkor szig. mon. csökkenő. Ha $2 < x < 3$, akkor szig. mon. nő.

3. Ha $x < -3\ vagy\ -3 < x < 0$, akkor szig. mon. nő.

Ha $0 < x < 3\ vagy\ 3 < x$, akkor szig. mon. csökkenő.

9.7.9 A megoldás:

1. Igaz 2. Igaz 3. Hamis 4. Igaz 5. Igaz 6. Igaz 7. Igaz

9.7.10 A megoldás:

1. páros 2. páratlan 3. nem páros és nem páratlan 4. páros 5. nem páros és nem páratlan

6. páros

9.7.11 A megoldás:

1. páros 2. páratlan 3. páros 4. páratlan 5. nem páros és nem páratlan

6. nem páros és nem páratlan

9.7.12 A megoldás:

1. páros 2. páratlan 3. páros 4. páros 5. páratlan 6. páratlan

9.7.13 A megoldás:

1. páratlan 2. páros 3. páratlan 4. nem páros és nem páratlan 5. páratlan

9.7.14 A megoldás:

1. nem páros és nem páratlan 2. páratlan 3. páros

9.7.15 A megoldás:

1. páratlan 2. páros

9.7.16 A megoldás:

1. A periódus: 4π 2. A periódus: π 3. A periódus: $\frac{\pi}{2}$

9.7.17 A megoldás:

1. A periódus: 4π 2. A periódus: π 3. A periódus: $\frac{\pi}{2}$

9.7.18 A megoldás:

1. A periódus: 15π 2. A periódus: 5π 3. A periódus: 6π

9.7.19 A megoldás:

1. A periódus: π 2. A periódus: 10 3. A periódus: 3

9.7.20 A megoldás:

1. A periódus: π 2. A periódus: $\frac{2\pi}{5}$ 3. A periódus: 2π

9.8. Függvények határértéke

9.8.1

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}=\frac{0-0+2}{0+0+2}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}=\frac{1-1+2}{1+1+2}=\frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$

9.8.2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}=\frac{0-0+10}{0-0+6}=\frac{5}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-5)(x-2)}{(x-3)(x-2)}=\frac{-3}{-1}=3$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}=1$

9.8.3

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x}{x^4+x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2-1)}{x(x^3+x+1)}=-1$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x}{x^4+x^2+x}=\dfrac{1-1}{1+1+1}=0$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-x}{x^4+x^2+x}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^4\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=0$

9.8.4

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2-1}=-1$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}=-\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2\left(x+2+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\infty$

9.8.5

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{x^2-4}=-\dfrac{1}{2}$

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}=-\dfrac{1}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}=0$

9.8.6

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+2x^2}{x^5+3x^3+3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(3x^2+2)}{x^2(x^3+3x+3)}=\dfrac{2}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^4+2x^2}{x^5+3x^3+3x^2}=\dfrac{3+2}{1+3+3}=\dfrac{5}{7}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x^2}{x^5+3x^3+3x^2}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^5\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^5\left(1+\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=0$

9.8.7

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

9.8.8

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{3x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{3x^2+1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1-x^2}{\sqrt{3x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2x+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{\infty}{\sqrt{3}+1}=\infty$$

9.8.9

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+2x-1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+2x-1}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+2x-1}+3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+2x-1-9x^2}{\sqrt{9x^2+2x-1}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{9+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+3\right)}=\frac{2}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3}$$

9.8.10

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2}+\sqrt{2x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(\sqrt{3+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}{x\left(\sqrt[4]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}-1\right)}=-\sqrt{3}$$

9.8.11

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-x+x^2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{5-x+x^2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2}\right)}{x\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5-5+x-x^2}{x\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{x\left(\sqrt{5}+\sqrt{5-x+x^2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

9.8.12

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-(\cos x)^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2}$$

9.8.13

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{2-x}-1\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(5-x-4)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{(2-x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{2-x}+1\right)}{\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\frac{1}{2}$$

9.8.14

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2-x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

9.8.15

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+4x}-\sqrt{2x^2-5x}\right)\left(\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}\right)}{\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-2x^2+5x}{\sqrt{2x^2+4x}+\sqrt{2x^2-5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x}{x\left(\sqrt{2+\frac{4}{x}}+\sqrt{2-\frac{5}{x}}\right)}=\frac{9}{2\sqrt{2}}$$

9.8.16

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+1}+3x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0$$

9.8.17

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{3x+2}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2+5}{3x+2}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{5}{3x+2}\right)^{3x+2}\right]^{\frac{1}{3x+2}}\right\}^{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(e^5)^{\frac{x+1}{3x+2}}=(e^5)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{5}{3}}$$

9.8.18

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\right]^{\frac{1}{x-1}}\right\}^{x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(e^2)^{\frac{x}{x-1}}=(e^2)^1=e^2$$

9.8.19

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[5\cdot\left(1+\frac{1}{5x}\right)\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}5^x\cdot\left(1+\frac{1}{5x}\right)^{x}=\infty\cdot e^{\frac{1}{5}}=\infty$$

9.8.20

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}=0\cdot e^{3}=0$$

9.8.21

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{5x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}=0\cdot e^{-1}=0$$

9.8.22

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}=0$$

9.8.23

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=e^{3}$$

9.8.24

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{3x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+4}{2x+1}\right)^{3x+7}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{4}{2x+1}\right)^{2x+1}\right]^{\frac{1}{2x+1}}\right\}^{3x+7}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(e^{4})^{\frac{3x+7}{2x+1}}=(e^{4})^{\frac{3}{2}}=e^{6}$$

9.8.25

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2}-1}{x^{2}}\right)^{\frac{x^{2}}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{x^{2}}\right)^{x^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

9.8.26

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left[3\cdot\left(1-\frac{1}{3x}\right)\right]^{2x}=\lim_{x\to\infty}(3)^{2x}\cdot\left(1+\frac{-\frac{1}{3}}{x}\right)^{2x}=\infty\cdot e^{-\frac{2}{3}}=\infty$$

9.8.27

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x}\right)^{x+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{2}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(2)^{x+2}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\infty\cdot e^2=\infty$$

9.8.28

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2$$

9.8.29

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$$

9.8.30

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$$

9.8.31

$$\lim_{x\to0}\frac{tgx}{sin\,x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$$

9.8.32

$$\lim_{x\to0}(x\cdot ctgx)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=1$$

9.8.33

$$\lim_{x\to0}\frac{tg7x}{tg13x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 7x}{\cos 7x}\cdot\frac{\cos 13x}{\sin 13x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\cdot\frac{1}{\cos 7x}\cdot\frac{13x}{\sin 13x}\cdot\cos 13x\cdot\frac{7}{13}\right)=\frac{7}{13}$$

9.8.34 Használjuk fel a következő összefüggést:

$$1-(\cos x)^2=(1-\cos x)(1+\cos x)=(\sin x)^2$$

Ebből:

$$1-\cos x=\frac{(\sin x)^2}{1+\cos x}$$

A megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]=0$$

9.8.35 Az előző feladathoz hasonlóan oldjuk meg.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]=\frac{1}{2}$$

9.8.36 Használjuk fel az előző feladat eredményét:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right]=\frac{1}{2}$$

Ebből:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}$$

9.8.37

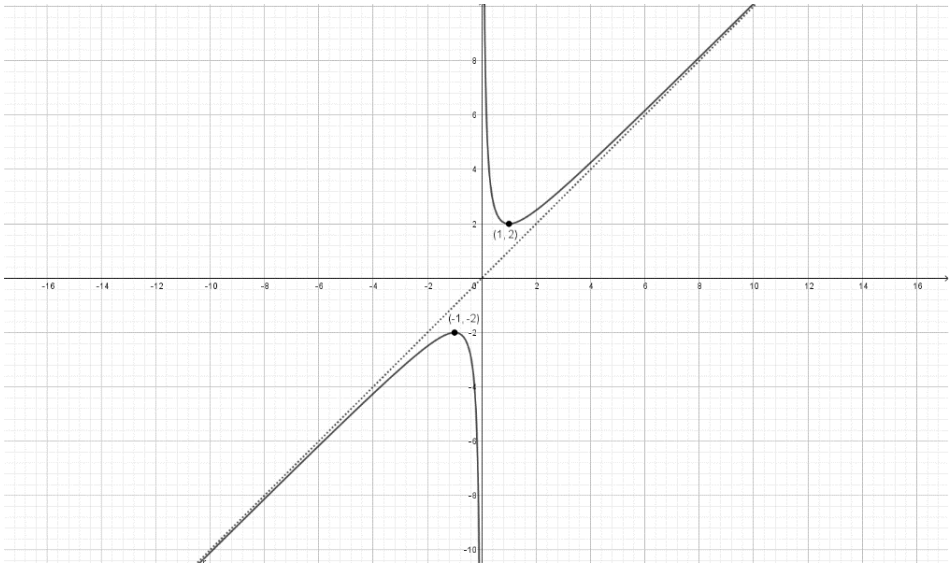
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2+(\cos x)^2-[(\cos x)^2-(\sin x)^2]}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x)^2}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right)=\frac{2}{3}$$

9.9. Teljes függvényvizsgálat

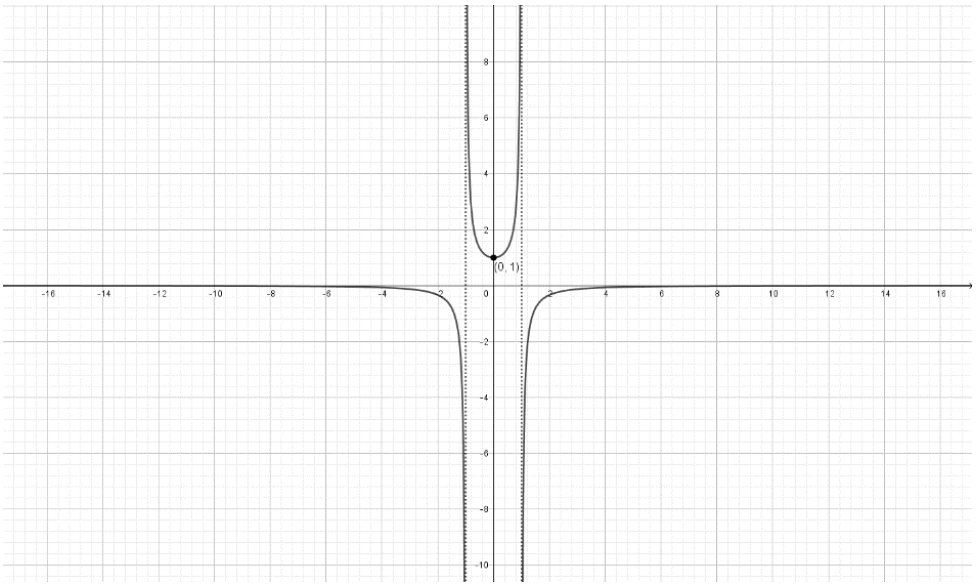
9.9.1

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}, x \neq 0$
Tengelymetszetek	*nincs*
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*nem folytonos,* $x = 0$ *szakadási pont*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páratlan függvény*
Asszimptota	*az* $y = x$ *egyenes*
Szélsőérték	$P_1(-1,-2)\ max.$, $P_2(1,2)\ min.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-\infty,-1[$ *és* $]1,\infty[\ sz.m.$ *nő,* $]-1,0[$ *és* $]0,1[\ sz.m.$ *csökken*
Konvexitás	$]-\infty,0[\ konkáv,]0,\infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \geq 2\ vagy\ y \leq -2, y \in \boldsymbol{R}$



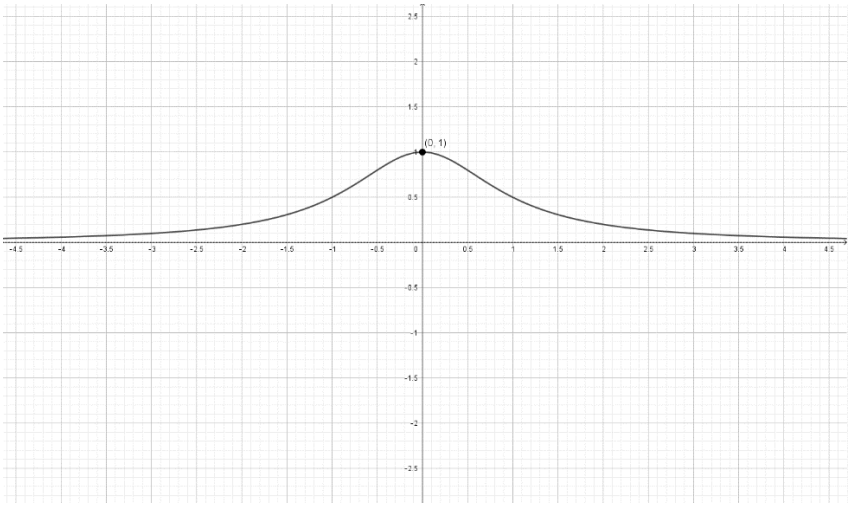
9.9.2

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}, x \neq -1\ x \neq 1$
Tengelymetszetek	$x = 0, y = 1$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to1^-} f(x) = \infty$
Folytonosság	*nem folytonos,* $x = -1$ *és* $x = 1$ *szakadási pontok*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	$x = -1$ *és* $x = 1$ *egyenesek*
Szélsőérték	$P(0,1)\ min.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-\infty, -1[$ *és* $]-1, 0[\ sz.m.csökken,\ ]0,1[$ *és* $]1, \infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-1, 1[\ konvex$
Értékkészlet	$y \geq 1\ vagy\ y \leq 0, y \in \boldsymbol{R}$



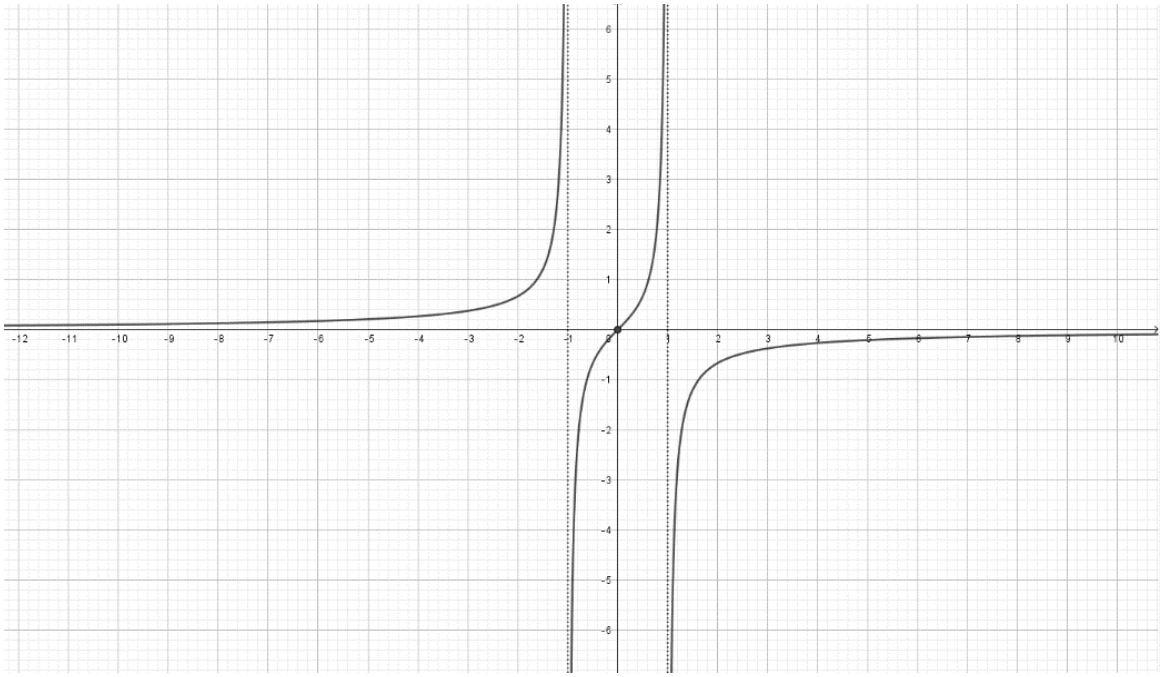
9.9.3

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$x = 0, y = 1$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	$y = 0$ *egyenes*
Szélsőérték	$P(0{,}1)\ max.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-\infty, 0[\ sz.m.nő,]0, \infty[\ sz.m.csökken$
Konvexitás	$]-\infty, \infty[\ konkáv$
Értékkészlet	$0 < y \leq 1, y \in \boldsymbol{R}$



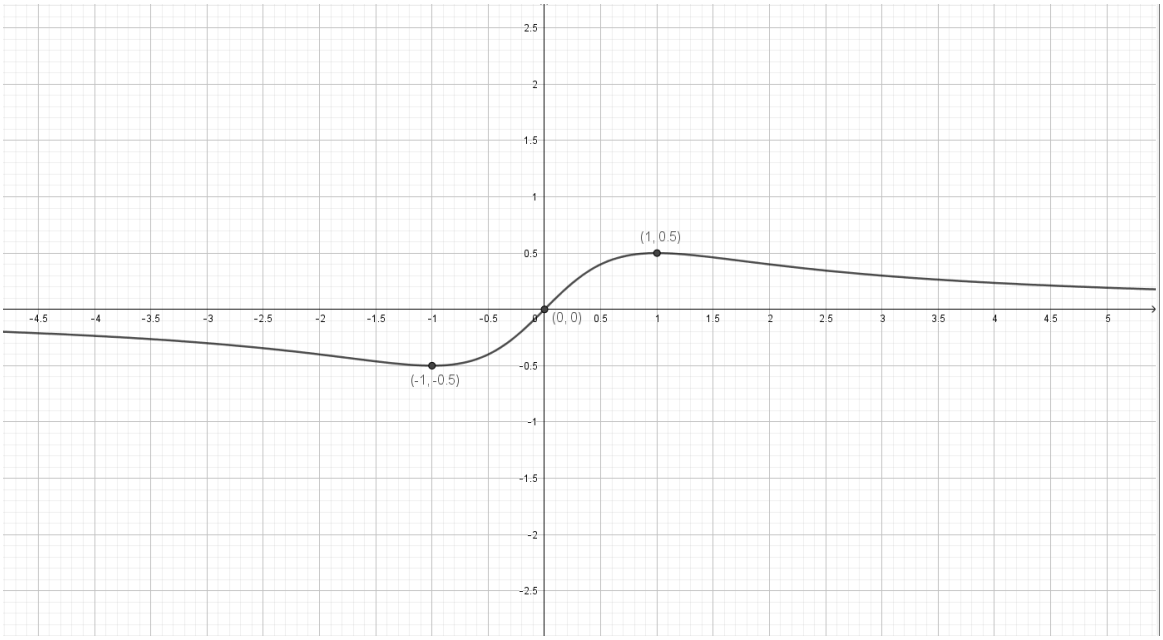
9.9.4

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}, x \neq \pm 1$
Tengelymetszetek	$x = 0, y = 0$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*nem folytonos*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	$x = -1$ *és* $x = 1$ *egyenesek*
Szélsőérték	*nincs szélsőérték*
Inflexiós pont	$I(0,0)$ *pont*
Monotonitás	$]-\infty,-1[$ *sz.m.nő*, $]-1,1[$ *sz.m.nő*, $]1,\infty[$ *sz.m.nő*
Konvexitás	$]-\infty,-1[$ *konvex*,$]-1,0[$ *konkáv*, $]0,1[$ *konvex*,$]1,\infty[$ *konkáv*
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



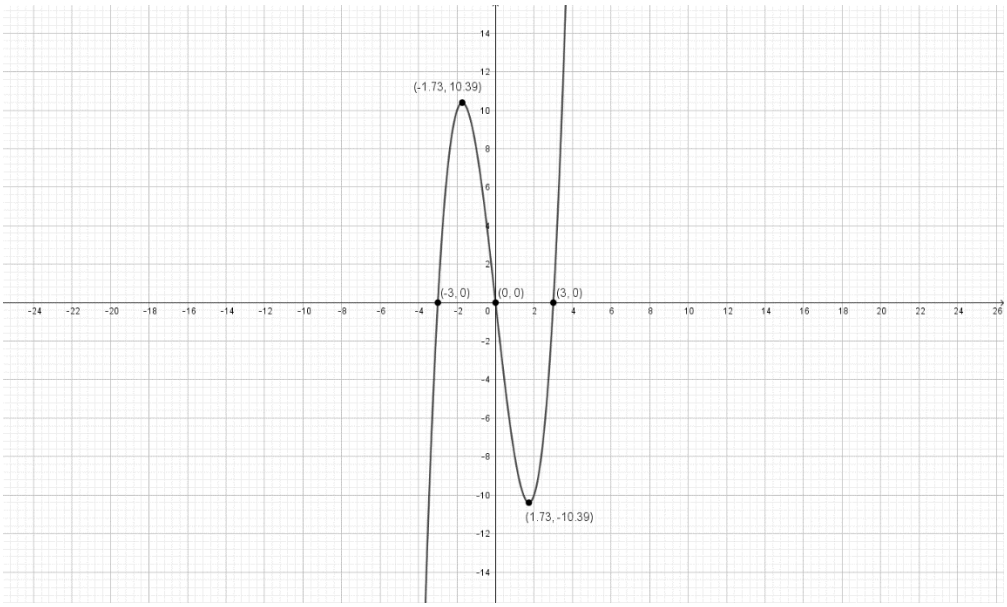
9.9.5

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$x = 0\ y = 0$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páratlan függvény*
Asszimptota	$y = 0$ *egyenes*
Szélsőérték	$P_1(-1; 0{,}5)\ min. P_2(1; 0{,}5)\ max.$
Inflexiós pont	$I(0{,}0)$ *pont*
Monotonitás	$]-\infty, -1[\ sz.m.cs.,\ ]-1{,}1[\ sz.m.nő,\ ]1, \infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty, 0[\ konvex,]0, \infty[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



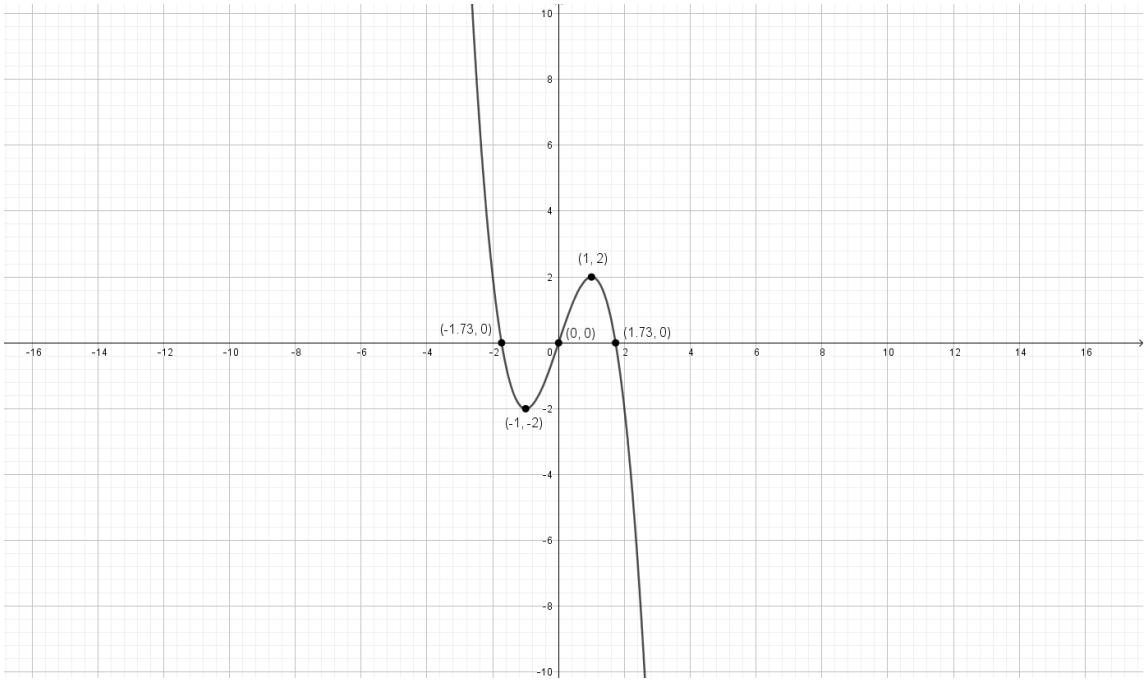
9.9.6

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-3,0)$ *és* $M_2(0,0)$ *és* $M_3(3,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páratlan függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-1{,}73;\ 10{,}39)max.\ P_2(1{,}73;\ 10{,}39)min.$
Inflexiós pont	$I(0,0)$
Monotonitás	$]-\infty; -1{,}73[\ sz.m.nő$, $]-1{,}73;\ 1{,}73[\ sz.m.cs.$ $]1{,}73;\ \infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty, 0[\ konkáv$, $]0, \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



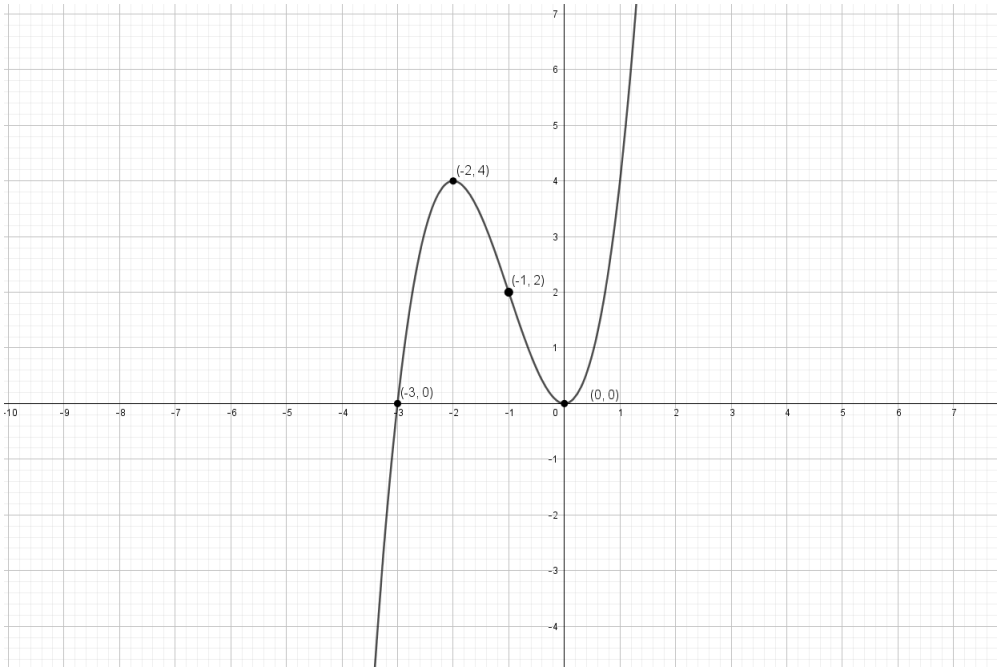
9.9.7

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-1{,}73;0)\ M_2(0{,}0)\ M_3(1{,}73;0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páratlan függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-1,-2)\ min.\ P_2(1{,}2)\ max.$
Inflexiós pont	$I(0{,}0)$
Monotonitás	$]-\infty,-1[\ sz.m.cs.,\ ]-1{,}1[\ sz.m.nő,\ ]1,\infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty,0[\ konvex,\ ]0,\infty[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



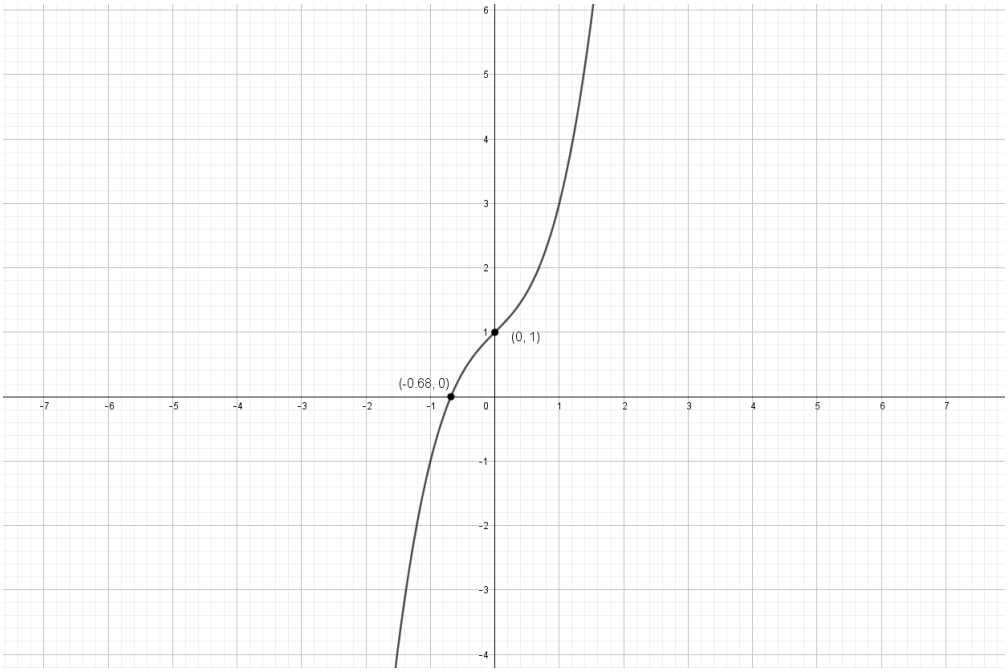
9.9.8

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-3{,}0)\ M_2(0{,}0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-2{,}4)\ max.\ P_2(0{,}0)\ min.$
Inflexiós pont	$I(-1{,}2)$
Monotonitás	$]-\infty,-2[\ sz.m.nő,\ ]-2{,}0[\ sz.m.cs.,\ ]0,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty,-1[\ konkáv,\ ]-1,\infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



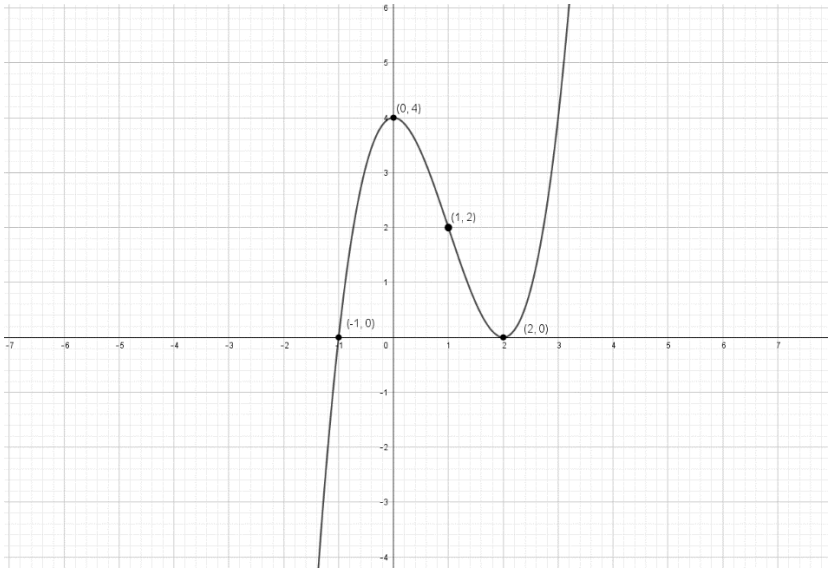
9.9.9

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$x = -0{,}68, y = 0$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	*nincs*
Inflexiós pont	$I(0{,}1)$
Monotonitás	$]-\infty, \infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty, 0[\ konkáv,]0, \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



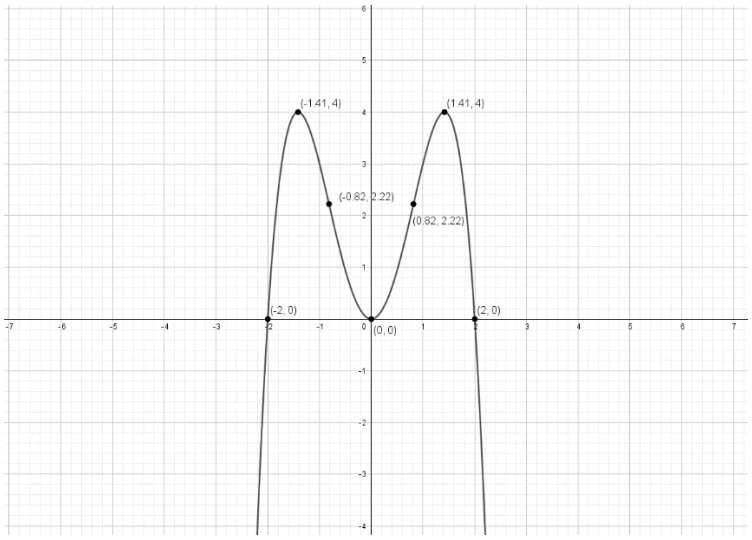
9.9.10

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-1,0)\ M_2(2,0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(0,4)\ max.\ P_2(2,0)\ min.$
Inflexiós pont	$I(1,2)$
Monotonitás	$]-\infty,0[\ sz.m.nő,]0,2[\ sz.m.cs.,]2,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty,1[\ konkáv,]1,\infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



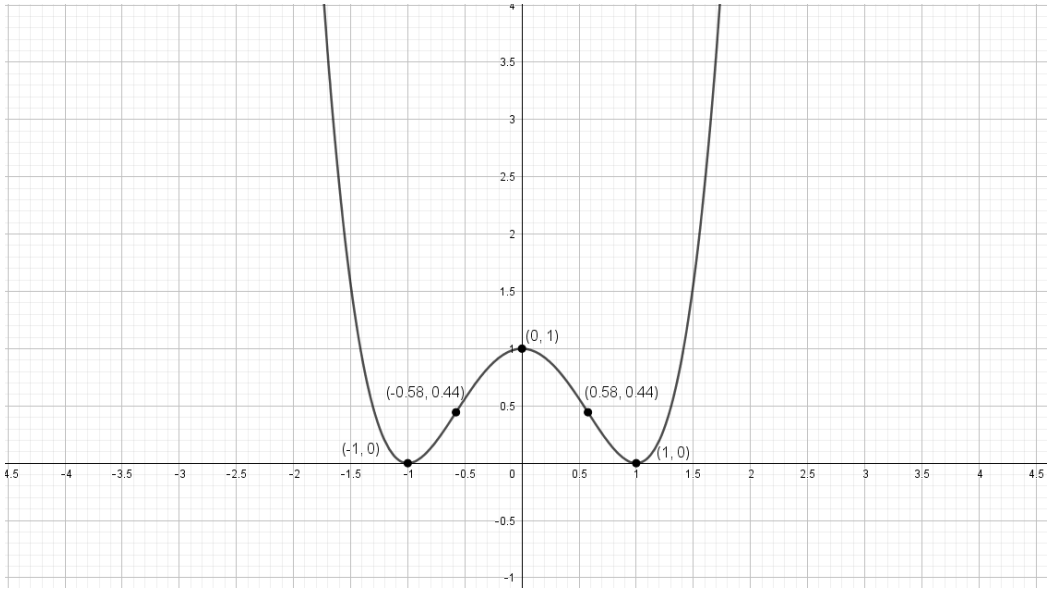
9.9.11

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-2,0)\ \ M_2(0,0)\ \ M_3(2,0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-1{,}41;4)\ \ P_2(1{,}41;4)\ max.$ $P_3(0,0)\ min.$
Inflexiós pont	$I_1(-0{,}82;2{,}22)\ \ I_2(0{,}82;2{,}22)$
Monotonitás	$]-\infty;\ -1{,}41[$ *és* $]0;1{,}41[\ sz.m.nő$ $]-1{,}41;0[$ *és* $]1{,}41;\ \infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty;-0{,}82[$ *és* $]0{,}82;\infty[\ konkáv,]-0{,}82;0{,}82[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



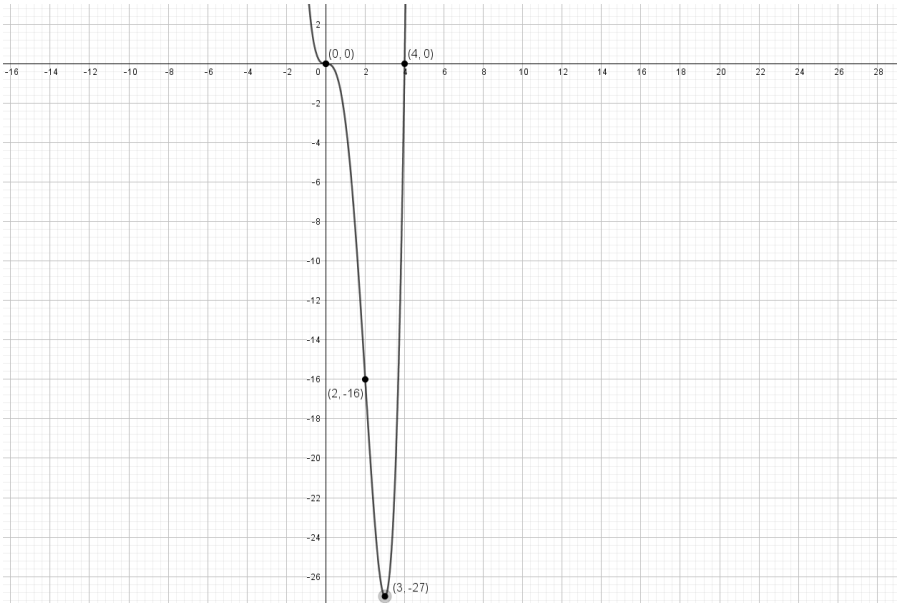
9.9.12

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-1,0)\ M_2(1,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-1,0)$ *és* $P_2(1,0)$ $min.$ $P_3(0,1)$ $max.$
Inflexiós pont	$I_1(-0{,}58;\ 0{,}44)\ I_2(0{,}58;\ 0{,}44)$
Monotonitás	$]-\infty,-1[$ *és* $]0{,}1[$ $sz.m.cs.$, $]-1{,}0[$ *és* $]1,\infty[$ $sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty;\ -0{,}58[$ *és* $]0{,}58;\ \infty[$ $konvex$, $]-0{,}58;\ 0{,}58[$ $konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



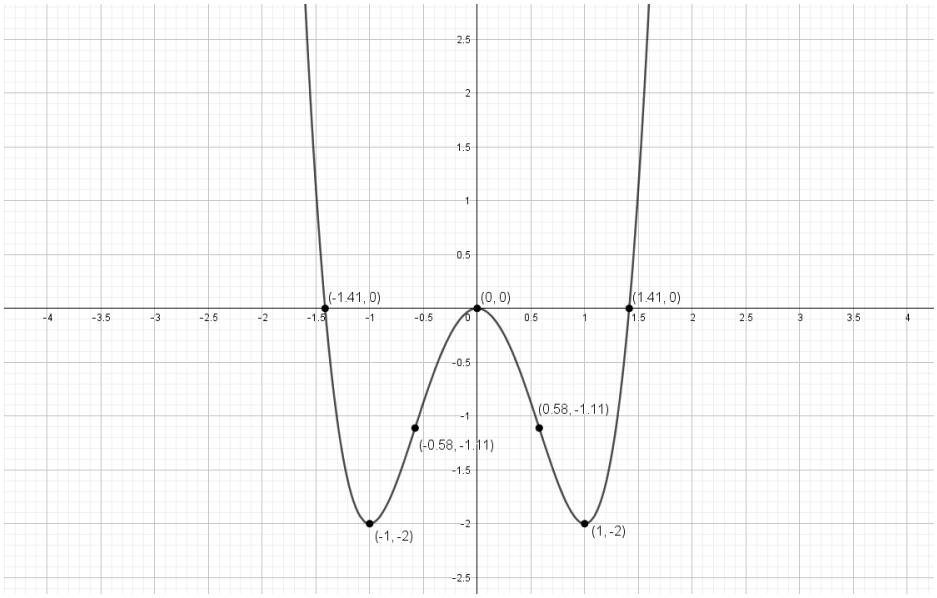
9.9.13

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(0,0)\ M_2(4,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$x = 3\ y = -27$
Inflexiós pont	$I_1(0,0)\ I_2(2,-16)$
Monotonitás	$]-\infty,3[\ sz.m.cs.,\ ]3,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty,0[\ \text{és}\ ]2,\infty[\ konvex,\ ]0,2[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



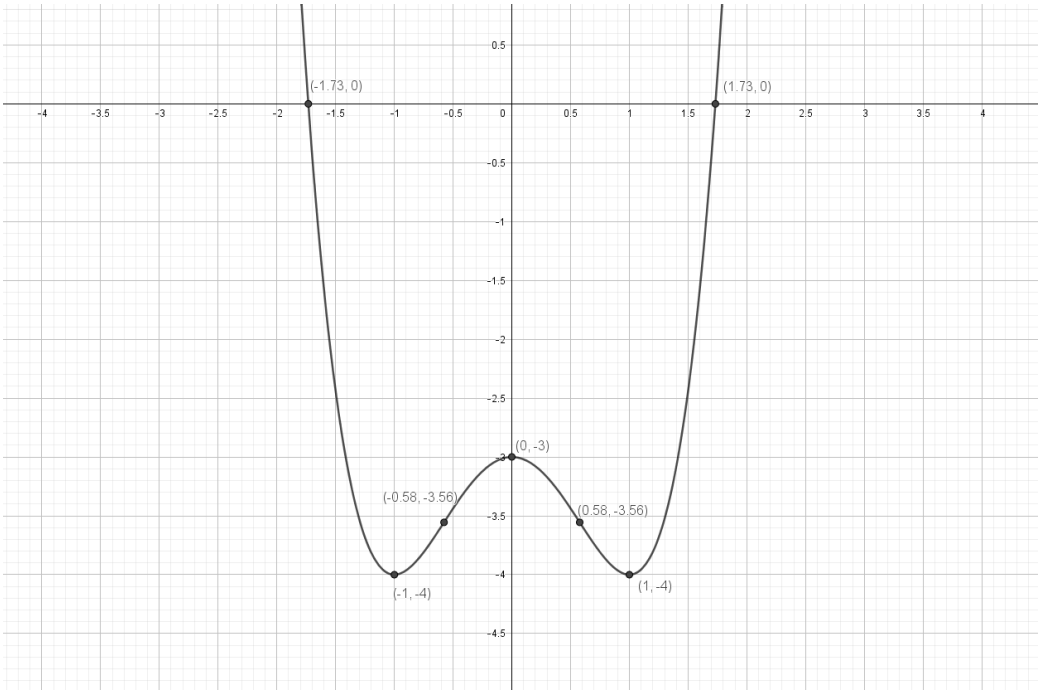
9.9.14

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-1{,}41;0)\ M_2(0{,}0)\ M_3(1{,}41;0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-1,-2)\ P_2(1,-2)\ min.$ $P_3(0{,}0)\ max.$
Inflexiós pont	$I_1(-0{,}58;-1{,}11)\ I_2(0{,}58;-1{,}11)$
Monotonitás	$]-\infty,-1[$ *és* $]0,1[\ sz.m.cs.,\ ]-1,0[$ *és* $]1,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty;\ -0{,}58[$ *és* $]0{,}58;\ \infty[\ konvex,\ ]-0{,}58;0{,}58[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



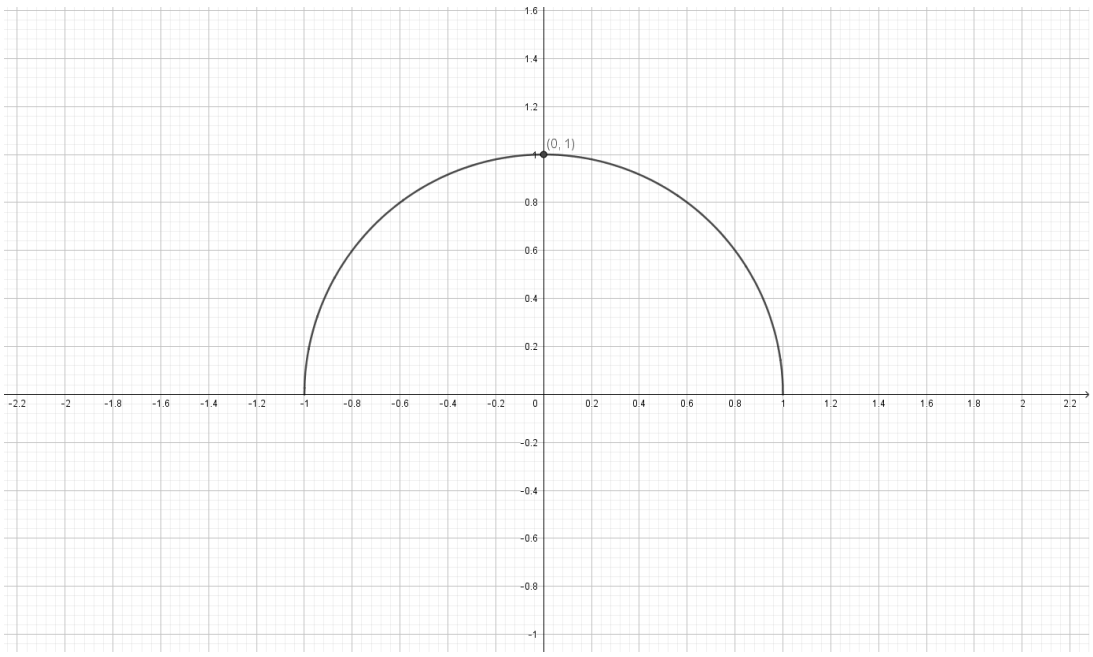
9.9.15

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-1{,}73; 0)\ M_2(1{,}73; 0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-1,-4)\ P_2(1,-4)\ min.,\ P_3(0,-3)\ max.$
Inflexiós pont	$I_1(-0{,}58;\ -3{,}56)\ I_2(0{,}58;\ -3{,}56)$
Monotonitás	$]-\infty,-1[$ *és* $]0,1[\ sz.m.cs.,\ ]-1,0[$ *és* $]1,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty;\ -0{,}58[$ *és* $]0{,}58;\ \infty[\ konvex,\ ]-0{,}58; 0{,}58[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



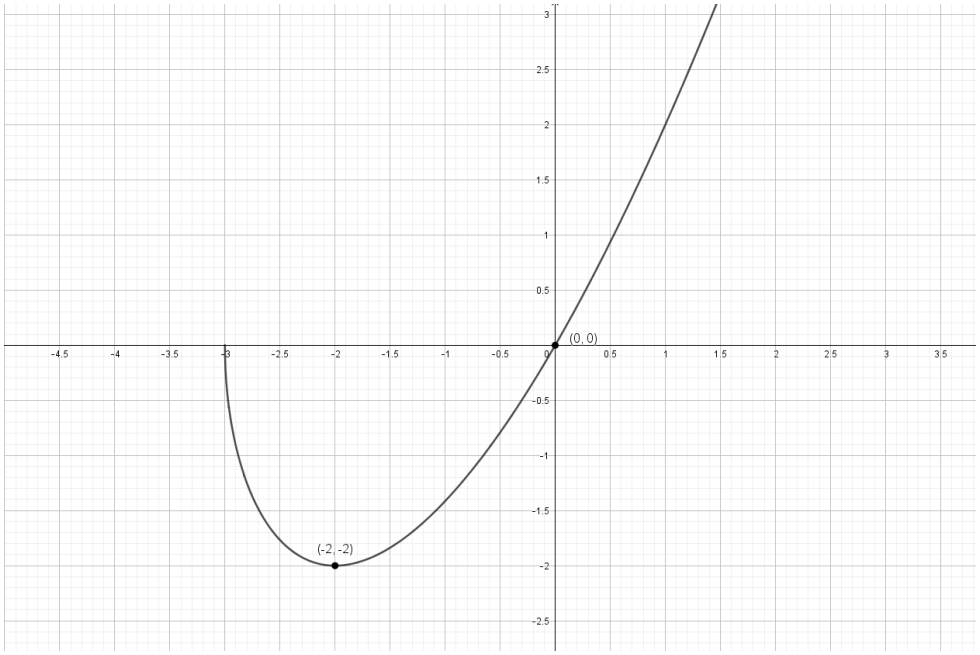
9.9.16

Értelmezési tartomány	$-1 \leq x \leq 1$
Tengelymetszetek	$M_1(-1,0)\ M_2(1,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(0,1)\ max.,\ P_2(-1,0)\ P_3(1,0)\ min.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-1,0[\ sz.m.nő,\ ]0,1[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$[-1,1]\ konkáv$
Értékkészlet	$0 \leq y \leq 1$



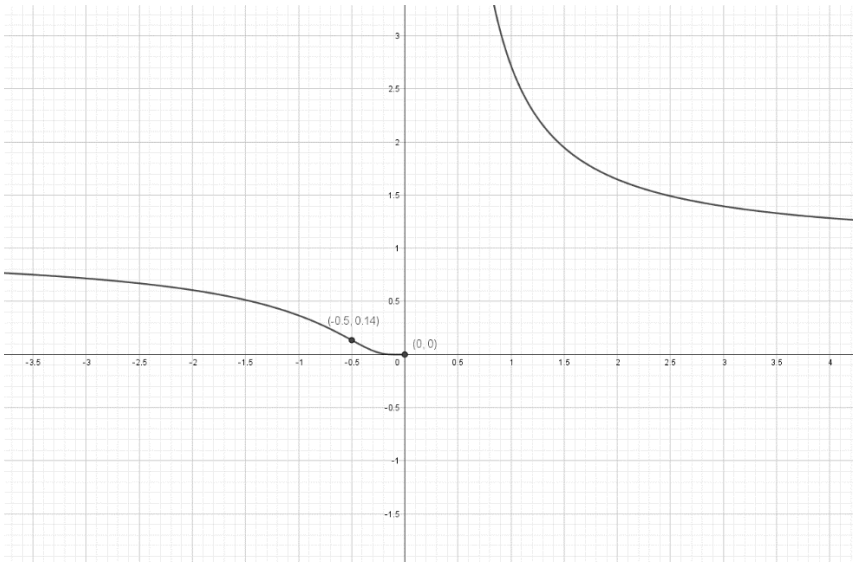
9.9.17

Értelmezési tartomány	$x \in]-3,\infty[$
Tengelymetszetek	$M_1(-3{,}0)\ M_2(0{,}0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P(-2,-2)\ min.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-3,-2[\ sz.m.cs.,\ ]-2,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-3,\infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in [-2,\infty[$



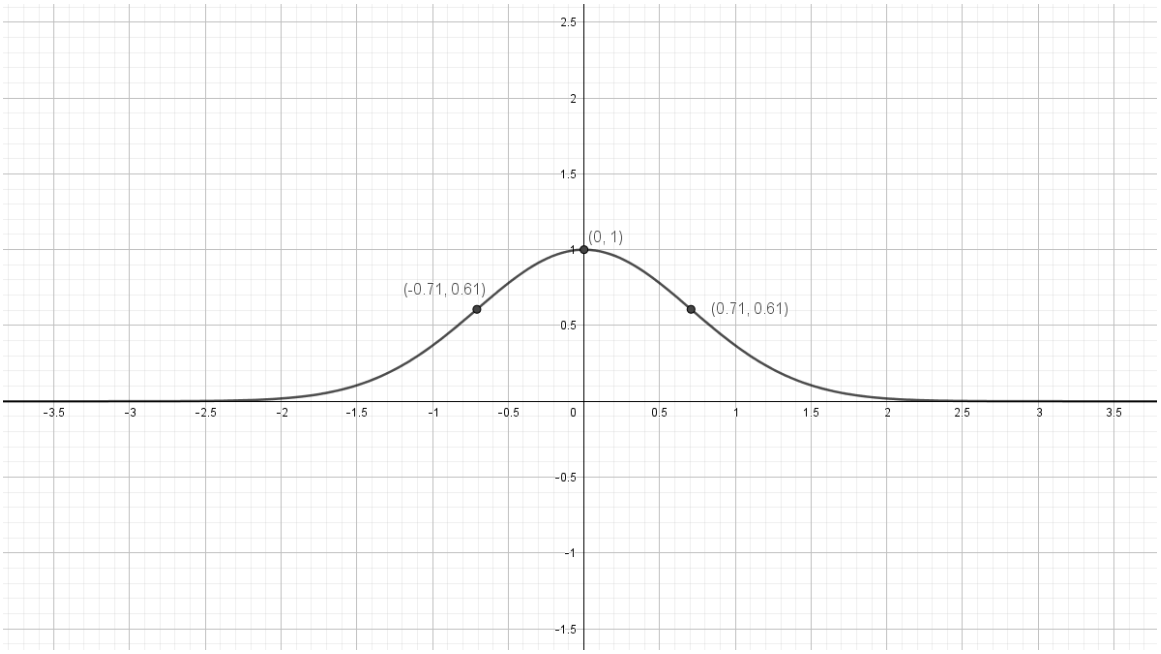
9.9.18

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\}$
Tengelymetszetek	$M(0,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$
Folytonosság	*nem folytonos,*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	$y = 1$ *és* $x =$ *egyenesek*
Szélsőérték	$P(0,0)\ min.$
Inflexiós pont	$I(-0{,}5; 0{,}14)$
Monotonitás	$]-\infty, 0[$ *és* $]0, \infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty; -0{,}5[\ konkáv,\ ]-0{,}5; 0[\ konvex,\ ]0, \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R} \backslash \{1\}$



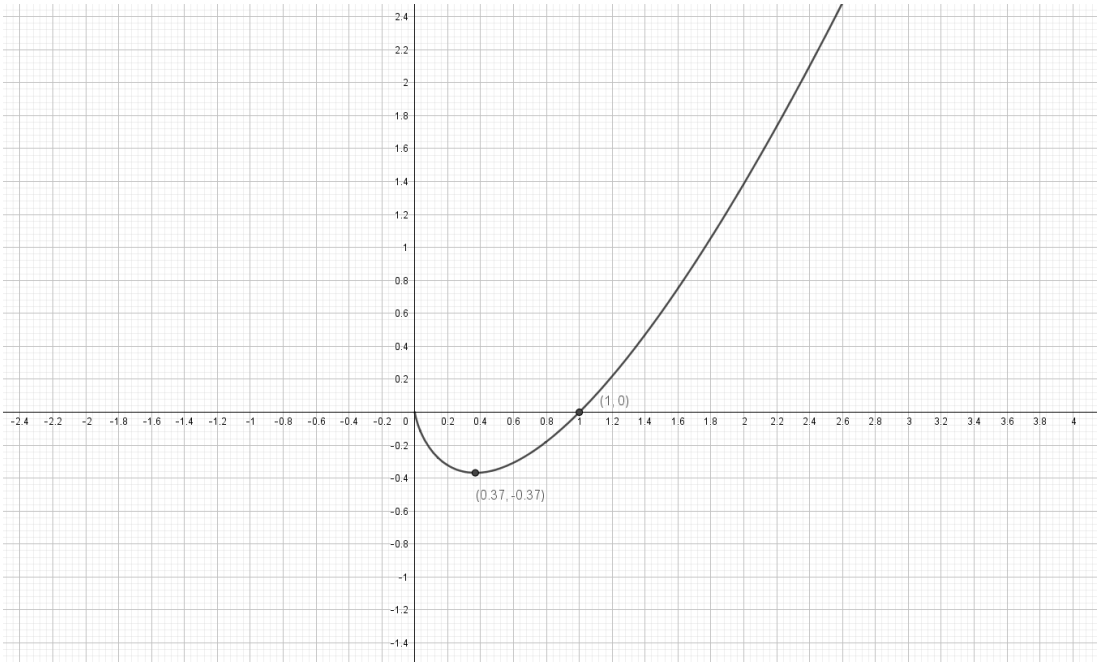
9.9.19

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	*nincs*
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	$y = 0$ *egyenes*
Szélsőérték	$P(0{,}1)\ max.$
Inflexiós pont	$I_1(-0{,}71; 0{,}61)\ I_2(0{,}71; 0{,}61)$
Monotonitás	$]-\infty, 0[\ sz.m.nő,]0, \infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty; -0{,}71[$ *és* $]0{,}71; \infty[\ konvex,]-0{,}71; 0{,}71[\ konkáv$
Értékkészlet	$0 < y \leq 1$



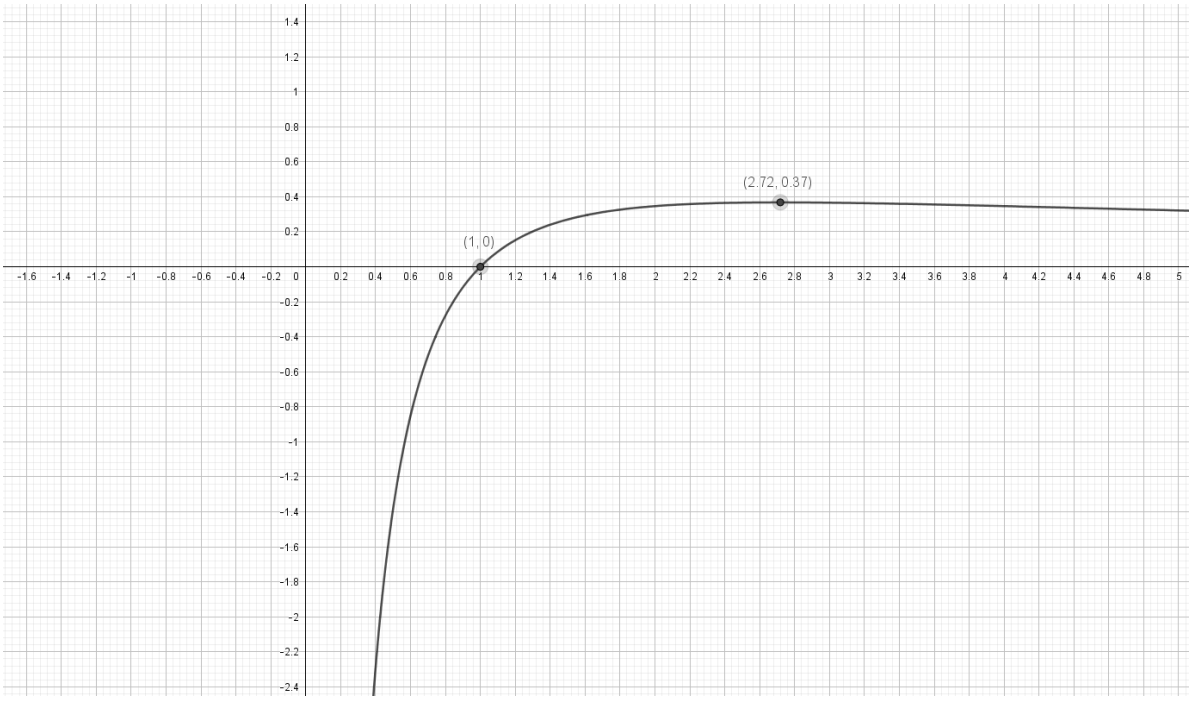
9.9.20

Értelmezési tartomány	$x \in]0, \infty[$
Tengelymetszetek	$M(1,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(0,0)\ max. P_2(0{,}37; -0{,}37)\ max.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$[0; 0{,}37[\ sz.m.cs.,]0{,}37;\ \infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$[0, \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in [-0{,}37; \infty[$



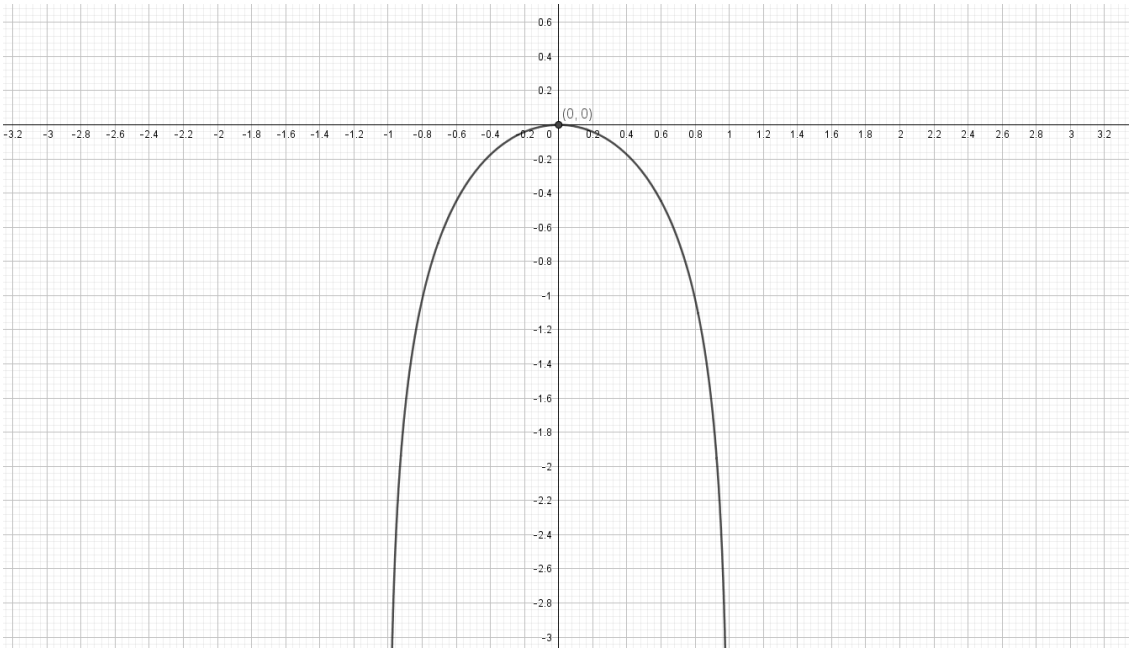
9.9.21

Értelmezési tartomány	$x > 0$
Tengelymetszetek	$M(1{,}0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	$x = 0$ és $y = 0$ *egyenesek*
Szélsőérték	$P(2{,}72; 0{,}37)\ max.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]0;\ 2{,}72[\ sz.m.nő,\ ]2{,}72; \infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	*konkáv*
Értékkészlet	$y < 2{,}72$



9.9.22

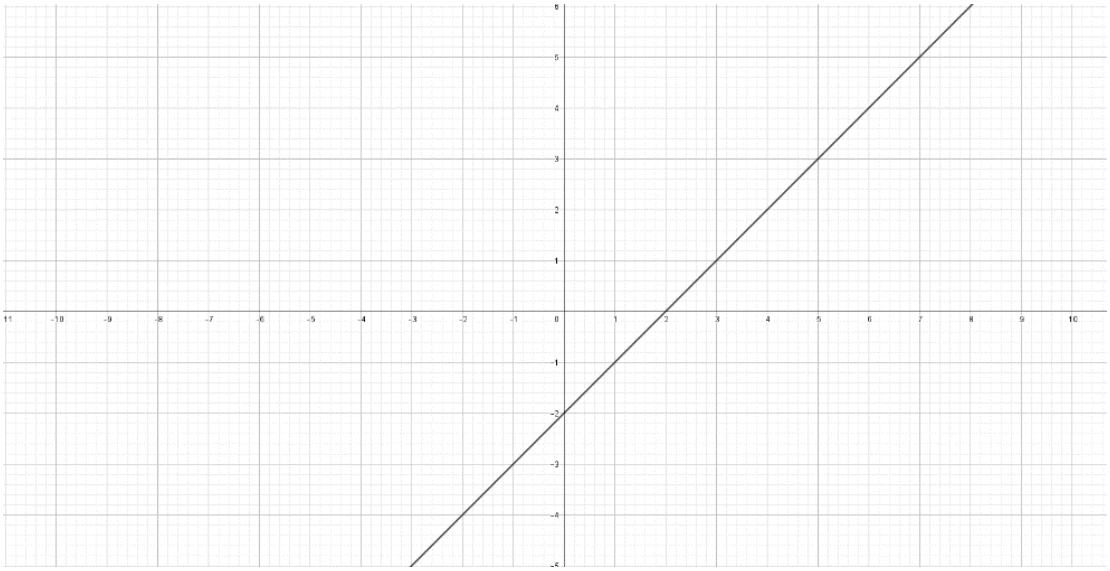
Értelmezési tartomány	$-1 < x < 1$
Tengelymetszetek	$M(0,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páros függvény*
Asszimptota	$x = -1$ és $x = 1$ *egyenesek*
Szélsőérték	$P(0,0)\ max.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-1,0[\ sz.m.nő,\ ]0,1[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	*konkáv*
Értékkészlet	$y \leq 0$



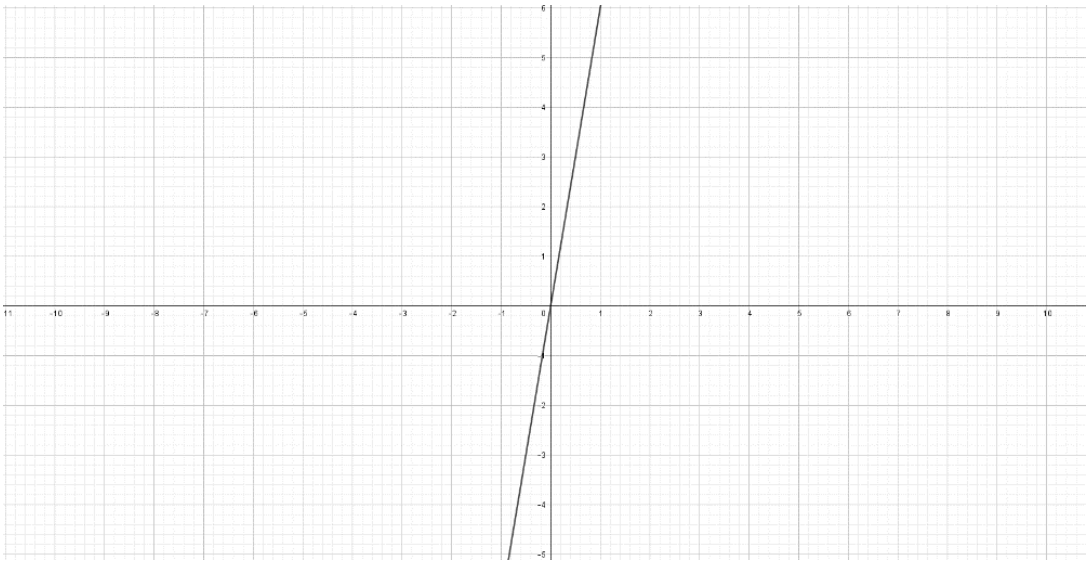
9.10.Vegyes feladatok

9.10.1

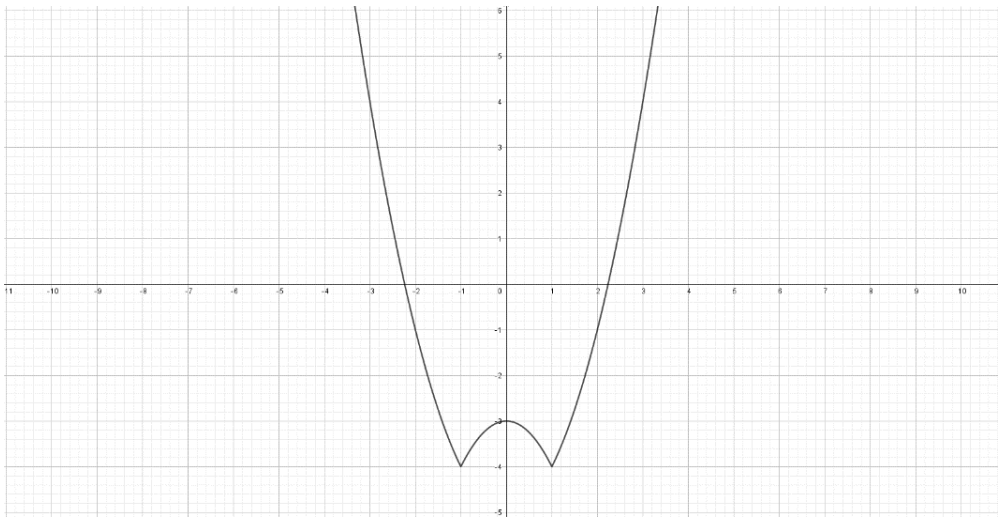
1. A megoldás:

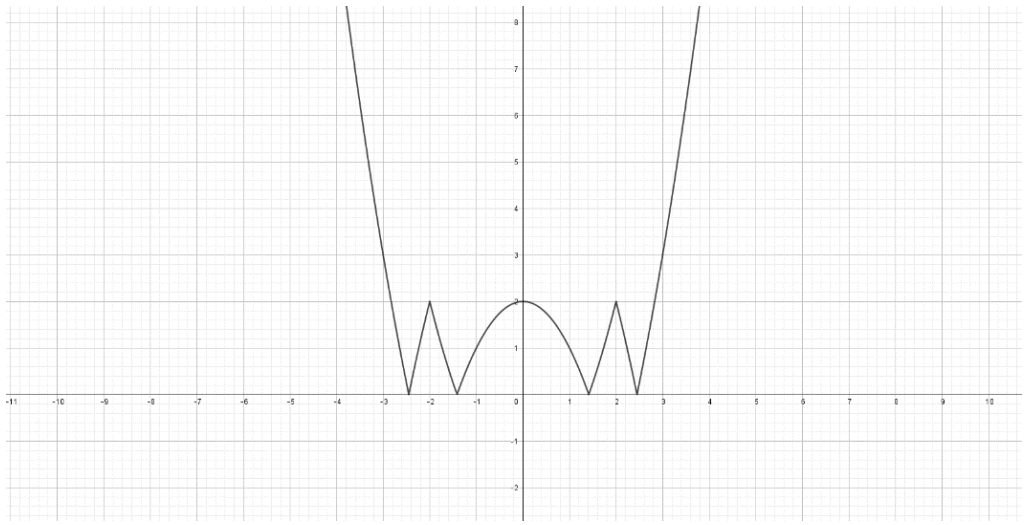


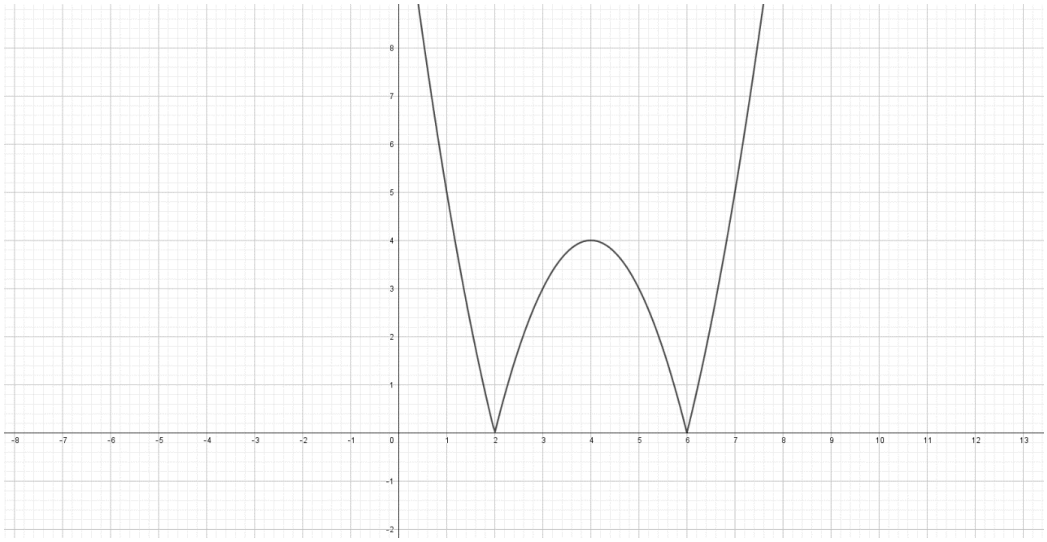
2. A megoldás:



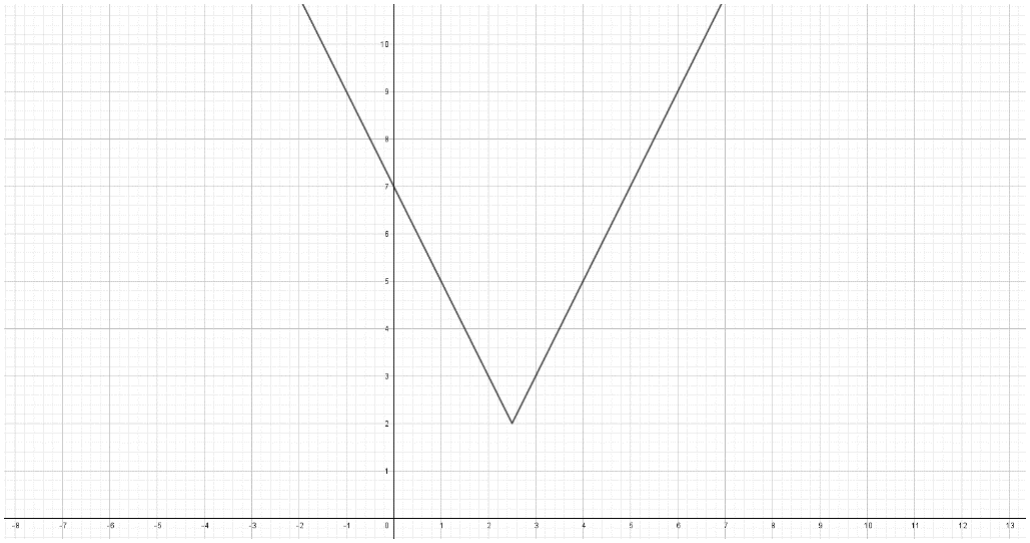
9.10.2 A megoldás:



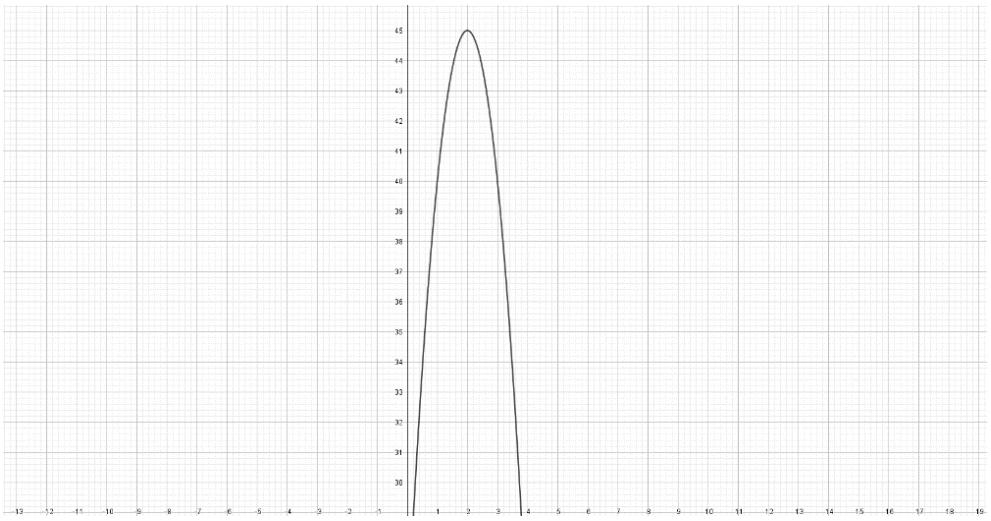


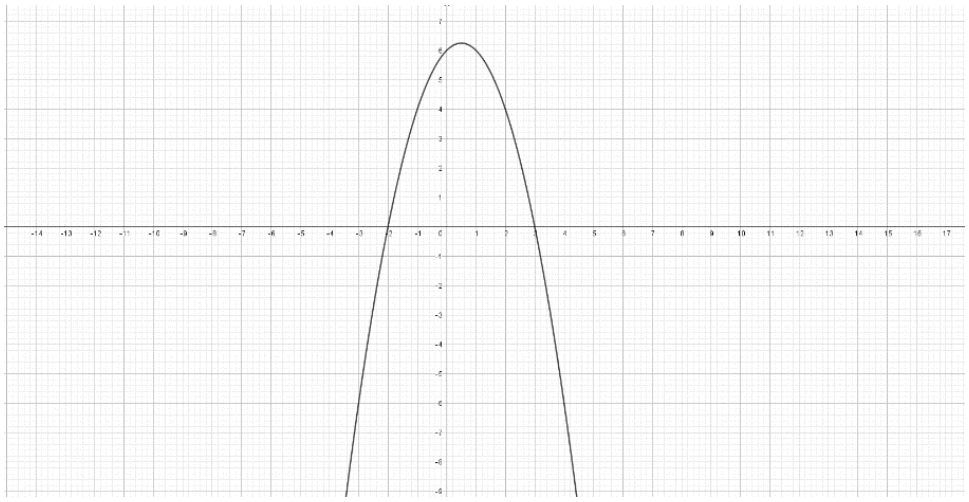


9.10.3 A megoldás:

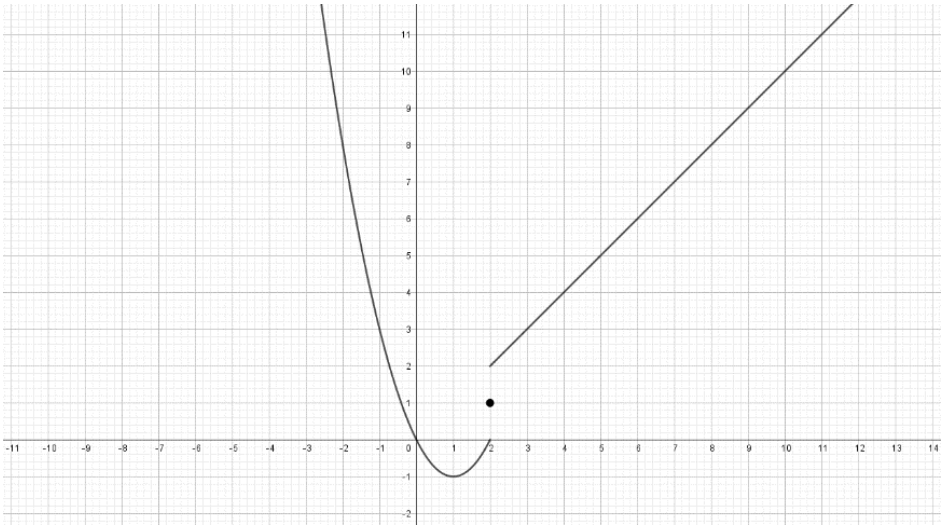


9.10.4 A megoldás:

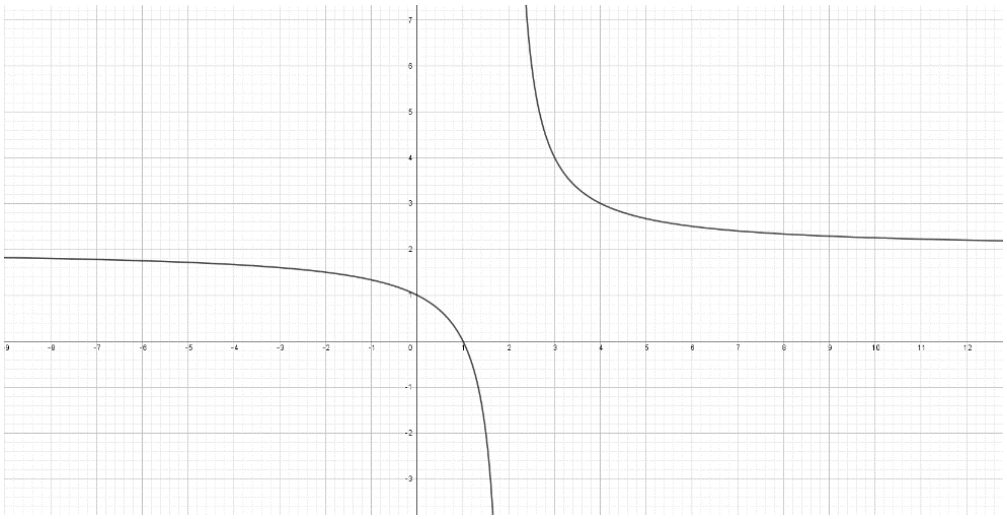


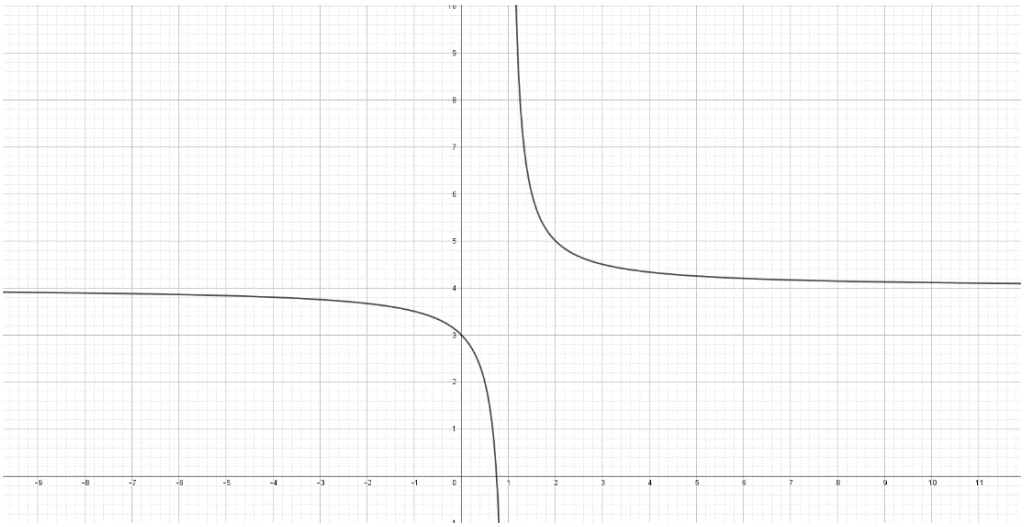


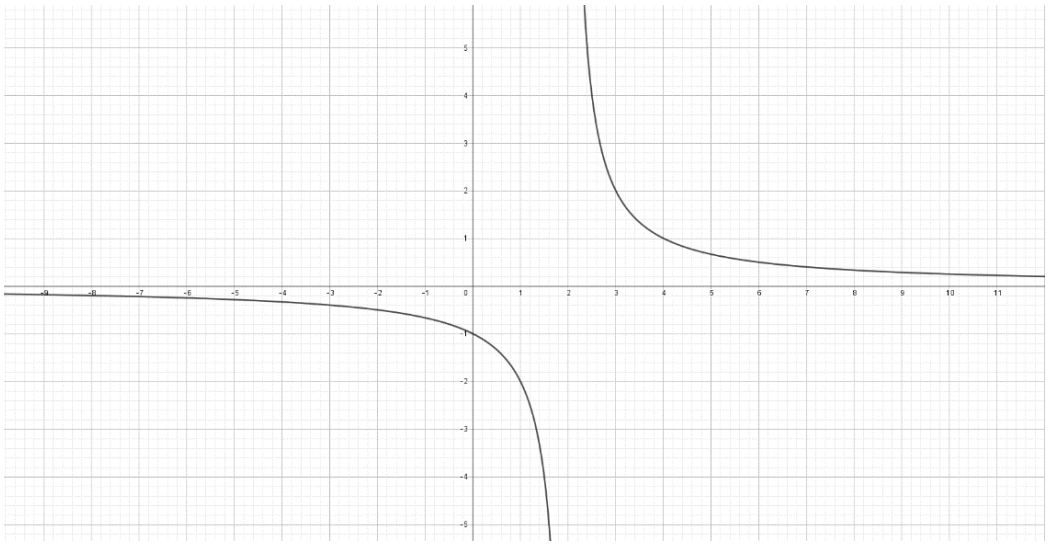
9.10.5 A megoldás:



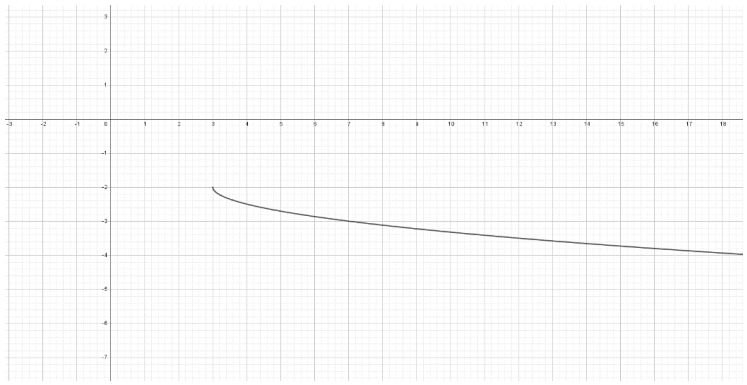
9.10.6 A megoldás:

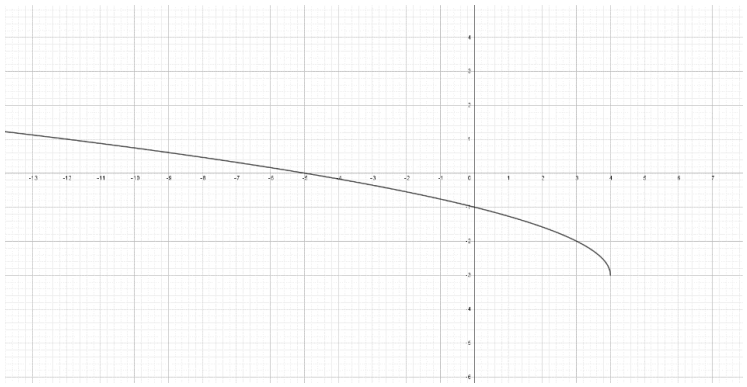


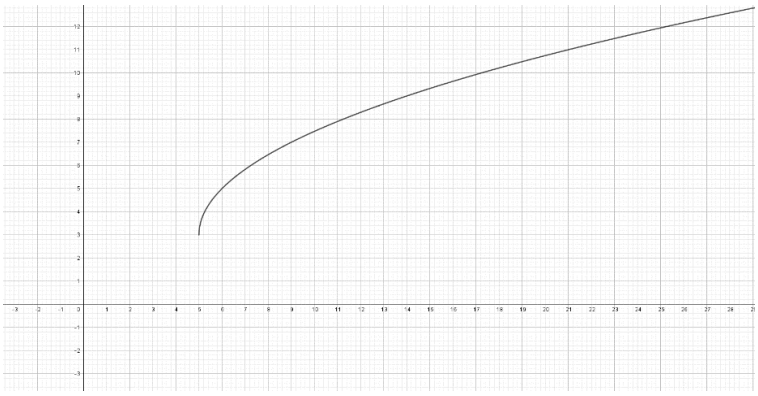


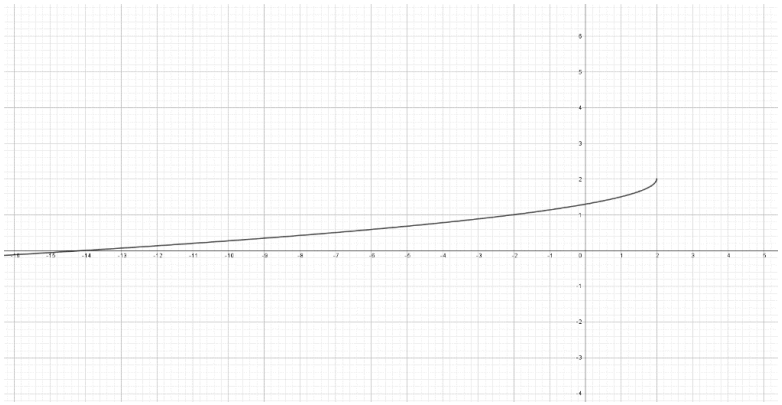


9.10.7 A megoldás:



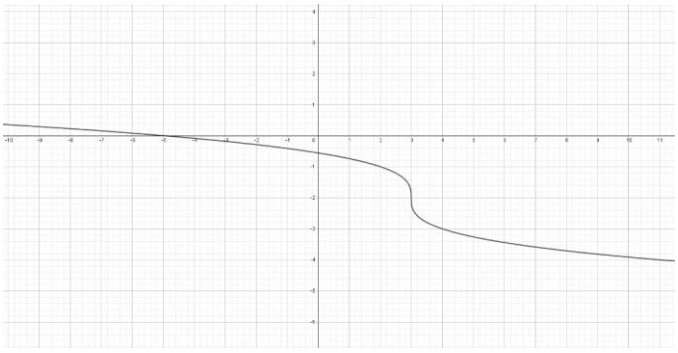




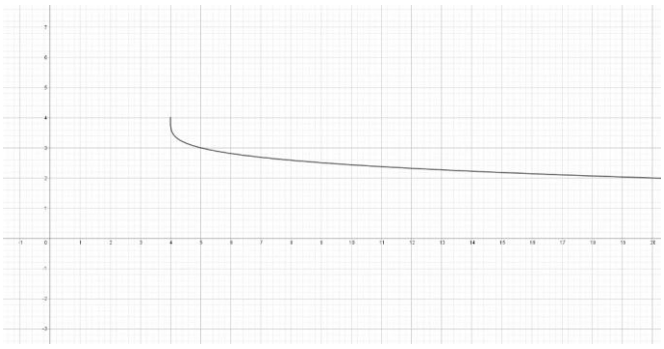


9.10.8 A megoldás:

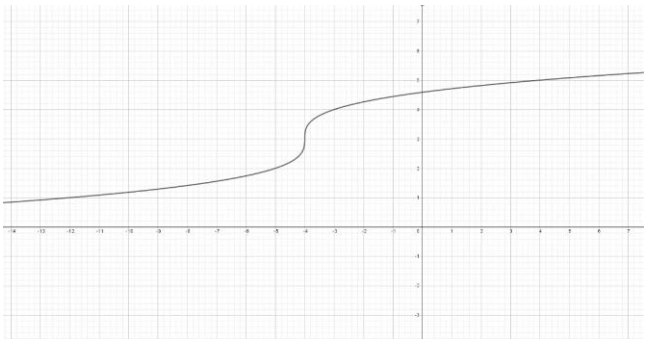
1.



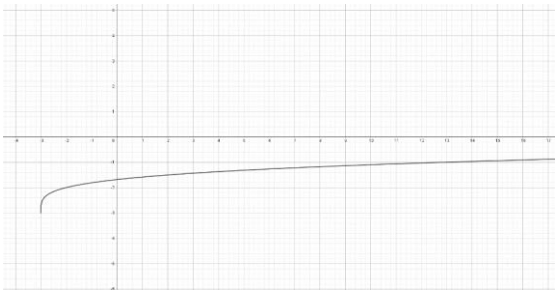
2.



3.

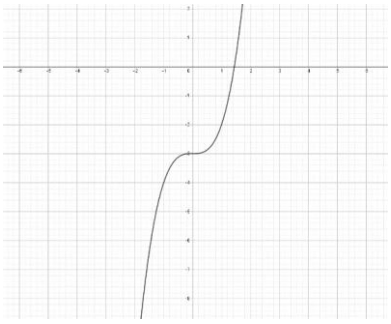


4.

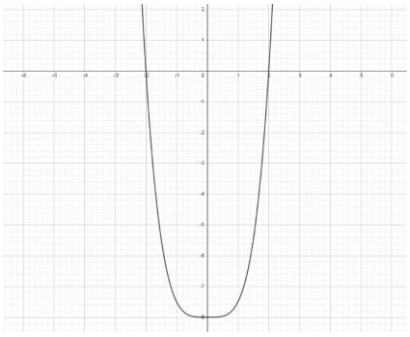


9.10.9 A megoldás:

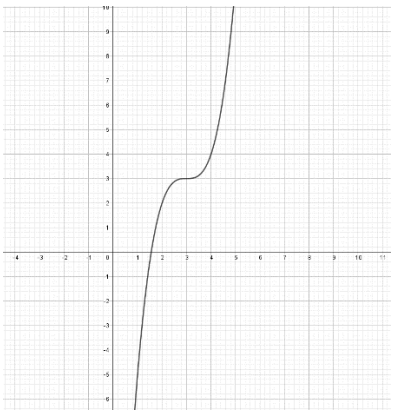
1.



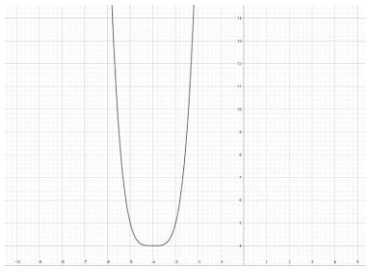
2.



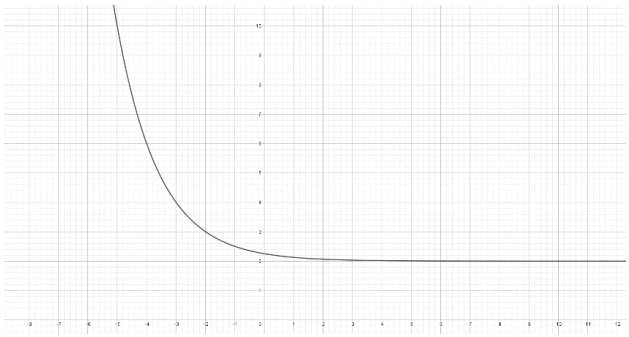
3.

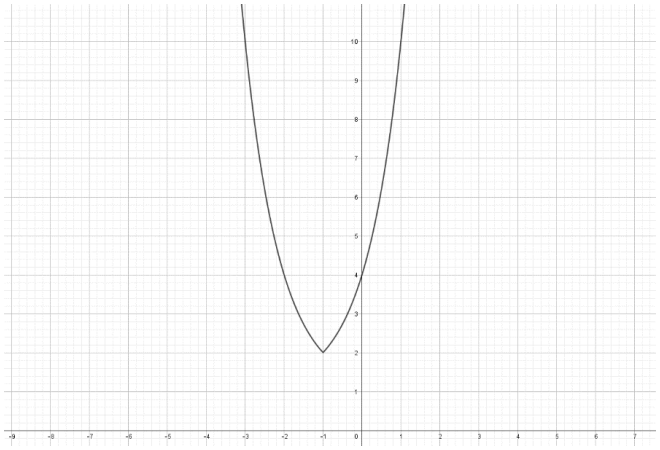


4.

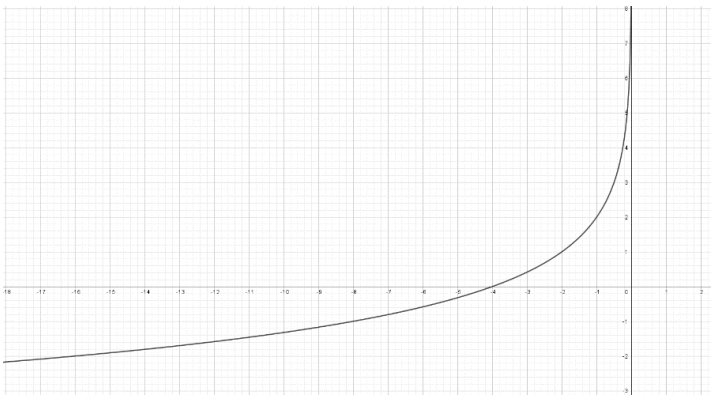


9.10.10 A megoldás:

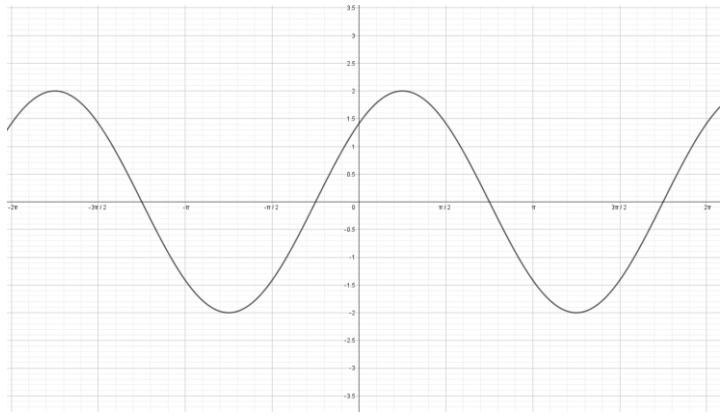


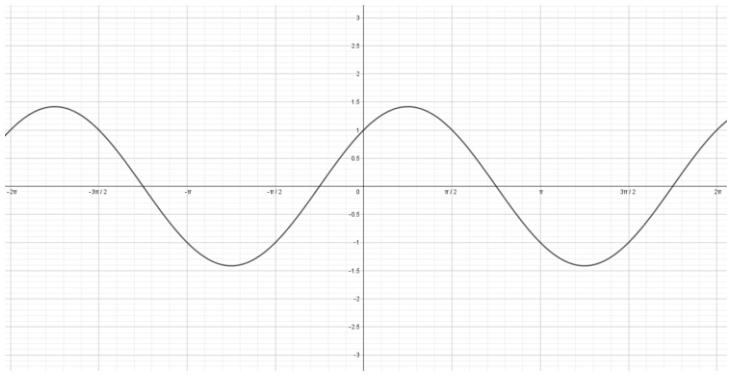


9.10.11

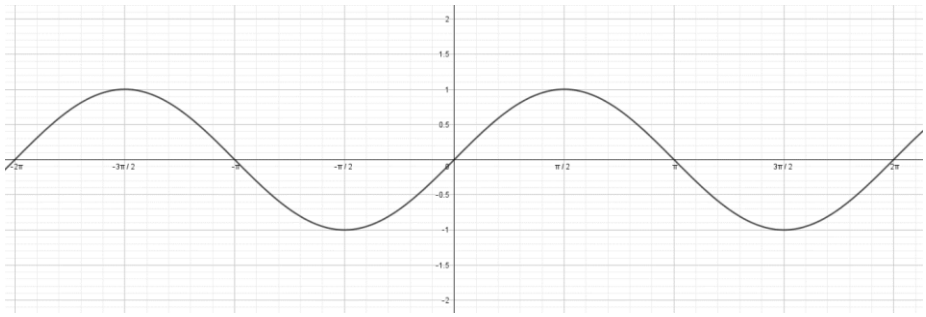


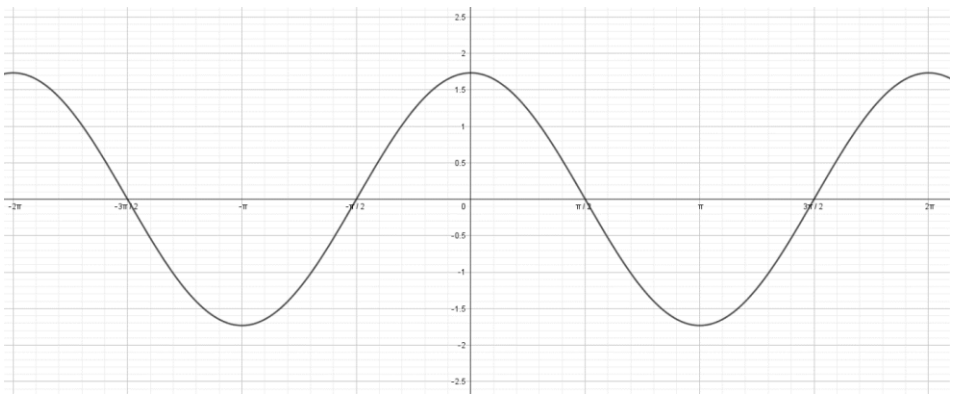
9.10.12 A megoldás:





9.10.13 A megoldás:





9.10.14 A megoldás:

1. $fog = 4x^2 - 10x + 4$

2. $fog = \sqrt{\sin(2x) + 2}$

3. $fog = \log_3(|x + 3| - 1)$

4. $fog = \frac{1}{2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1}$

5. $gof = 2(x^2 - 3x) - 1$

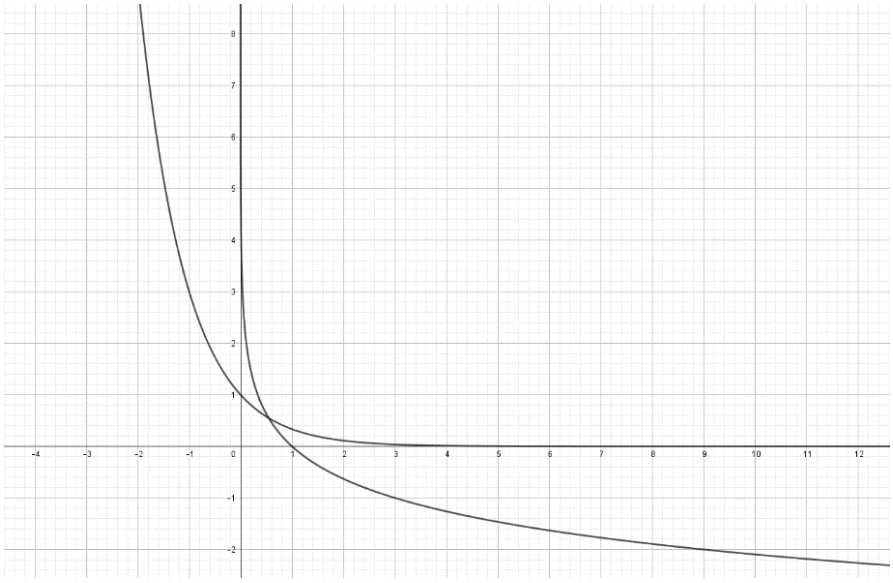
6. $gof = \sin\left(2\sqrt{x + 2}\right)$

7. $gof = |\log_3(x - 1) + 3|$

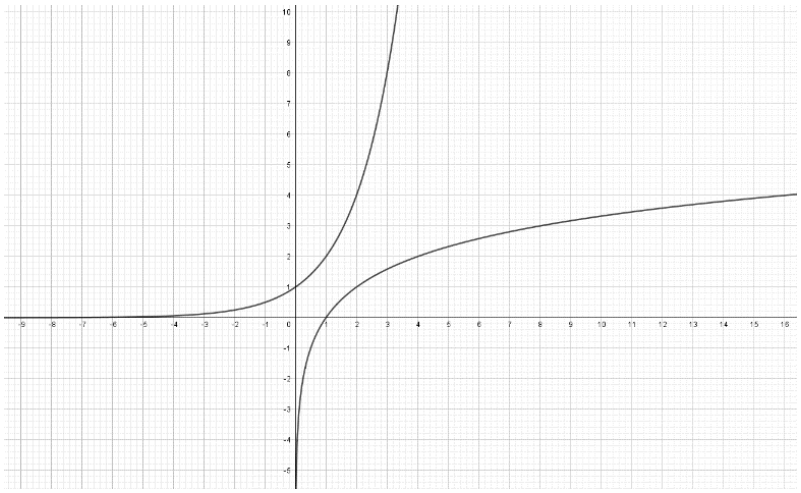
8. $gof = \cos\left(\frac{1}{2x-1} - \frac{\pi}{4}\right)$

9.10.15 A megoldás:

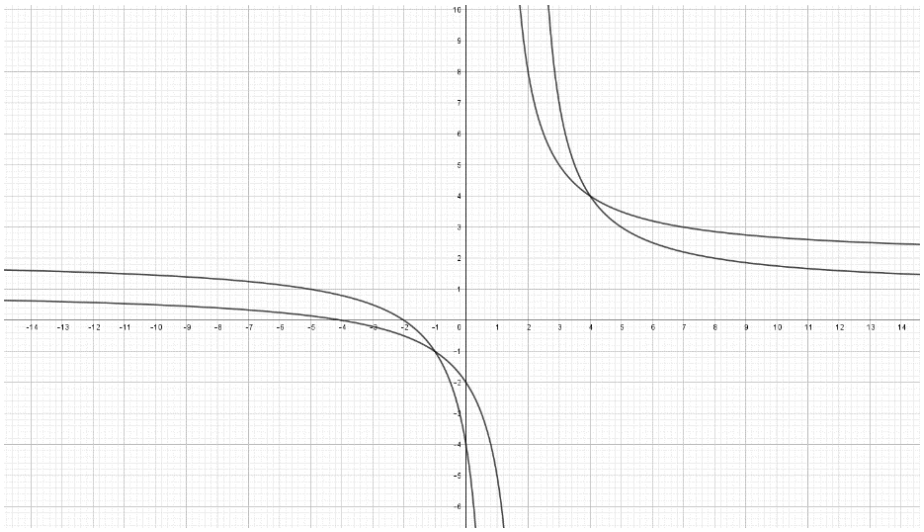
1. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $ahol\ x > 0$



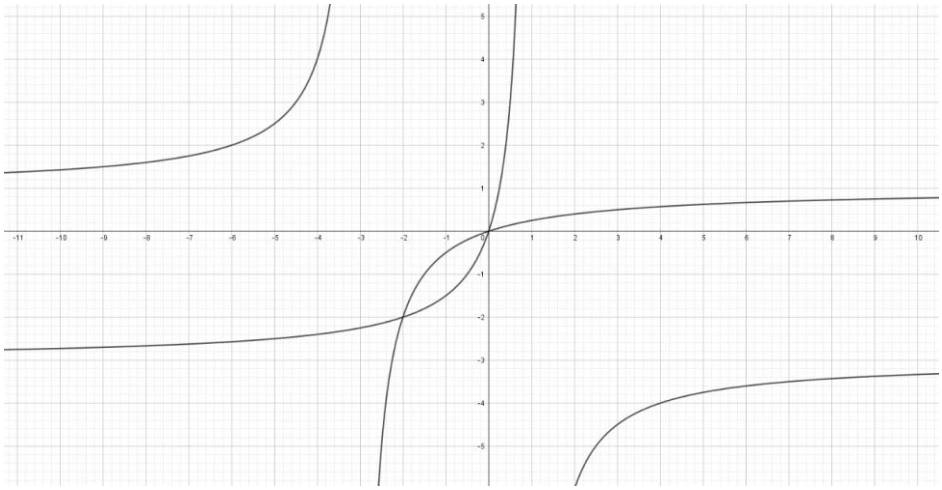
2. $f(x) = \log_2 x\,, ahol\ x > 0,\ f^{-1}(x) = 2^x$



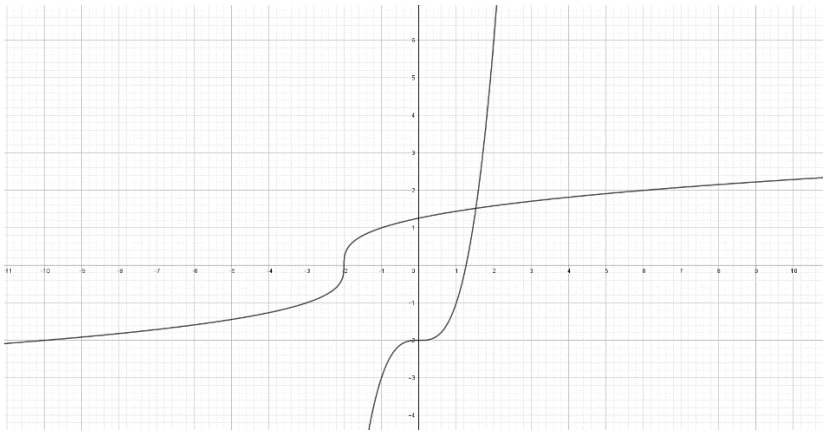
3. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}, ahol\ x \neq 2,\ f^{-1}(x) = \frac{6}{x-1} + 2, ahol\ x \neq 1$



4. $f(x) = \frac{x}{x+3}, ahol\ x \neq -3,\ f^{-1}(x) = \frac{-3}{x-1} - 3, ahol\ x \neq 1$

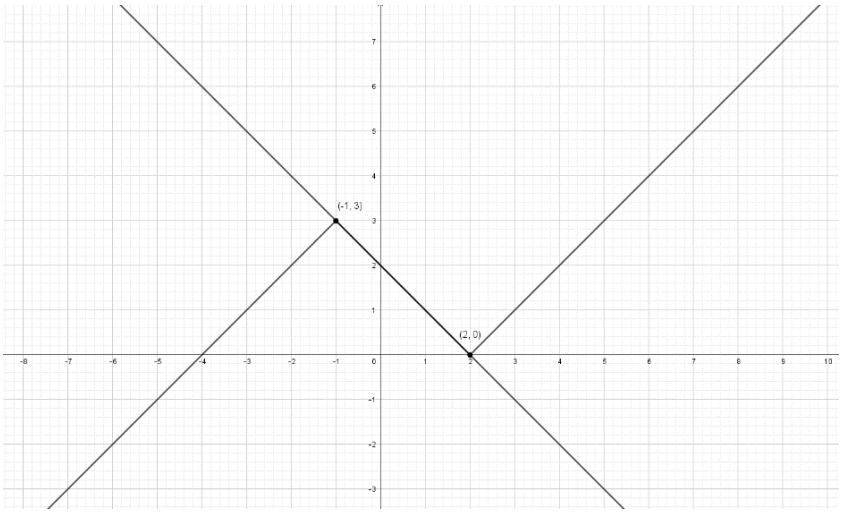


5. $f(x) = \sqrt[3]{x+2},\ f^{-1}(x) = x^3 - 2$

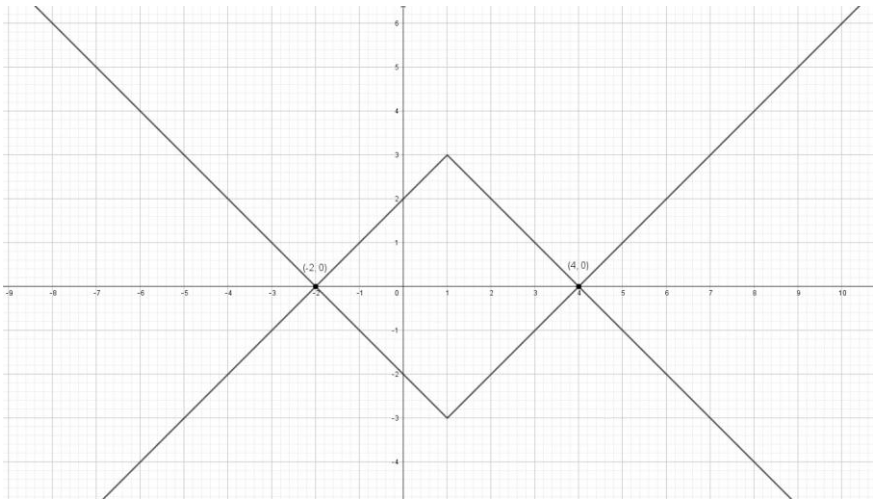


9.10.16

1. A megoldás: $-1 \leq x \leq 2$

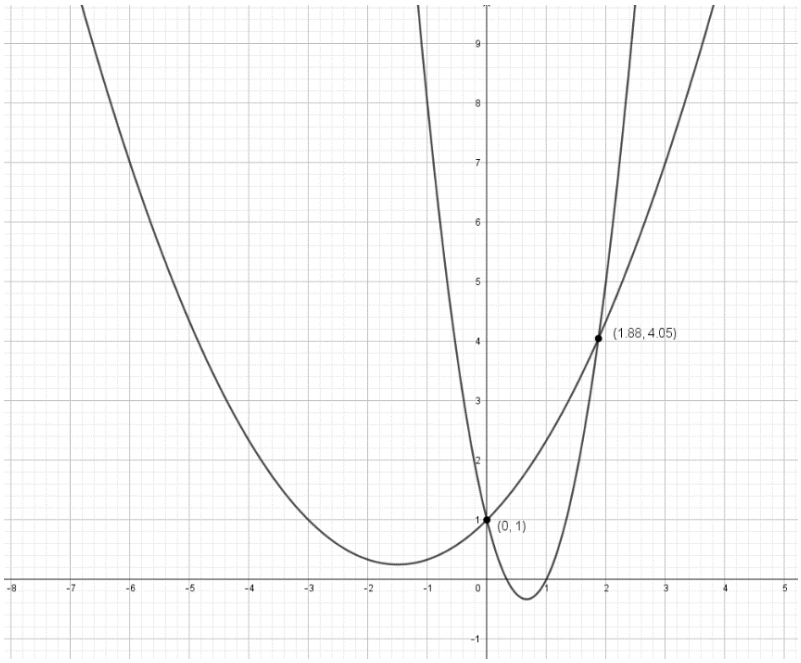


2. A megoldás: $x_1 = -2\ ;\ x_2 = 4$

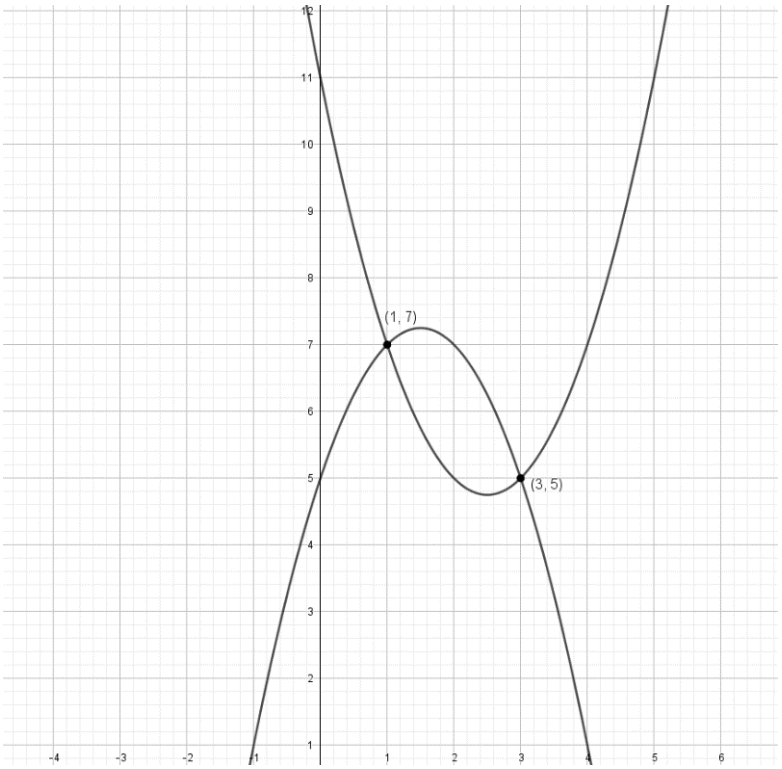


9.10.17

1. A megoldás: $x_1 = 0;\ x_2 = 1{,}88$

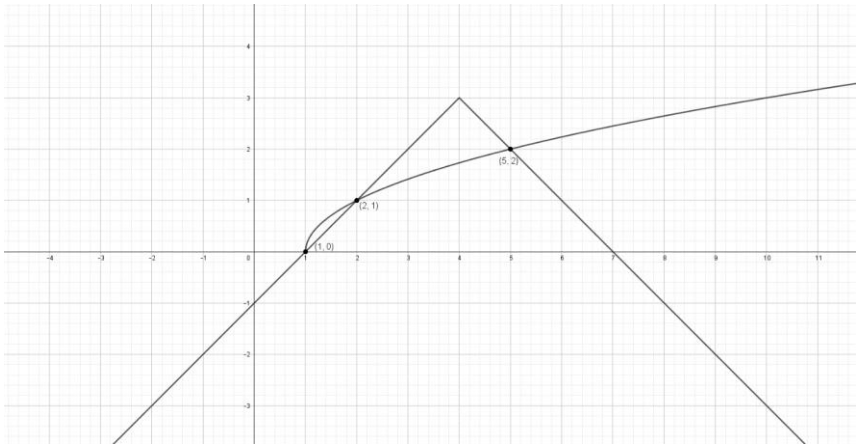


2. A megoldás: $x_1 = 1;\ x_2 = 3$

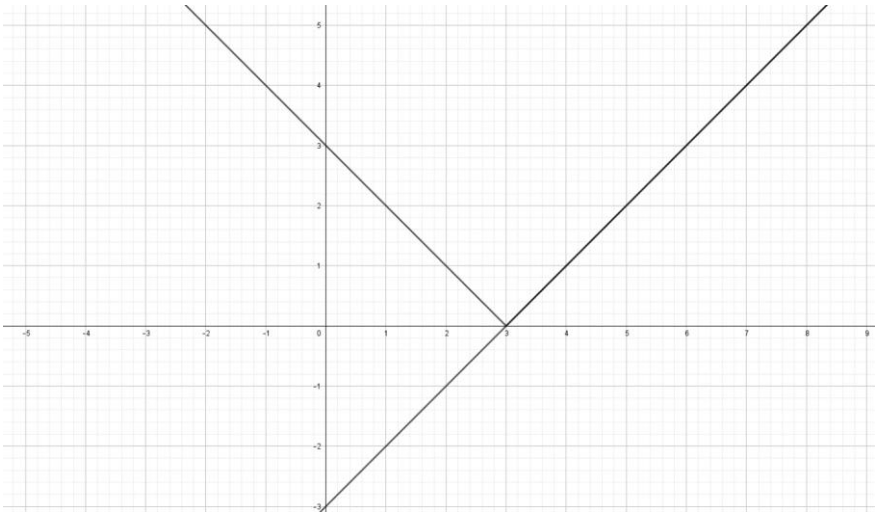


9.10.18

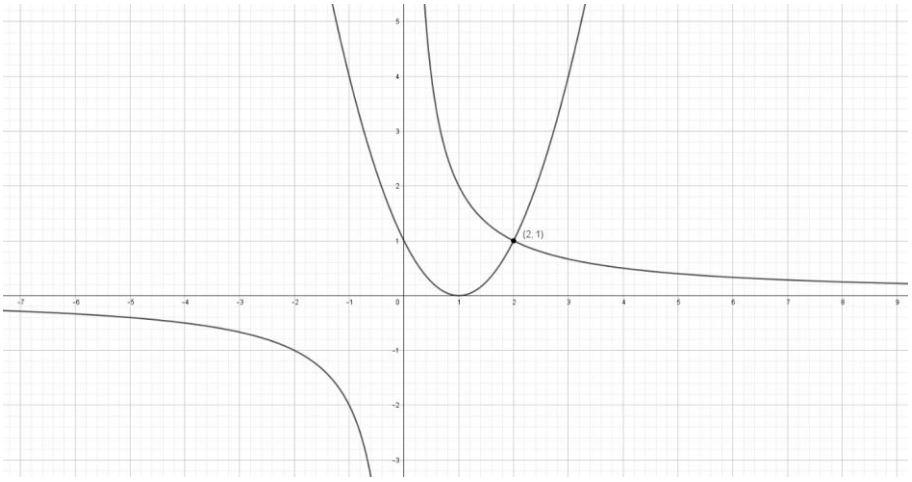
1. A megoldás: $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 5$



2. A megoldás: $x \geq 3$

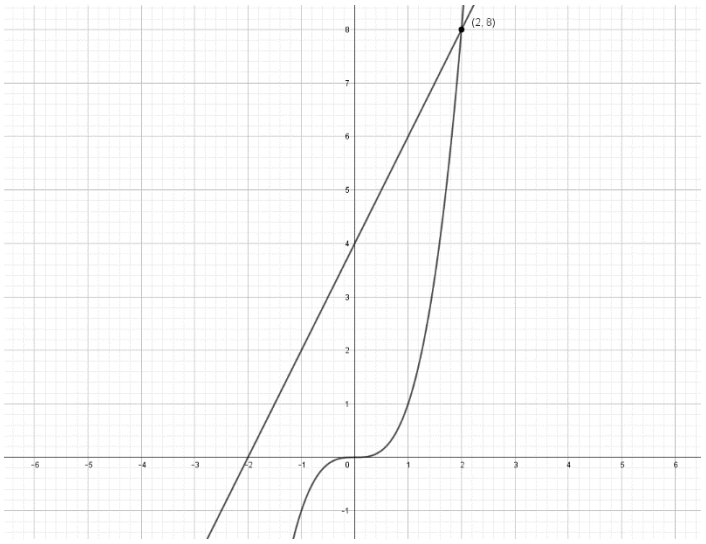


3. A megoldás: $x = 2$

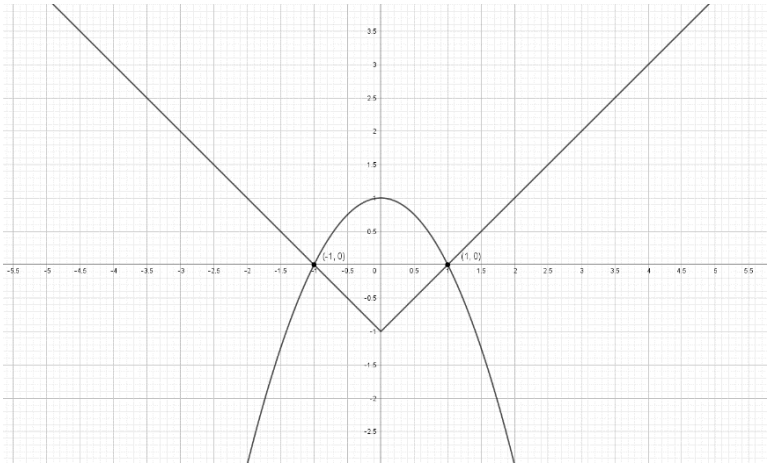


9.10.19

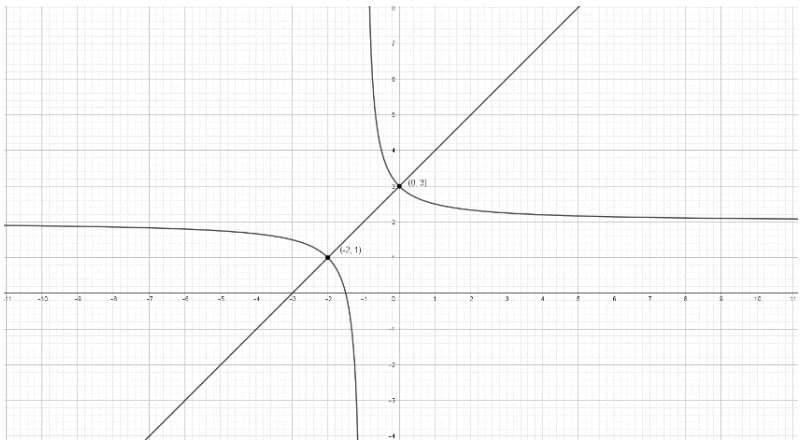
1. A megoldás: $x = 2$



2. A megoldás: $x_1 = -1;\ x_2 = 1$

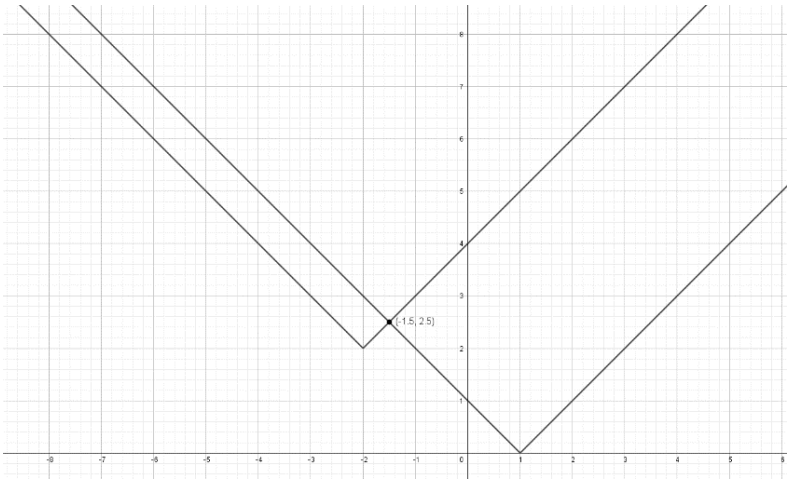


3. A megoldás: $x_1 = -2;\ x_2 = 0$

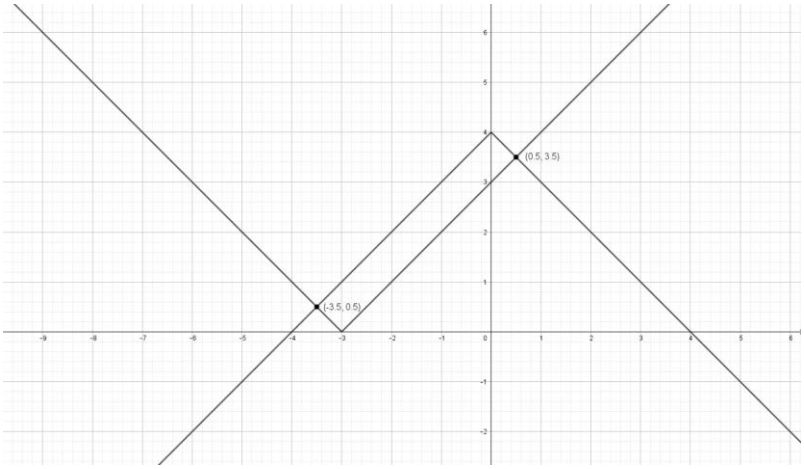


9.10.20

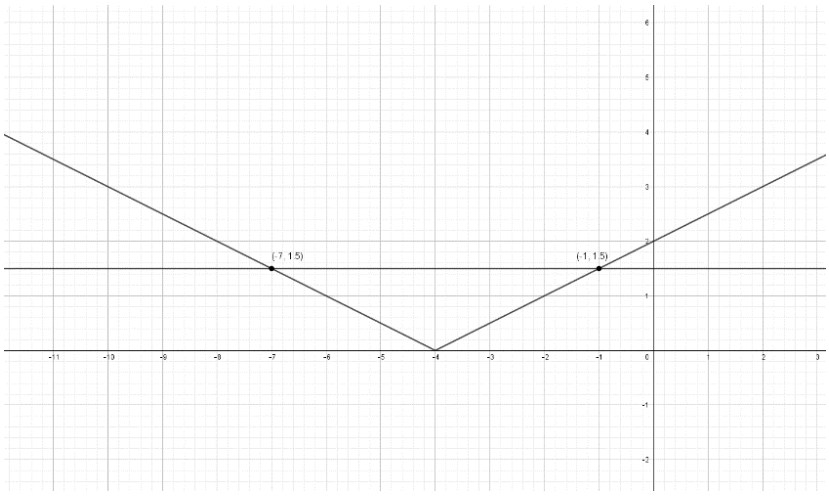
1. A megoldás: $x \leq -1{,}5$



2. A megoldás: $x \leq -3{,}5 \; vagy \; x \geq 0{,}5$

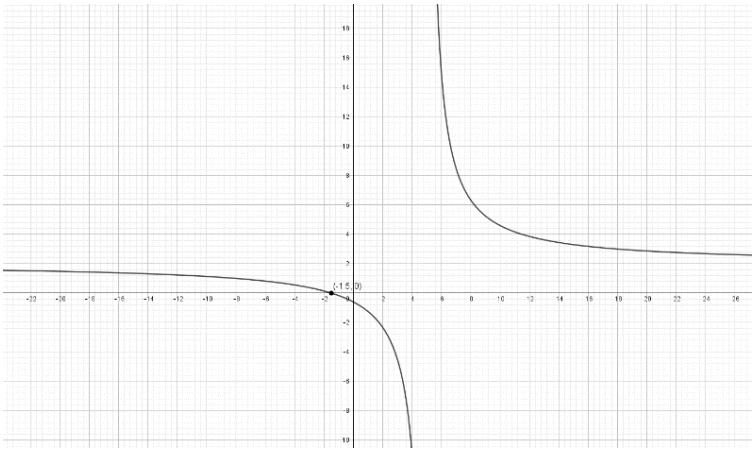


3. A megoldás: $x < -7 \; vagy \; x > -1$

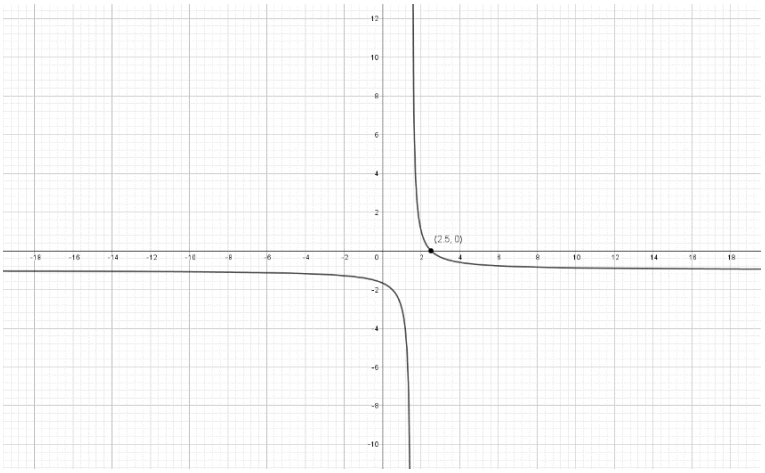


9.10.21

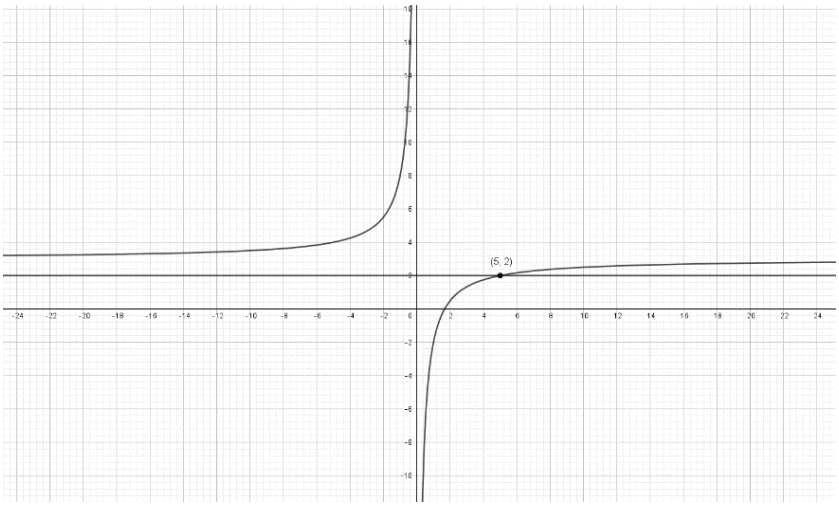
1. A megoldás: $-1{,}5 < x < 5$



2. A megoldás: $1{,}5 < x < 2{,}5$

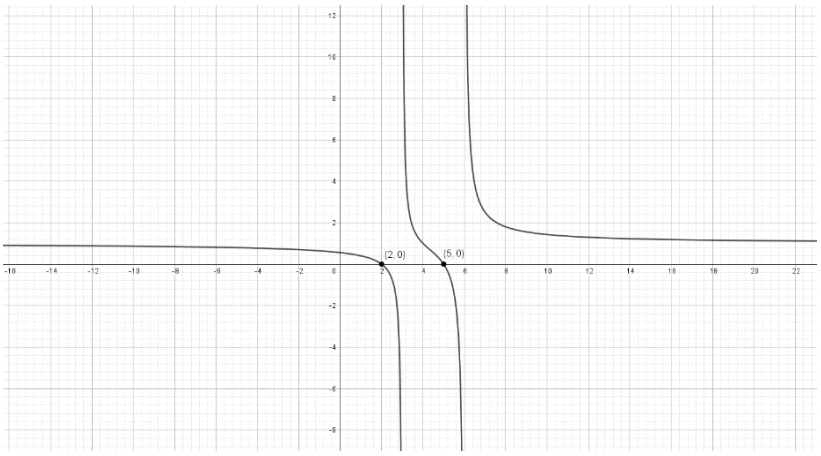


3. A megoldás: $0 \leq x \leq 5$

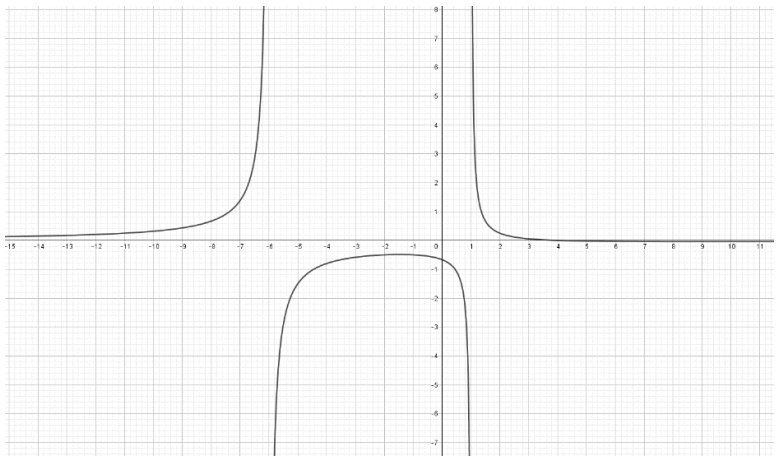


9.10.22

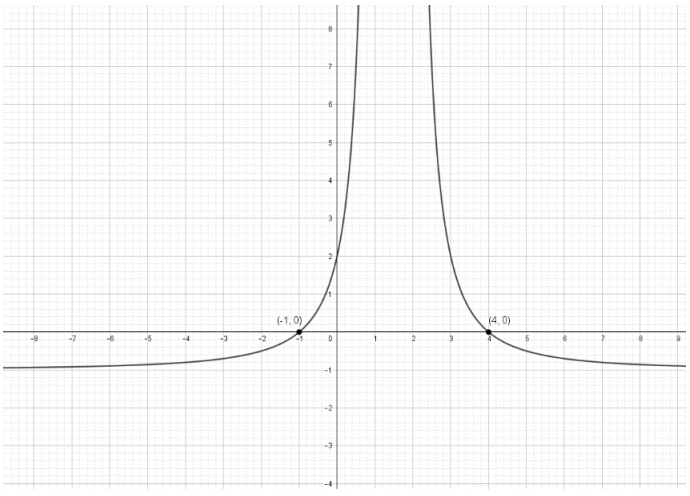
1. A megoldás: $x \leq 2 \; vagy \; 3 \leq x \leq 5 \; vagy \; x \geq 6$



2. A megoldás: $x < -6 \; vagy \; x > 1$

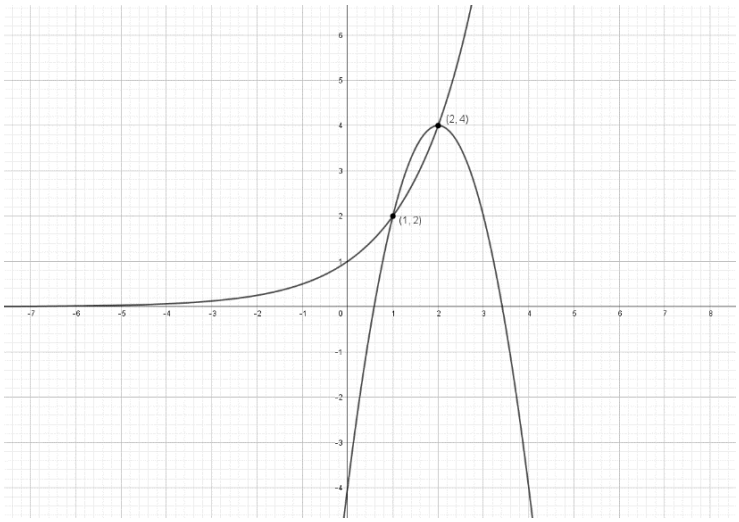


3. A megoldás: $x \leq -1 \; vagy \; x \geq 4$

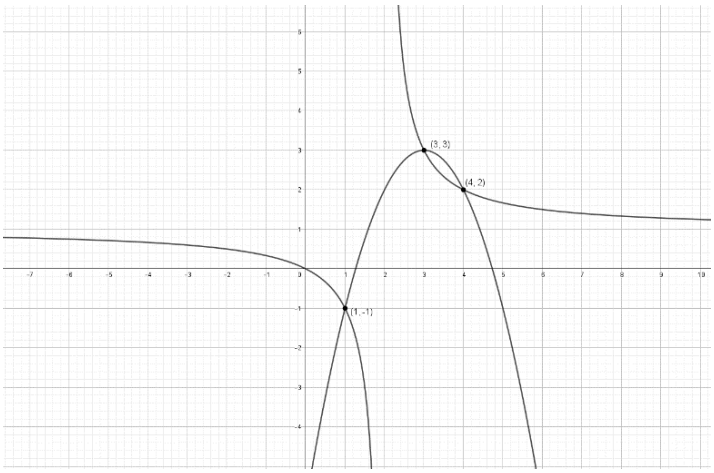


9.10.23

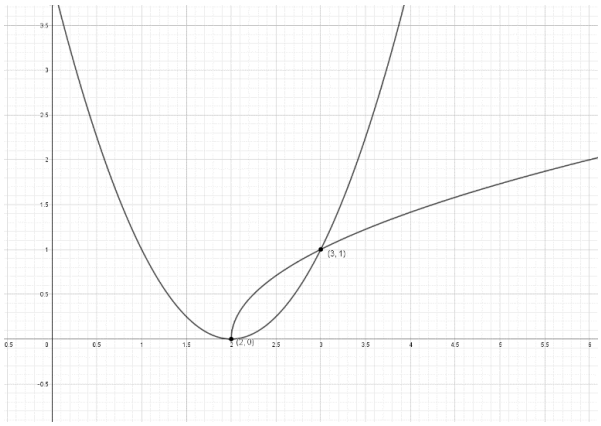
1. A megoldás: $1 \leq x \leq 2$



2. A megoldás: $1 \leq x \leq 2 \; vagy \; 3 \leq x \leq 4$

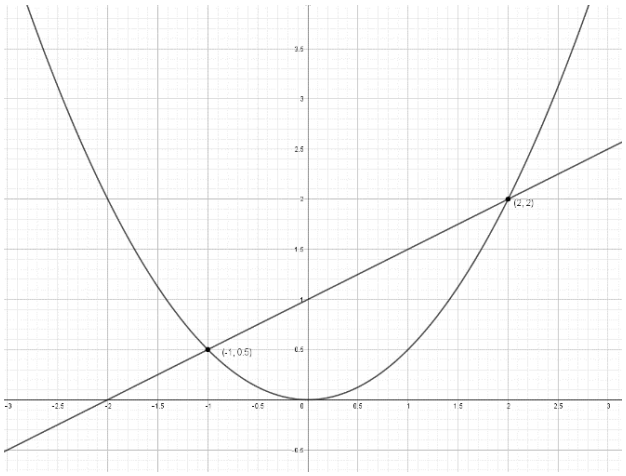


3. A megoldás: $2 < x < 3$

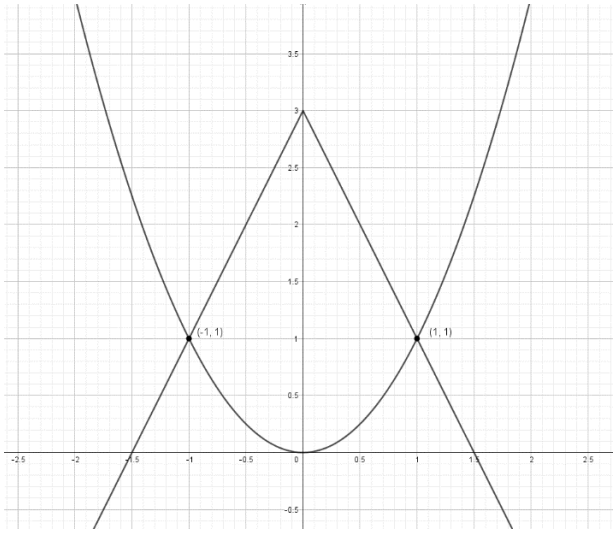


9.10.24

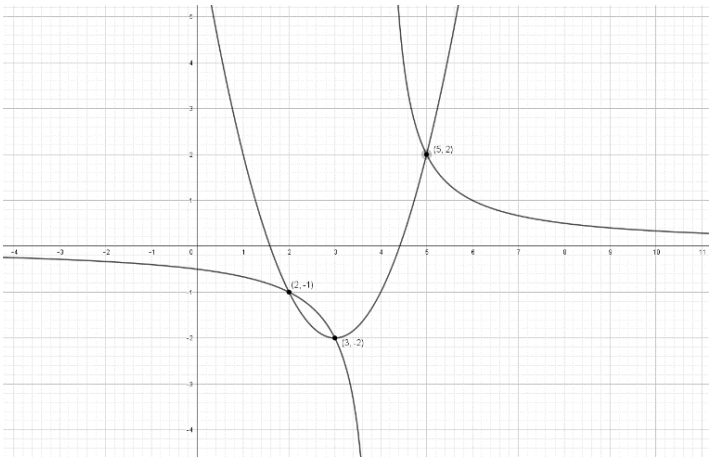
1. A megoldás: $-1 \leq x \leq 2$



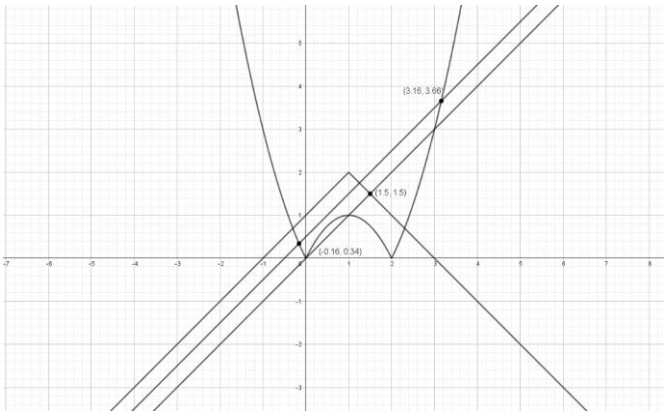
2. A megoldás: $-1 \leq x \leq 1$



3. A megoldás: $2 < x < 3 \; vagy \; 4 < x < 5$



9.10.25 A megoldás:



9.10.26 A megoldás:

1. páros, 2. páros, 3. páratlan, 4. páros, 5. nem páros és nem páratlan, 6. páros függvény

9.10.27 A megoldás:

1. A periódus: $\frac{5\pi}{2}$ 2. A periódus: 12π 3. A periódus: 3π

9.10.28 A megoldás:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=-\dfrac{3}{5}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+5)}=-\dfrac{1}{7}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}=\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}=1$

9.10.29 A megoldás:

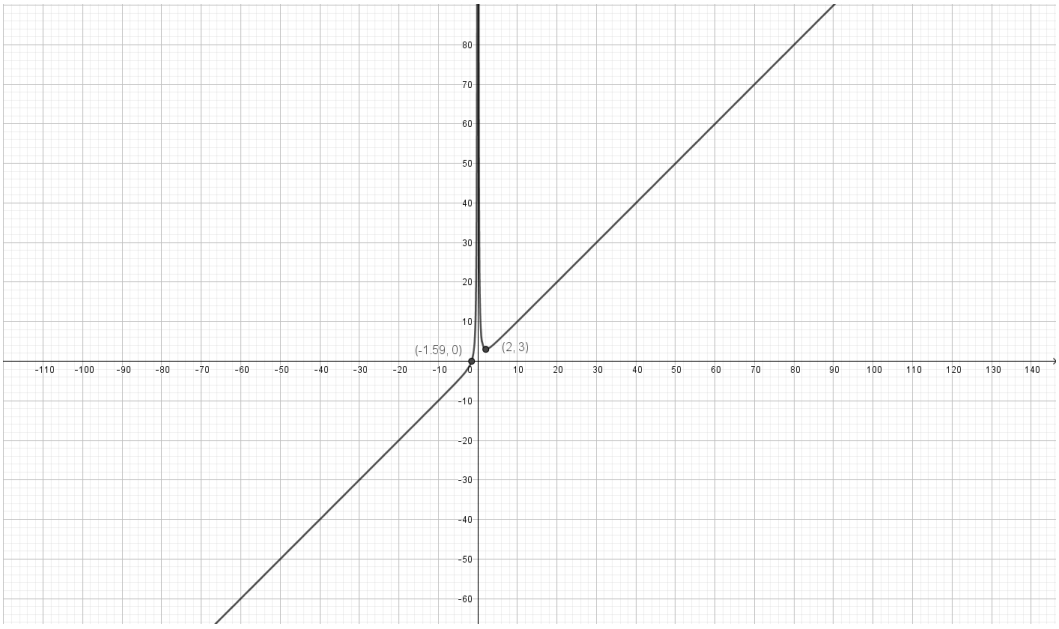
1. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^x=\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^x=\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{\frac{1}{3}}{x}\right)^x=e^{\frac{1}{3}}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x-3}{8x+9}\right)^{5x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+9-12}{8x+9}\right)^{5x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-12}{8x+9}\right)^{5x-2}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\left(1+\frac{-12}{8x+9}\right)^{8x+9}\right]^{\frac{1}{8x+9}}\right\}^{5x-2}=\lim_{x\to\infty}(e^{-12})^{\frac{5x-2}{8x+9}}=(e^{-12})^{\frac{5}{8}}=e^{-\frac{15}{2}}$$

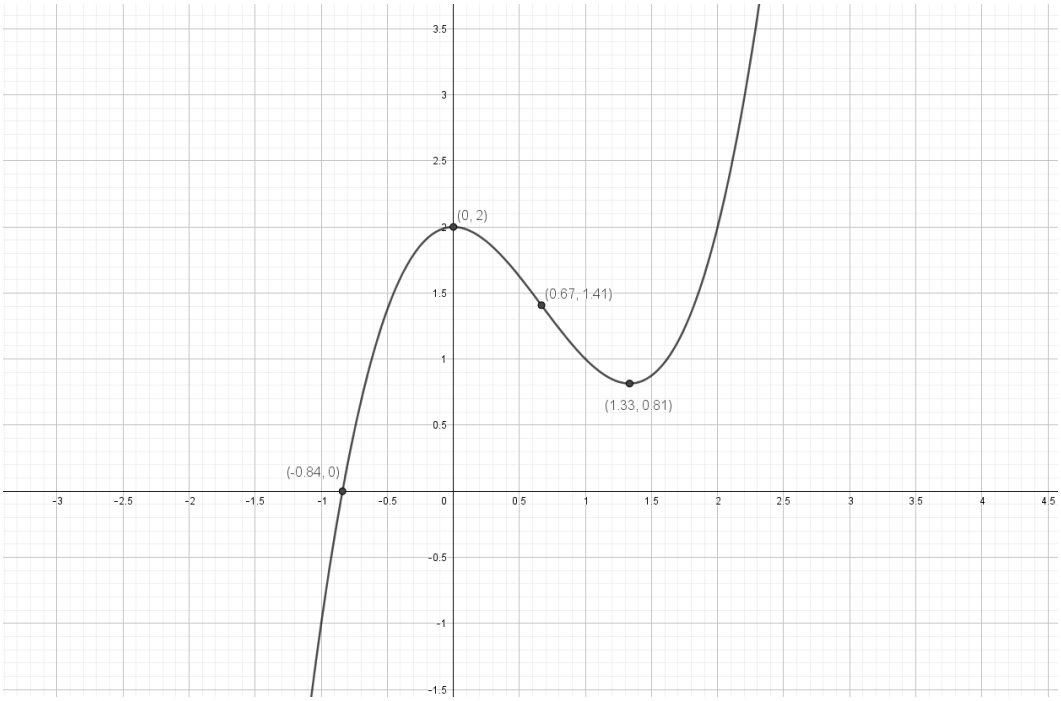
9.10.30 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}\backslash\{\boldsymbol{0}\}$
Tengelymetszetek	$M(-1{,}59;0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
Folytonosság	*nem folytonos, szakadási pontja az x=0*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	$x=0\ egyenes$
Szélsőérték	$P(2{,}3)\ min.$
Inflexiós pont	*nincs*
Monotonitás	$]-\infty,0[\ sz.m.nő,\ ]0{,}2[\ sz.m.cs.,\ ]2,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty,0[\ konvex,\ ]0,\infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



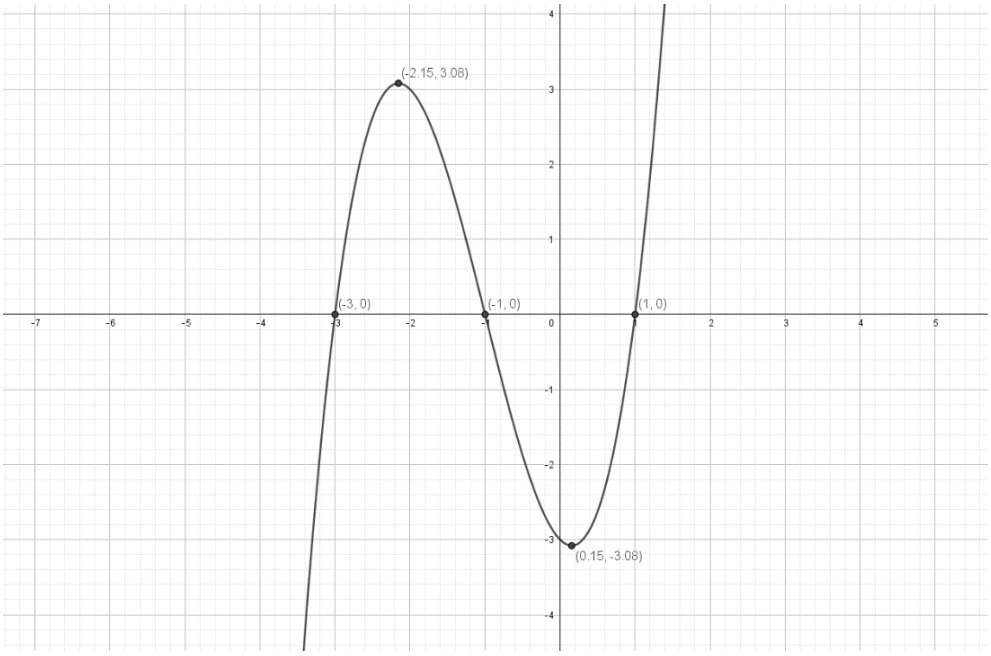
9.10.31 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M(-0{,}84; 0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(0{,}2)\ max. P_2(1{,}33; 0{,}81)\ min.$
Inflexiós pont	$I(0{,}67; 1{,}40)$
Monotonitás	$]-\infty, 0[$ *és* $]1{,}33; \infty[\ sz.m.nő,]0; 1{,}33[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty; 0{,}67[\ konkáv,]0{,}67; \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



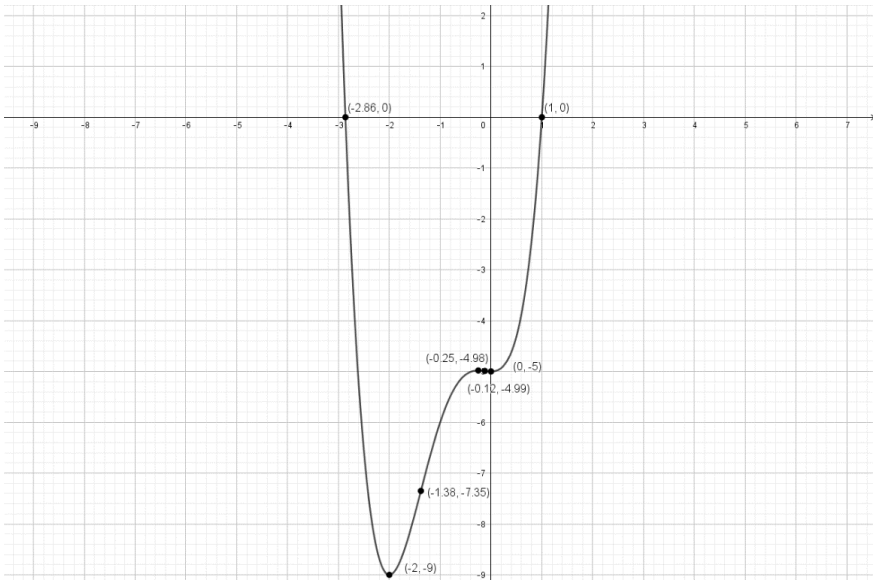
9.10.32 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-3,0)\ M_2(-1,0)\ M_3(1,0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-2{,}15; 3{,}08) max. P_2(0{,}15; -3{,}08) min.$
Inflexiós pont	$I(-1,0)$
Monotonitás	$]-\infty; -2{,}15[$ és $]0{,}15; \infty[\ sz.m.nő,\ ]-2{,}15; 0{,}15[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty, -1[\ konkáv,\ ]-1, \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



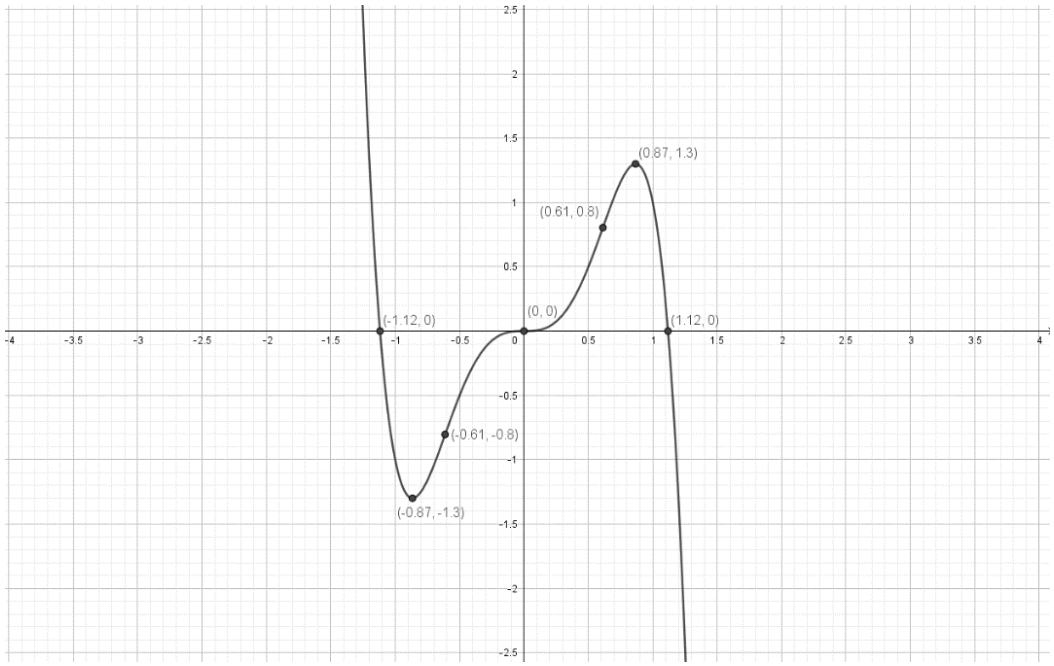
9.10.33 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-2{,}86; 0)\ M_2(1{,}0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-2,-9)\ P_2(0,-5)\ min.,\ P_3(-0{,}25; -4{,}98)\ max.$
Inflexiós pont	$I_1(-1{,}38; -7{,}35)\ I_2(-0{,}12; -4{,}99)$
Monotonitás	$]-\infty,-2[$ és $]-0{,}25; 0[\ sz.m.cs.$ $]-2; -0{,}25[$ és $]0,\infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty; -0{,}12[$ és $]-1{,}38;\infty[\ konvex$,$]-0{,}12; -1{,}38[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \geq -2$



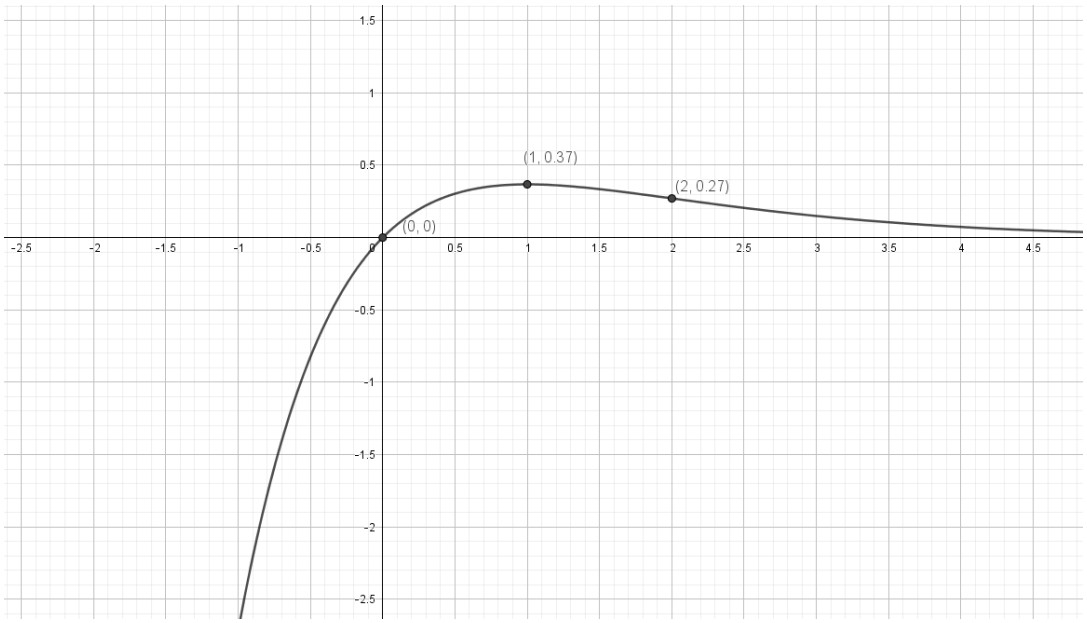
9.10.34 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M_1(-1{,}12;0)\ M_2(0{,}0)\ M_3(1{,}12;0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*páratlan függvény*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P_1(-0{,}87;-1{,}3)\ min.\ P_2(0{,}87;1{,}3)\ max.$
Inflexiós pont	$I_1(-0{,}61;-0{,}8)\ I_2(0{,}0)\ I_3(0{,}61;0{,}8)$
Monotonitás	$]-\infty;\ -0{,}87[$ és $]0{,}87;\infty[\ sz.m.cs.$ $]-0{,}87;0[$ és $]0;0{,}87[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty;-0{,}61[$ és $]0;0{,}61[\ konvex,]-0{,}61;0[$ és $]0{,}61;\infty[\ konkáv$
Értékkészlet	$y \in \boldsymbol{R}$



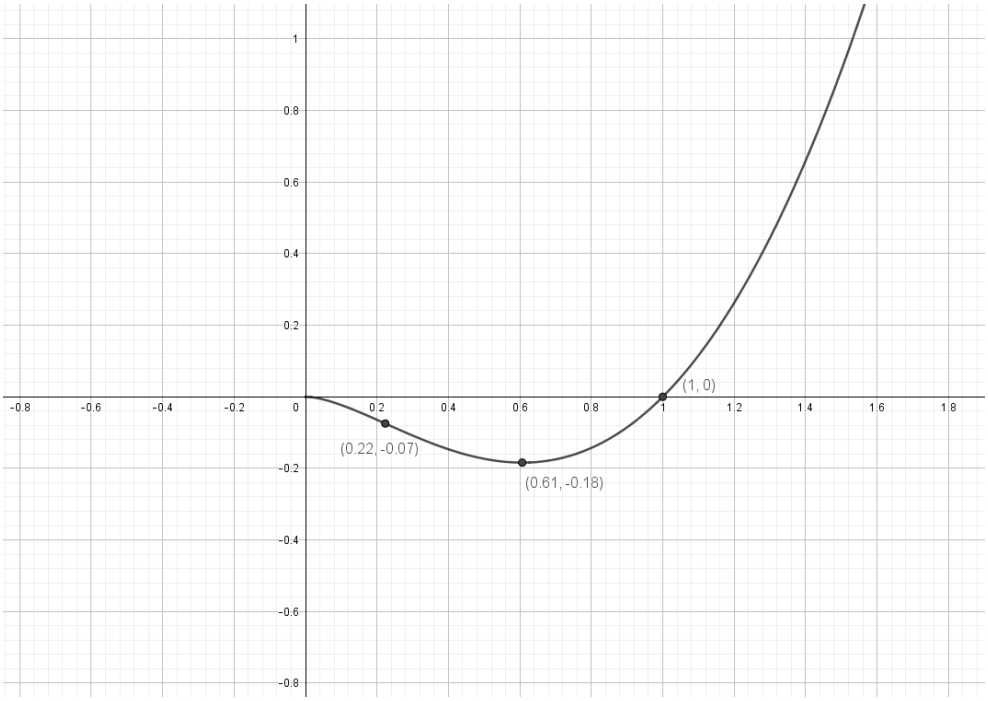
9.10.35 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x \in \boldsymbol{R}$
Tengelymetszetek	$M(0{,}0)$
Határértékek	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P(1; 0{,}37)\ max.$
Inflexiós pont	$I(2; 0{,}27)$
Monotonitás	$]-\infty, 1[\ sz.m.nő,]1, \infty[\ sz.m.cs.$
Konvexitás	$]-\infty, 2[\ konkáv,]2, \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \leq 0{,}37$



9.10.36 A megoldás:

Értelmezési tartomány	$x > 0$
Tengelymetszetek	$M(1,0)$
Határértékek	$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Folytonosság	*folytonos függvény*
Periodicitás	*nem periodikus*
Paritás	*nem páros, nem páratlan*
Asszimptota	*nincs*
Szélsőérték	$P(0{,}61; -0{,}18)\ min.$
Inflexiós pont	$I(0{,}22; -0{,}07)$
Monotonitás	$]0; 0{,}61[\ sz.m.cs.,\ ]0{,}61; \infty[\ sz.m.nő$
Konvexitás	$]-\infty; 0{,}22[\ konkáv,\ ]0{,}22; \infty[\ konvex$
Értékkészlet	$y \geq -0{,}18$


(1, 0)
(0.22, -0.07)
(0.61, -0.18)

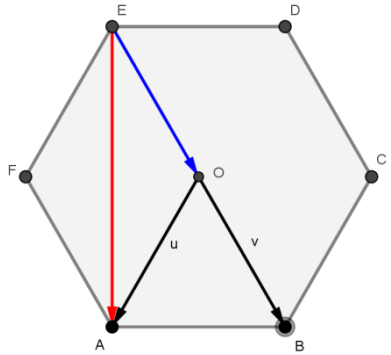
10. Koordinátageometria

10.1. Vektorok, osztópontok

10.1.1.

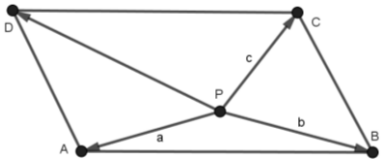
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\underline{u} - \underline{v}$$
$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} = -\underline{u} + 2\underline{v}$$
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \underline{v} - \underline{u} + \underline{v} = 2\underline{v} - \underline{u}$$
$$\overrightarrow{OG} = \frac{\underline{u} + \underline{v}}{2}$$

10.1.2.

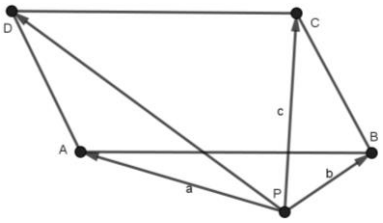


$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = -\underline{u} + \underline{v} - \underline{u} = -2\underline{u} + \underline{v}$$
$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA} = \underline{v} + \underline{u}$$

10.1.3.

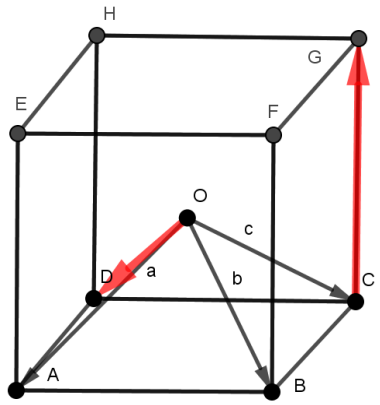


10.1.4.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC},$$
$$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \overrightarrow{PD}$$
$$\overrightarrow{PD} = \underline{c} + \underline{a} - \underline{b}$$

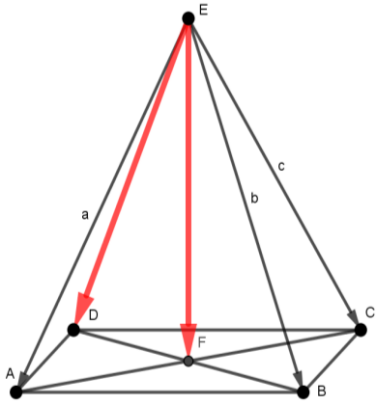
10.1.5.



$$\overrightarrow{OD} = \underline{c} + \underline{a} - \underline{b}$$

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \underline{b} = -(\overrightarrow{OD}) - \underline{b} = \underline{-c} - \underline{a}$$

10.1.6.

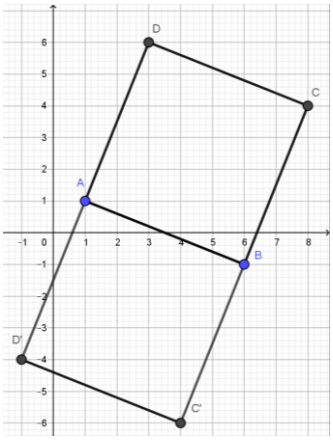


$$\overrightarrow{OD} = \underline{c} + \underline{a} - \underline{b}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\underline{c} + \underline{a}}{2}$$

10.1.7.

a)



$$\overrightarrow{AB} = (5,-2)\ ;\ \overrightarrow{AD} = (2,5)\ ;\ \overrightarrow{AD'} = (-2,-5)$$

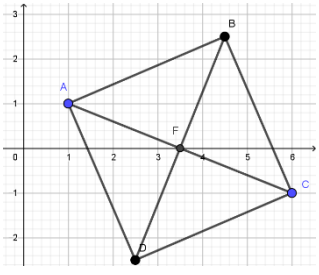
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\ \ ;\ \overrightarrow{OD} = (3,6)\ \ ;D(3,6)$$

$$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD'}\ \ ;\ \overrightarrow{OD'} = (-1,-4)\ \ ;D'(-1,-4)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD}\ \ ;C(8,4)$$

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD'}\ \ ;C(4,-6)$$

b)



$$F = (3.5,0)\ ;\ \overrightarrow{FA} = (-2.5;1)$$

$$\overrightarrow{FB} = (1,2.5)\ ;\ \ \overrightarrow{FD} = (-1,-2.5)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB}\ \ ;\ \overrightarrow{OB} = (4.5,2.5)\ \ ;B(4.5,2.5)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FD}\ \ ;\ \overrightarrow{OD} = (2.5-2.5)\ \ ;D(2.5-2.5)$$

10.1.8.

A merőlegesség miatt a megadott vektorok skaláris szorzata 0.($\underline{a}+2\underline{b})(5\underline{a}-4\underline{b})=5\underline{a}^2+6\underline{ab}-8\underline{b}^2$. Mivel $|\underline{a}|=|\underline{b}|$, az $5\underline{a}^2+6\underline{ab}-8\underline{b}^2=-3|\underline{a}|^2+6|\underline{a}|^2\cos\alpha=0$. Ebből $\cos\alpha=0.5$. Így a két vektor által bezárt α szög 60°

10.1.9. Az előző feladat alapján $\cos\alpha=-0.2$. Ebből $\alpha\approx101.54°$

10.1.10. A feltétel alapján $|\underline{a}|=|\underline{b}|$. Vizsgáljuk meg a két vektor skaláris szorzatát: $(2\underline{b}-\underline{a})(5\underline{a}+4\underline{b})=6\underline{ab}+8\underline{b}^2-5\underline{a}^2=6|\underline{a}|^2\cos120°+3|\underline{a}|^2=0$, így a $2\underline{b}-\underline{a}$ és az $5\underline{a}+4\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra.

10.1.11.

a)

$$\log_3(xy)-\log_3 x=(\log_3 x+\log_3 y)-\log_3 x=\log_3 y>0\rightarrow\log_3(xy)>\log_3 x$$

$$\log_3\left(\frac{y}{x}\right)-\log_3 y=(\log_3 y-\log_3 x)-\log_3 y=-\log_3 x>0\rightarrow\log_3\left(\frac{y}{x}\right)>\log_3 y$$

ezekből következik, hogy az $\overrightarrow{OQ}$ vektor mindkét koordinátája nagyobb, mint az $\overrightarrow{OP}$ vektor megfelelő koordinátái.

b) Vizsgáljuk meg az $\overrightarrow{OP}$ és az $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$ vektorok skaláris szorzatát, aztán hosszukat!

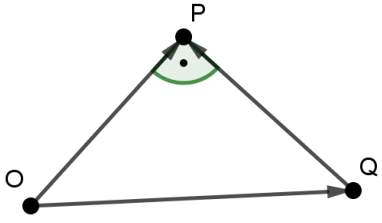
$$\overrightarrow{OP}\cdot\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\right)=\log_3 x\cdot(\log_3(xy)-\log_3 x)+\log_3 y\cdot\left(\log_3\left(\frac{y}{x}\right)-\log_3 y\right)=0$$

Tehát ez a két vektor merőleges egymásra!

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{\log_3{}^2 x+\log_3{}^2 y};$$

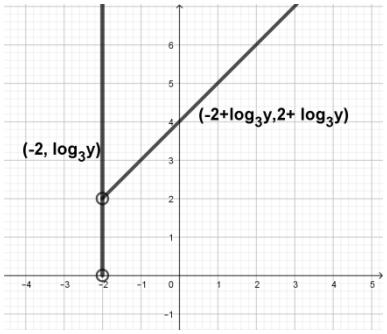
$$\left|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}\right|=\sqrt{(\log_3(xy)-\log_3 x)^2+\left(\log_3\left(\frac{y}{x}\right)-\log_3 y\right)^2}=\sqrt{\log_3{}^2 x+\log_3{}^2 y};$$

Mivel egyenlő hosszúak, az OPQ háromszög egyenlő szárú derékszögű háromszög, a keresett hajlásszög 45°

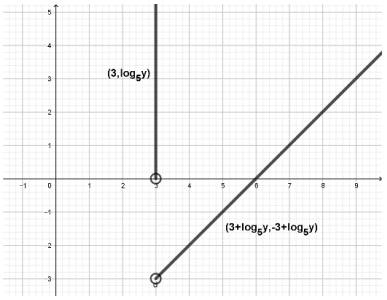


c) $\overrightarrow{OP}\left(\log_3\frac{1}{9},\log_3 y\right)=\overrightarrow{OP}(-2,\log_3 y)$

$$\overrightarrow{OQ}\left(\log_3\frac{1}{9}y,\frac{y}{\frac{1}{9}}\right)=\overrightarrow{OQ}(-2+\log_3 y,2+\log_3 y)$$



10.1.12.



a) Lásd az előző feladatot!

b) Az előző feladat alapján a keresett hajlásszög 45°

c) $\overrightarrow{OT}(\log_5 125, \log_5 y) = \overrightarrow{OP}(3, \log_3 y)$

$\overrightarrow{OS}\left(\log_5 125y, \log_5 \frac{y}{125}\right) = \overrightarrow{OS}(3+\log_3 y, -3+\log_3 y)$

10.1.13.

a) $\underline{a}\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \underline{b}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$

b)

$$|\underline{a}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1; |\underline{b}| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}}\ ;\ \underline{a}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\cdot\underline{b}\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{8}+\frac{3}{8} = \frac{3-\sqrt{3}}{8} = 1\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\cos\alpha$$

ebből $\cos\alpha = \frac{3-\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{10}}$, vagyis α=84.25°

c) Ha a két vektor merőleges egymásra, skaláris szorzatuk 0.
Így cos p·sin^2 p+sin p·cos^2 p=sin p·cos p·(sin p+cos p)=0. Ebből vagy sin p=0, akkor

p_1=l·π(l∈Z), vagy

cos p=0, akkor p_2=½π+m·π(m∈Z), vagy sin p + cos p=0, akkor p_3=-¼π+k·π. (k∈Z)

10.1.14.

a) $\underline{a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \underline{b}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

b) $|\underline{a}| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{1}} = 1; |\underline{b}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \underline{a}\cdot\underline{b} = \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha$

ebből $\cos\alpha = 1$, vagyis α=0°

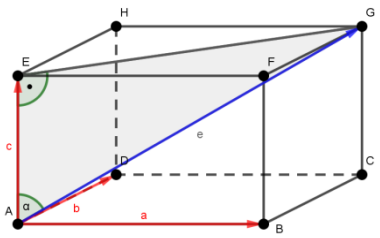
c) Ha a két vektor merőleges egymásra, skaláris szorzatuk 0.
Így sin m·sin^2 m+(-cos m)·cos^2 m=sin^3 m –cos^3 m=

=(sin m-cos m)·(sin^2 m+sin m ·cos m+cos^2 m)=0. Ebből vagy sin m-cos m=0, akkor

p=¼π+k·π (k∈Z), vagy sin^2 m+sin m ·cos m+cos^2 m=0, azaz sin m ·cos m =-1, azaz

sin (2m)=-2, ami nem lehetséges.

10.1.15.

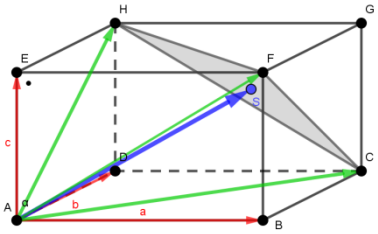


a) Lapátló vektorok: $\overrightarrow{AC} = \underline{a}+\underline{b}, \overrightarrow{AF} = \underline{a}+\underline{c}, \overrightarrow{AH} = \underline{b}+\underline{c}$. A testátló vektor: $\overrightarrow{AG} = \underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$. Így a 3-3 él, illetve lapátló vektor és a testátló vektor összege:

$\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}+(\underline{a}+\underline{b})+(\underline{a}+\underline{c})+(\underline{b}+\underline{c})+(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})=4\cdot(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})=\overrightarrow{AT}$

b) Az $|\overrightarrow{AG}| = \sqrt{5^2+4^2+3^2} = \sqrt{50}$. Így $|\overrightarrow{AT}| = 4\cdot\sqrt{50}$

c)Mivel az $\overrightarrow{AT} \| \overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{AT}$ hajlásszöge megegyezik $\overrightarrow{AE}$ és $\overrightarrow{AG}$ hajlásszögével. Így az AGE háromszögben: $tg\alpha = \frac{EG}{AE} = \frac{\sqrt{5^2+4^2}}{3}$ Ebből α≈64.9°.



d) Tekintsük azt a térbeli koordinátarendszert, melynek origója az A pont. Ekkor a háromszög súlypontjába mutató AS helyvektorra a súlypontra vonatkozó tétel alapján:

$\overrightarrow{AS} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AH}}{3} = \frac{2}{3}\cdot(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) = \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AG}$. Tehát

$\overrightarrow{AT} \| \overrightarrow{AS}$, így $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AS} = 4\cdot\sqrt{50}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{50}\cdot\cos 0° = \frac{400}{3}$

10.1.16.

Az előző feladat alapján:

a) $3\cdot(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}) = \overrightarrow{AT}$

b) $|\overrightarrow{AT}| = 36\cdot\sqrt{3}$

c) $tg\alpha = \frac{EG}{AE} = \frac{\sqrt{2}\cdot 12}{12} = \sqrt{2}$ Ebből α≈54.74°

d) $\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{AS} = 36\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 12\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 0° = 864$

10.1.17.

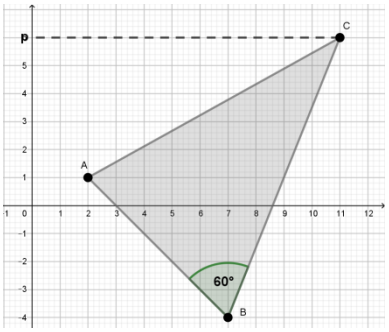
$\overrightarrow{BA}(-5,5) \to |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{50}; \overrightarrow{BC}(4,p+4) \to |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{p^2+8p+32}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -5\cdot 4+5\cdot(p+4) = \sqrt{50}\cdot\sqrt{p^2+8p+32}\cdot\cos 60°$

$5p = \frac{\sqrt{50(p^2+8p+32)}}{2}, \qquad (\to 5p>0,\ p>0)$

$25p^2 = \frac{50p^2+400p+1600}{4}$

$50p^2-400p-1600 = 0$



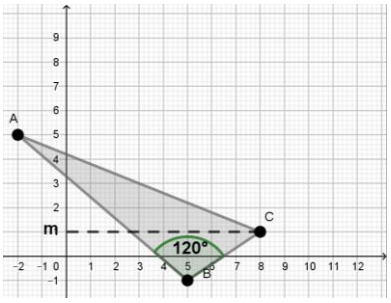
ebből p_1≈10.93 vagy p_2≈-2.93, ebből csak a p_1 megoldás.

10.1.18.

$\overrightarrow{BA}(-7,6) \to |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{85}; \overrightarrow{BC}(3,m+1) \to |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{m^2+2m+10}$

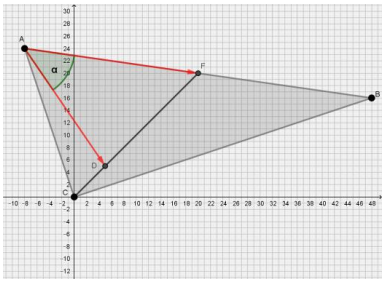
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -7\cdot 3+6\cdot(m+1) = \sqrt{85}\cdot\sqrt{p^2+2m+10}\cdot\cos 120°$

$15-6m = \frac{\sqrt{85(p^2+2m+10)}}{2} \qquad \left(\to 15-6m>0, m<\frac{5}{2}\right)$



ebből m_1≈15.02 vagy m_2≈0.05, ebből csak az m_2 megoldás a zárójelben jelzett feltétel miatt.

10.1.19.



F(20,20), D(5,5), $\overrightarrow{AF}$ (28,-4), $\overrightarrow{AD}$ (13,-19)

$$\cos\alpha = \frac{28\cdot 13+4\cdot 19}{\sqrt{800\cdot 530}}$$

Ebből α=47.49°

10.1.20.

Az előző feladat alapján

α=21.8°

10.1.21.

$(\underline{a}+3\underline{b})\cdot(7\underline{a}-5\underline{b}) = 7\underline{a}^2+16\underline{ab}-15\underline{b}^2=0$

$(\underline{a}-4\underline{b})\cdot(7\underline{a}-2\underline{b}) = 7\underline{a}^2-30\underline{ab}+8\underline{b}^2=0$

Az első egyenletet 15-el szorozzuk, a másodikat 8-al, és a kapott egyenleteket összeadjuk, akkor $161\underline{a}^2-161\underline{b}^2=0 \Rightarrow \underline{a}^2=\underline{b}^2 \Rightarrow |\underline{a}|^2=|\underline{b}|^2$, ezt felhasználva az első egyenletbe visszahelyettesítve: $-8|\underline{a}|^2+16\underline{ab}=0 \Rightarrow \underline{ab}=0.5|\underline{a}|^2$, és ez a $|\underline{a}|^2=|\underline{b}|^2$ feltétellel egyszerre akkor teljesülhet, ha mindkét vektor zérus vektor, vagy egyenlő hosszúak és 60°-os szöget zárnak be.

10.1.22.

$$\underline{ab} = (2-2p)(x+1)+x^2(5-p) = \sqrt{(2-2p)^2+(x^2)^2}\cdot\sqrt{(x+1)^2+(5-p)^2}\cdot\cos\alpha$$

Ha α tompaszög, akkor az egyenlőség jobb oldala minden esetben negatív, tehát a baloldalnak is minden esetben negatívnak kell lennie.

$2x-2px+2-2p+5x^2-px^2 < 0$

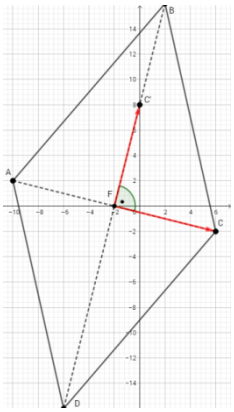
$(5-p)x^2+(2-2p)x+2-2p < 0$ akkor teljesül minden x-re, ha ennek a másodfokú kifejezésnek nincs zérushelye, azaz a diszkriminánsa kisebb, mit 0, és $5-p < 0$. Ez utóbbiból $p > 5$.

A diszkrimináns miatt: $4p^2-8p+4-4(5-p)(2-2p) < 0$, azaz $4p2-40p+36 > 0$, amiből $p < 1$, vagy $p > 9$. A $p < 5$ feltétel miatt a megoldás: $p > 9$.

10.1.23.

a) Az AC szakasz felezőpontja F, így F(-2,0),

$\overrightarrow{FC}(8,-2)$, 90°-os elforgatottja: $\overrightarrow{FC}'(2,8)$



ennek kétszerese:

$\overrightarrow{FB}(4,16)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OF}(-2,0)+\overrightarrow{FB}(4,16)=(2,16)$

Tehát B(2,16)

Mivel F felezi a DB szakaszt: D(-6,-16)

b)

Az előzőhöz hasonlóan:

B(-1,4); D(-3,-4)

10.1.24.

a) $\overrightarrow{AB}(12,-6)$, 90°-os elforgatottja $\overrightarrow{AB}'(6,12)$, vagy $\overrightarrow{AB}''(-6,-12)$, így $\overrightarrow{AD1}(18,36)$ vagy $\overrightarrow{AD2}(-18,-36)$. $\overrightarrow{OD1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD1}$ illetve $\overrightarrow{OC1}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AD1}$, tehát a lehetséges megoldások: D1(15,38), C1(27, 32), vagy D2(-21,-34), C2(-9,-40).

b) Az előzőhöz hasonlóan: D1(-1,6), C1(11, 0), vagy D2(-5,-2), C2(7,-8).

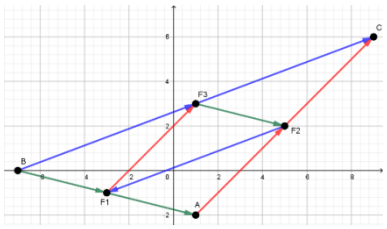
10.1.25.

a)

$\overrightarrow{F3F2}(4,-1)=\overrightarrow{BF1}=\overrightarrow{F1A}$; $\overrightarrow{F1F3}(4,4)=\overrightarrow{AF2}=\overrightarrow{F2C}$;

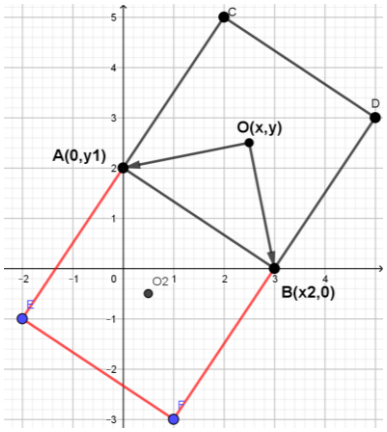
$\overrightarrow{F1F2}(8,3)=\overrightarrow{BF3}=\overrightarrow{F3C}$;

Így A(1,-2), B(-7,0), C(9,6)



b) Az előzőhöz hasonlóan A(7,2), B(-2,-1), C(-1,0)

10.1.26.



$\overrightarrow{OA}(-x, y1-y); \overrightarrow{OB}(x2-x,-y)$

Az $\overrightarrow{OA}$ 90°-os elforgatottjai: $\overrightarrow{OA'}(y1-y, x)$ vagy $\overrightarrow{OA''}(y-y1,-x)$.

I. eset: $\overrightarrow{OA'}(y1-y, x)=\overrightarrow{OB}(x2-x,-y)$, ekkor x = -y

II. eset: $\overrightarrow{OA''}(y-y1,-x)=\overrightarrow{OB}(x2-x,-y)$, ekkor -x = -y, vagyis x = y

Tehát a négyzet középpontjának koordinátái egyenlők, vagy egymás ellentettei.

10.1.27. Legyen A(0,y1), B(x2,2) a szomszédos csúcsok. A rombusz középpontja O(x,y).

Ekkor $\overrightarrow{OA}(-x, y1-y); \overrightarrow{OB}(x2-x,2-y)$

Az $\overrightarrow{OA}$ 90°-os elforgatottjai: $\overrightarrow{OA'}(y1-y, x)$ vagy $\overrightarrow{OA''}(y-y1,-x)$.

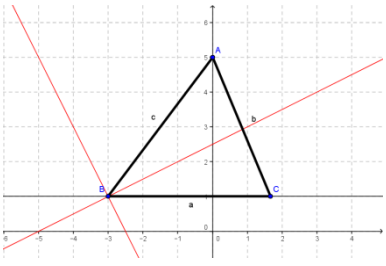
I. eset: $\overrightarrow{OA'}(y1-y, x)=2\overrightarrow{OB}(2(x2-x),4-2y)$, ekkor x = 4-2y, vagyis a középpont koordinátái kielégítik az x+2y-4=0 egyenes egyenletét.

II. eset: $\overrightarrow{OA''}(y-y1,-x)=2\overrightarrow{OB}(2(x2-x),4-2y)$, ekkor -x =4-2y, vagyis a középpont koordinátái kielégítik az x-2y+4=0 egyenes egyenletét.

10.2.Egyenesek

10.2.1. Az oldalegyenesek egyenletei: a: y-1=0, b: 12x+5y-25=0, c:4x-3y+15=0.

Így az B csúcsnál lévő szögfelezők egyenlete felírható: $\left|\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\right|=\left|\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\right|$



$\left|\frac{y-1}{1}\right|=\left|\frac{4x-3y+15}{\sqrt{16+9}}\right|$

$y-1=\frac{4x-3y+15}{5}$ *vagy* $-y+1=\frac{4x-3y+15}{5}$

$x-2y+5=0$, illetve $2x+y+5=0$

Az első esetben a normálvektor $(1,-2)$, tehát az irányvektor $(2,1)$, a meredekség pozitív, tehát az ábra alapján ez a belső szögfelező egyenlete, míg a második egyenlet a külső szögfelező egyenlete.

A többi szögfelező kiszámítása hasonló elv alapján:

Az A csúcsnál lévő külső szögfelező egyenlete: x+8y-40=0

Az A csúcsnál lévő belső szögfelező egyenlete: 8x-y+5=0

A C csúcsnál lévő külső szögfelező egyenlete:3x-2y-3=0

A C csúcsnál lévő belső szögfelező egyenlete: 6x+9y-19=0

10.2.2.

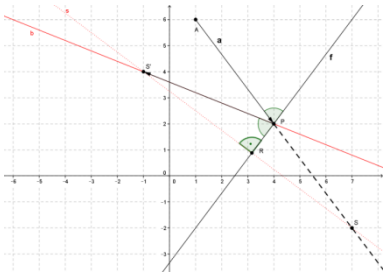
a) A két egyenes hajlásszöge megegyezik normálvektoraik - $\underline{n}_1,\underline{n}_2$ - hajlásszögével, így a skaláris szorzat segítségével

$$\cos\alpha = \frac{\underline{n}_1 \cdot \underline{n}_2}{|\underline{n}_1| \cdot |\underline{n}_2|} = \frac{16}{65}$$

Ebből $\alpha=75{,}75°$

b) Az a) részhez hasonlóan $\alpha=97{,}77°$

10.2.3.



A golyó becsapódási, és visszacsapódási szöge megegyezik. Ha kijelölünk az A pontból induló, $\underline{a}$ vektor által meghatározott egyenesen (a) egy pontot (S), és ebből merőlegest állítunk az adott f egyenesre, akkor ez utóbbi két egyenes metszéspontjaként definiálható R pont felezi az SS' szakaszt, ahol S' az a pont, amelyen a golyó a visszacsapódás után áthalad.

Az a egyenes egyenlete: $4x+3y=22$. Ezen egy tetszőleges S pont koordinátái: S(7,-2).

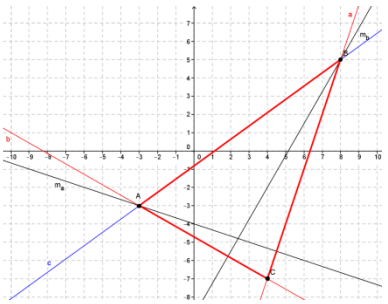
Az S-re illeszkedő, f-re merőleges (s) egyenes egyenlete: $3x+4y=13$. Ez az f egyenest az R pontban metszi.

$$R\left(\frac{79}{25},\frac{22}{25}\right)$$

Mivel az R felezi az SS' szakaszt, így S'(-1,4)

A golyó visszacsapódási irányára illeszkedő egyenes egyenlete, az S' és P pont alapján: $2x+5y=18$

10.2.4. Az előző feladat alapján a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenlete: $x-7y-9$.

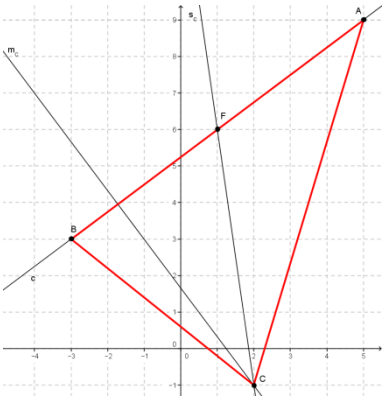


10.2.5. I: Az a egyenes egyenletét megkapjuk a C pont és a rá merőleges (m_a) egyenes egyenletéből: $-3x+y=-19$. II: A b egyenes egyenletét megkapjuk a C pont és a rá merőleges (m_b) egyenes egyenletéből: $4x+7y=-33$. III: Az A pont kiszámítható az m_a és a b egyenes metszéspontjaként: A(-3,-3). IV: A B pont kiszámítható az m_b és az a egyenes metszéspontjaként: B(8,5). V. Az A,B pontokból felírható a c oldal egyenlete: $-8x+11y=-9$

10.2.6. Az előző feladat alapján az oldal egyenesek egyenletei:

$2x+7y=-22$, $7x+2y=13$, $x-y=-2$

10.2.7. Első lépésben meghatározzuk a C pont koordinátáit a két megadott egyenletből: C(2,-1). Utána A B pontra illeszkedő, m_c-re merőleges egyenes egyenlete: -3x+4y=21. Ez a C-vel szemközti oldal. Ez a megadott súlyvonallal az F pontban metszik egymást. F (1,6). Ez a pont felezi az AB szakaszt, így az A(5,9)



10.2.8. Az előző feladat alapján: B(9,5), C(4/3,1/3)

10.2.9. Az előző feladat alapján: 9x+y=32

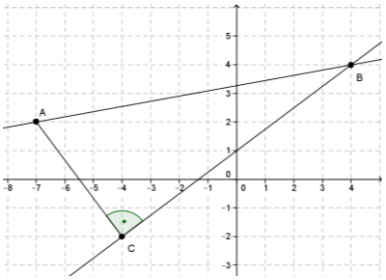
10.2.10. A súlypont koordinátái: S(-2,4). A B csúcson áthaladó magasságvonal egyenlete: x+3y-12=0.

Pont és egyenes távolsága: $d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right| = \left|\frac{-2+3\cdot 4-12}{\sqrt{1+9}}\right| = \frac{2}{\sqrt{10}}$

10.2.11. A súlypontból és az A,B pontokból a C(-4,5). A BC oldal felezőmerőlegese: 8x-5y+12.5=0.

A súlypont és a felezőmerőleges távolsága az előző feladat alapján: $\frac{8{,}5}{\sqrt{89}}$

10.2.12. A terület nagysága független attól, hogy a megadott pontok közül melyik illeszkedik az átfogóra. Legyen ez az A(-7,2). Ekkor az átfogóval szemközti csúcs a megadott (-4,-2). Az átfogó egyenlete (illeszkedik az A pontra, meredeksége 2/11): 2x-11y+36=0. A C csúcsra illeszkedő, AC befogóra merőleges befogó egyenlete: 3x-4y+4=0. E két egyenes metszéspontja megadja a B csúcsot. A CB befogó hossza 10, az AC befogó hossza 5, így a háromszög területe 25 területegység.



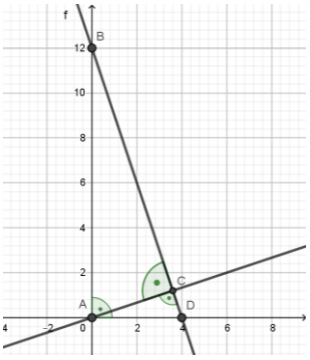
10.2.13. A 10.2.3 feladat alapján a hajlásszögük: 56,31°, a keresett távolság: 7/13

10.2.14. A két oldalegyenes metszéspontja B(4,3). Ebből, a súlypontból és az A pontból C(1,4). Így a harmadik oldal egyenlete 2x-3y+10=0. A 10.2.3 alapján a belső szögek: 24.23°, 127.87°, 27.9°.

A távolság : $\frac{3}{\sqrt{13}}$

10.2.15. Három ilyen háromszög van.

I. eset: A két befogó a két koordinátatengely, ekkor a másik két csúcs koordinátái (0,12), (4.0), a terület: 24.



II. eset: Az átfogó az y tengely, ekkor a másik befogó az origóra illeszkedő, a 3x+y=12 egyenesre merőleges egyenes, ekkor a derékszögű csúcs (3.5 ;1.2), a befogók hossza:

$\frac{6\sqrt{10}}{5}, \frac{18\sqrt{10}}{5}$, a terület így 21,6.

III. eset: Az átfogó az x tengely, ekkor a másik befogó szintén az origóra illeszkedő, a 3x+y=12 egyenesre merőleges egyenes, és a derékszögű csúcs (3.5 ;1.2), a befogók hossza:

$\frac{6\sqrt{10}}{5}, \frac{2\sqrt{10}}{5}$, a terület így 2,4.

10.2.16.

$\frac{-a-2}{a+3b+5}=\frac{a+2}{2a+b-2}$ a) A két egyenes párhuzamos, ha meredekségük megegyezik.

Nevezőkkel beszorozva: –(a+2)·(2a+b-2)=(a+2)(a+3b+5), egy oldalra rendezve (a+2)-t kiemelve:

I. eset: a=-2, akkor bϵR\{-1,6}, mert az a+3b+5 és 2a+b-2 külön- külön nem lehet 0.

II. eset: 3a+4b+3=0, amiből b=-(a+1)/4, ahol aϵR\{11/5}.

Ha mindkét meredekség nevezője 0, akkor is párhuzamos a két egyenes: a=11/5, b=-12/5.

10.2.17. Az y=2x-et behelyettesítve az első két egyenletbe: mx-2x=2, illetve x-2mx=-3m-1.

$x=\frac{2}{m-2}\,(m\neq 2); x=\frac{-3m-1}{1-2m}\left(m\neq\frac{1}{2}\right)$ Ezekből

$\frac{2}{m-2}=\frac{-3m-1}{1-2m}\Rightarrow 3m^2-9m=0\Rightarrow m_1=0; m_2=3$

Könnyen belátható, hogy az m=2, illetve m=0.5 ellentmondó egyenletekhez vezet, így a megoldás csak az m=0, illetve m=3.

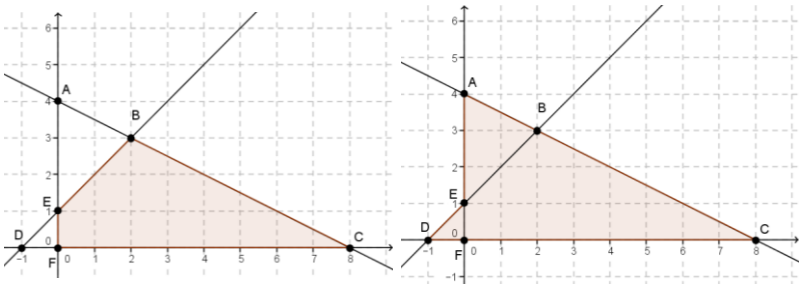
10.2.18.

a) A 4 egyenes normálvektorai: (4,-3), (3,-4), (5,3), (3,5). Ezek között nincs két egymásra merőleges, így a négyszögnek nem lehet derékszöge

b) Az egyenletekből kiszámolhatók a négyszög csúcsainak koordinátái: A(0,-5), B(20/3,0), C(0,4), D(-3,0). Így az AC átló az y tengelyre, a BD átló pedig az x tengelyre illeszkedik.

c) A normálvektorok segítségével az A csúcsnál lévő szög 84,09°, a C csúcsnál pedig 95,91°-os, így teljesül, hogy szemközti szögeinek összege 180°, így húrnégyszög.

10.2.19.

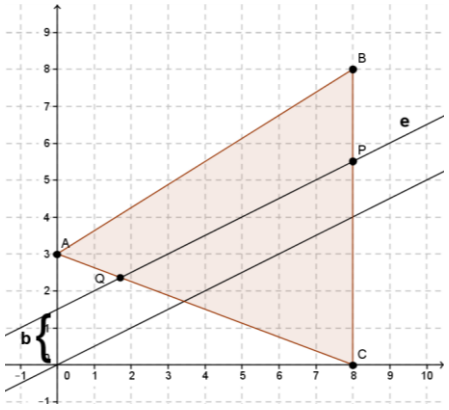


Metszéspontok: A(0,4), B(2,3), C(8,0), D(-1,0), E(0,1), F(0,0).

a) A konvex négyszög egy trapéz és egy háromszög területének összege, T=4+9=13 területegység.

b) A konkáv négyszög kerülete: AC+CD+DE+EA= $\sqrt{80}+9+\sqrt{2}+3\approx 22.36$

10.2.20. A háromszög területe: 32 területegység. A keresett egyenes (e) párhuzamos az x-2y=0 egyenessel, így egyenlete: y=0.5x+b. A P pont legyen az 'e' és a BC egyenes metszéspontja, így P(8,4+b). Az AC egyenes egyenlete: 3x+8y=24. A Q pont ez 'e' egyenes és az AC egyenes metszéspontja, így:



$Q\left(\frac{24-8b}{7},\frac{12+3b}{7}\right)$

A PQC háromszög területe 16, alapja PC, tehát a P pont 2. koordinátája, magassága a PC oldal, és a Q pont távolsága, azaz 8 mínusz a Q pont első koordinátája. Így:

$$16=\frac{(4+b)\cdot\left(8-\frac{24-8b}{7}\right)}{2}\Rightarrow b_1=-4+2\sqrt{7}, b_2=-4-2\sqrt{7}$$

Ebből csak a b_1 megoldás, tehát az 'e' egyenes egyenlete:

$$y=0.5x-4+2\sqrt{7}$$

10.2.21. Mivel a keresett egyenesnek adott egy pontja (6,-3) elegendő egy irányvektor az egyenletéhez. Ehhez tekintsünk az e: x+2y=12 egyenesen egy tetszőleges pontot, legyen ez a P(0,6) pont. Akkor a másik egyenesen tekintsünk egy olyan pontot, amely első koordinátája kielégíti az adott feltételt, azaz Q1(-4,y1), Q2(4,y2). Tehát két megoldás lehetséges. Mivel Q1 és Q2 is illeszkedik az f: x+2y=6 egyenesre, y1=5, y2=1. Tehát Q1(-4,5), Q2(4,1). Így a keresett egyenes irányvektorai:

$\overrightarrow{PQ1}(-4,-1), \overrightarrow{PQ2}(4,-5)$

Így a keresett egyenletek: x-4y=18, illetve 5x+4y=18

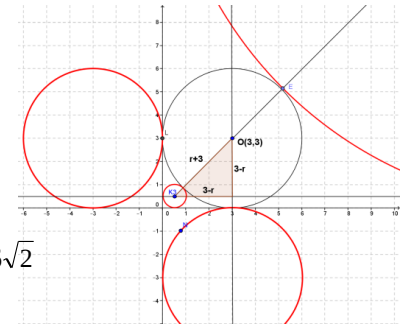
10.2.22. Az előző feladathoz hasonlóan: x+y=4, illetve 2x-y=2

10.2.23. Az e: x+y=5 egyenes 1 ordinátájú pontja A(4,1). Ebben a pontban az ’e’-re merőleges ’f’ egyenes egyenlete: x-y=3. Mivel y=0.5x a feltétel, ezt behelyettesítve az egyenes egyenletébe: x=6, így y=3. Így a keresett pont a (6,3).

10.2.24. Az AB oldal irányvektora (15,-10)=(3,-2). Az adott egyenes egy normálvektora (2,3), tehát egy irányvektora (3,-2), így párhuzamos az AB oldallal. Tehát a háromszög AB oldalhoz tartozó magassága az adott egyenes egy tetszőleges pontjának távolsága az AB oldal egyenesétől. AZ AB oldal egyenlete 2x+3y-30=0. Az AB oldal hossza $\sqrt{325}$. Az adott egyenes egy tetszőleges pontja a (3,0). Ennek a távolsága az AB oldal egyenesétől $\frac{24}{\sqrt{13}}$. Így a háromszög területe $\frac{\sqrt{325}\cdot\frac{24}{\sqrt{13}}}{2}=60$.

10.3.Körök

10.3.1. A feladat triviális megoldásai azok a körök, melyek középpontja a $K_1(-3,3)$, illetve $K_2(3,-3)$ és sugaruk szintén három egység. Ezek egyenletei:$(x+3)^2+(y-3)^2=9$, illetve $(x-3)^2+(y+3)^2=9$. Van még két további kör az első sík negyedben, a kisebbik sugara legyen r. Ekkor az ábra alapján:



$$r+3=\sqrt{2}\cdot(3-r)\Rightarrow r+\sqrt{2}\cdot r=3\cdot\sqrt{2}-3\Rightarrow r=\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{2}+1}=3\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^2=9-6\sqrt{2}$$

Középpontja $K_3(r,r)$, Így a kisebbik kör egyenlete:

$$\left(x-9+6\sqrt{2}\right)^2+\left(y-9+6\sqrt{2}\right)^2=\left(9-6\sqrt{2}\right)^2$$

A nagyobbik kör sugara legyen R. Ekkor az előzőekhez hasonlóan középpontja $K_4(R,R)$, sugara:

$$R+3=\sqrt{2}\cdot(R-3)\Rightarrow\sqrt{2}\cdot R-R=3\cdot\sqrt{2}+3\Rightarrow r=\frac{3\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}-1}=3\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)^2=9+6\sqrt{2}$$

egyenlete: $\left(x-9-6\sqrt{2}\right)^2+\left(y-9-6\sqrt{2}\right)^2=\left(9+6\sqrt{2}\right)^2$

10.3.2. A második egyenletből x=1-2y, ezt behelyettesítve az első egyenletbe, és $a=2^{2y}$ helyettesítést bevezetve az a^2-5a+4=0 egyenlethez jutunk, melynek megoldásai a=1, és a=4.

Ebből y1=0, x1=1, illetve y2=1, x2=-1. Így az egyenletrendszer két megoldása P1(1,0), illetve P2(-1,1). Ezek közül a feladat feltételeinek a P1 pont felel meg.

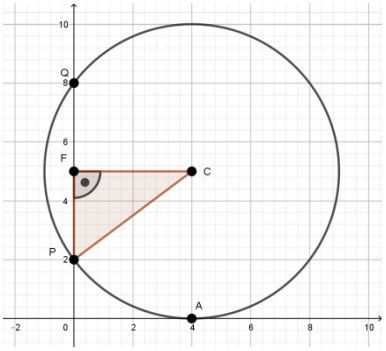
10.3.3. Az egyenletrendszer megoldásai $M_1(100, 0.1)$, $M_2(0.1,100)$. Mindkét pont a megadott körön kívül található.

10.3.4. A két egyenletben a zárójeleket felbontjuk, majd a két egyenletet kivonjuk egymásból, 16x+4y-24=-144, ebből y=-30-4x. Ezt behelyettesítve az első köregyenletbe, $17x^2+288x+1216=0$ egyenletet kapjuk, melynek gyökei:

$$x_1 = -8, x_2 = \frac{-152}{17} \Rightarrow M_1(-8,2); M_2\left(\frac{-152}{17}, \frac{98}{17}\right)$$

10.3.5. A két kör metszéspontja az előző feladathoz hasonlóan: A(1,6), B(2-1). Az ABP háromszög területe: 12 területegység.

10.3.6. A kör és az y tengely metszéspontját jelöljük P illetve Q ponttal, a kör középpontját C-vel. A PQ szakasz felezőpontját F-el. Ekkor a PF szakasz hossza 3, FC szakasz hossza 4, és ugyanennyi a középpont első koordinátája(u) is az érintés miatt. A PFC derékszögű háromszögben $3^2+4^2=r^2$. Ebből r=5. A kör általános egyenlete $(x-u)^2+(y-v)^2=r^2$. Ebbe a (4,0) pontot, u=4-et, és a sugarat behelyettesítve v=±5. Így a köregyenletek: $(x-4)^2+(y\pm5)^2=25$



10.3.7. Az előző feladat alapján $(x\pm13)^2+(y-5)^2=169$

10.3.8. Az előző feladat alapján v=±24. Könnyen belátható, hogy a v=-24 nem lehetséges. Így az általános egyenletbe a megadott pontot behelyettesítve u=±15, Így a keresett kör lehetséges egyenletei: $(x\pm15)^2+(y-24)^2=625$

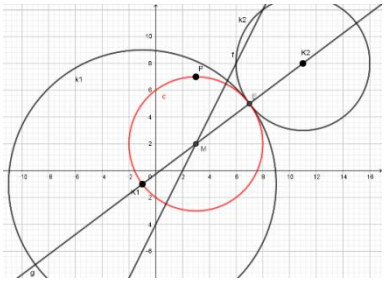
10.3.9. Mivel a kör érinti az e: 2x+y=19 egyenest a P pontban, a középpontjának rajta kell lennie a P ponton áthaladó, és az e egyenesre merőleges f: x-2y=-3 egyenesen. A kör a koordinátatengelyekből ugyanakkora hosszú szakaszokat vág le, tehát a középpontjának a g: y=x vagy az y=-x egyenesre is illeszkednie kell. Tehát a kör középpontját az f és g egyenesek

$K_1(3,3)$ vagy $K_2(-1,1)$metszéspontja adja meg. A sugár, a középpontok és a P pont távolsága, így a keresett köregyenlet: $(x-3)^2+(y-3)^2=20$ vagy $(x+1)^2+(y-1)^2=80$.

10.3.10. A háromszög csúcsai: A(-2,-1), B(2,-3), és C(5,6). A köré írható kör középpontja a felezőmerőlegesek metszéspontjaként: K(2,2), sugara 5. Így az egyenlete: $(x-2)^2+(y-2)^2=25$. A beírható kör sugarához először számítsuk ki az oldalak hosszát, ezekből a háromszög kerületét, majd (a Héron képlet segítségével vagy egyéb módon) a területét, ez 21. Ezután a $T=r\cdot s$ (ahol T a háromszög területe, s a fél kerület) segítségével $r=T/s$, így $r\approx 0.88$.

10.3.11. Írjuk fel az ABC háromszög köré írható körének egyenletét, ha a D pont rajta van ezen a körön, akkor ABCD négyszög húrnégyszög. Az AB oldal felezőmerőlegese: $3x-y=-8$. A BC oldalé: $x+y=0$. Metszéspontjuk a kör középpontja, ez K(-2,2). A kör sugara a KA távolság, ez 5. Így a kör egyenlete: $(x+2)^2+(y-2)^2=25$. A D pont koordinátái kielégítik, tehát a körön van, így a megadott pontok valóban egy húrnégyszög csúcspontjai.

10.3.12. A két megadott kör (k1,k2) érinti egymást, mert középpontjaik – K1(-1,-1), K2(11,8) - távolsága 15, és sugaraik - r1=10, r2=5 - összege is 15. A középpontjaikat összekötő g egyenes egyenlete: $3x-4y=1$. A két kör metszéspontja: E(7,5). A keresett kör érinti a k1, k2 köröket, középpontja illeszkedik a

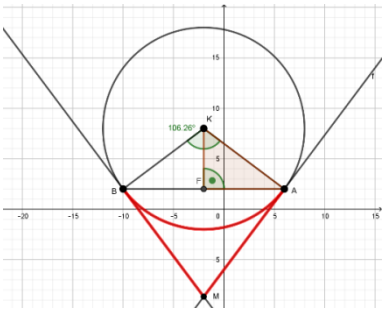


g egyenesre. Mivel áthalad az adott P ponton, ezért a középpontja az EP szakasz felezőmerőlegesére (f: $2x-y=4$) is kell, hogy illeszkedjen. A két egyenes metszéspontja megadja a keresett kör középpontját: M(3,2). a sugár a PM távolság, vagyis 5. Így a szóban forgó kör egyenlete: $(x-3)^2+(y-2)^2=25$

10.3.13. Az előző feladat alapján a két megadott kör az (1,3) pontban érinti egymást. Középpontjaikat összekötő egyenes egyenlete: $y=3$. Mivel a keresett kör érinti az x tengelyt, a középpontjának második koordinátájára, $|v|=r$, ebből most csak a $v=r$ lehetséges, azaz $r=3$. Az első koordináta (u) meghatározásához az $(1-u)^2+(3-3)^2=3^2$ egyenletet kell megoldanunk, ebből $u_1=4$, $u_2=-2$, mindkét eset lehetséges, hiszen nem kötött, hogy melyik kört érinti kívülről, és melyiket belülről. A keresett egyenletek: $(x-4)^2+(y-3)^2=9$, $(x+2)^2+(y-3)^2=9$.

10.3.14. A kör középpontja (2,4). Az érintési pontok (6,1), (6,7). Mivel az érintő merőleges az érintési pontbeli sugárra, az érintők normálvektora a (4,-3), illetve (4,3), rögzített pontjaik pedig az érintési pontok. Így az érintők egyenlete 4+3y=45 és 4x-3y=21. Metszéspontjuk M(33/4, 4).

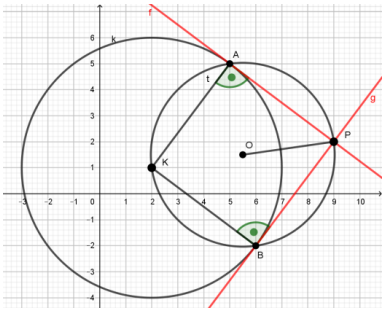
10.3.15. A kör középpontja K(-2,8), sugara 10. Az érintési pontok A(6,2), B(-10,2). Az előző feladat alapján az érintők metszéspontja M(-2,-26/3). A keresett síkidom területét megkaphatjuk, ha az ABM háromszög területéből kivonjuk az A,B pontok által meghatározott körívhez tartozó körszelet területét. Az ABM háromszög alapja 16, magassága 32/3. Így



területe: 256/3. A körszelet területéhez szükség van az AB húrhoz tartozó középponti szögre, amelynek a felét kiszámolhatjuk az AFK háromszög segítségével (ahol F az AB húr felezőpontja). α=106.26°, így a körszelet területe:

$T=0.5\cdot r^2\cdot(\alpha_{rad}-\sin\alpha) = 0.5\cdot 10^2\cdot(106.26\cdot\pi/180-\sin 106{,}26°)\approx 44.73$. Így a szóban forgó síkidom területe: $T\approx 40.6$ területegység.

10.3.16. Meg kell határozni az érintési pontokat, abból, és az adott P pontból fel lehet írni a keresett érintőket. Az érintési pontok rajta vannak az adott körön (k, középpontja K), illetve a KP átmérőjű körön (t – Thalész kör), hiszen az érintő merőleges az érintési pontbeli sugárra, így az érintési pontok derékszög alatt látszanak a KP szakaszból (Thalész –tétel). A

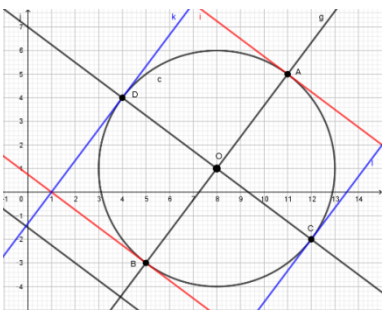


t kör középpontja a KP szakasz felezőpontja O(5.5, 1.5), sugara az OP távolság, így a t kör egyenlete: $(x-5.5)^2+(y-1.5)^2=12.5$. Az érintési pontok a t és k kör metszéspontjai: A(5,5), B(6,-2). Így a keresett érintőegyenletek:

f: -3x-4y=-35; g: 4x-3y=30

10.3.17. Az előző feladat alapján, f: 4x+3y=50 ; g: 4x-3y=2. Hajlásszögük 73.74°.

10.3.18. Az adott kör középpontja: O(8,1). Első lépésben felírjuk az O-n átmenő, f-re merőleges egyenes egyenletét, g: 4x-3y=29. Ez a kört A(11,5), B(5,-3) pontokban metszi. Az f-el párhuzamos érintők ezekre a pontokra illeszkednek, normálvektoruk megegyezik az f normálvektorával: (3,4), így az f-el párhuzamos érintők egyenlete: i: 3x+4y=53,

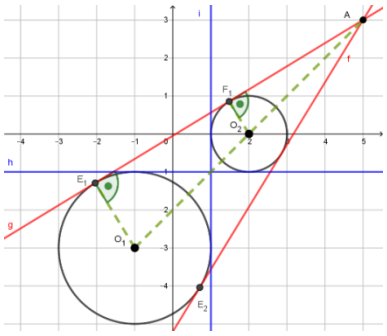


h: 3x+4y=3. Ezután felírjuk az f-el párhuzamos, O-ra illeszkedő egyenes egyenletét, j: 3x+4y=28. Ez a kört a C(12,-2) és a D(4,4) pontokban metszi. Ezek lesznek a merőleges érintők rögzített pontjai, normálvektoruk pedig az f irányvektora. Így a merőleges érintők egyenlete, l: 4x-3y=54; k:4x-3y=4

10.3.19. Az előző feladat alapján, valamint annak tudatában, hogy ha két egyenes párhuzamos, akkor meredekségük megegyezik, ha merőlegesek, akkor pedig a meredekségeik szorzata -1, a párhuzamos érintők egyenlete: 3x-4y=-23, 3x-4y=27, a merőleges érintők egyenlete 4x+3y=36, 4x+3y=14

10.3.20. Az egyenes egyenletéből x=c+y, ezt a kör egyenletébe behelyettesítve y-ra nézve kapunk egy másodfokú egyenletet, $2y^2+2y(2+c)+c^2-8c+20=0$. ennek csak egy gyöke lehet, hiszen az egyenes érintője a körnek, tehát egyenletrendszerüknek csak egy megoldása lehetséges. Így a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa $c^2-20c+36=0$, ebből c=2 vagy c=18

10.3.21. Az előző feladat alapján m=22, vagy m=-18.



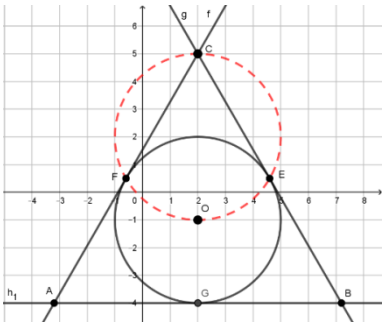
10.3.22. A két kör középpontja és sugara: $O_1(-1,-3)$, $r_1=2$, $O_2(2,0)$, $r_2=1$. A közös belső érintők párhuzamosak a koordinátatengelyekkel, így egyenletük egyszerűen leolvasható az ábrázolás segítségével: x=1; y=-1. A közös külső érintők meghatározásához először számoljuk ki a metszéspontjuk (A) koordinátáit. Az O_2AF_1 háromszög hasonló az O_1AE_1 háromszöghöz. Így: $\frac{O_2A}{O_1A}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy az O_2 az O_1A szakasz felezőpontja. Ebből A(5,3). Így már csak az A-ra illeszkedő érintőjét kell a valamely körnek meghatározni. Ez pedig 10.3.16 alapján:

$$g: 8\cdot x-\left(9+\sqrt{17}\right)\cdot y=13-3\cdot\sqrt{17}$$
$$f: 8\cdot x+\left(-9+\sqrt{17}\right)\cdot y=13+3\cdot\sqrt{17}$$

10.3.23. Ábrázolás után egyértelműen leolvasható, hogy az egyik külső érintő az y=-1 egyenes. A külső érintők metszéspontja illeszkedik erre, valamint az O_1O_2 : x-6y=15 egyenesre is, így koordinátái: M(9,-1). Ebből a pontból a körökhöz húzható másik külső érintő egyenlete, a 10.3.16 alapján: 12x-35y=143.

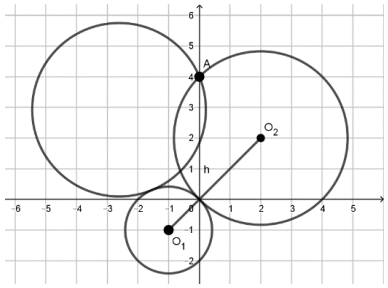
10.3.24. Először kiszámoljuk a kör és egyenes metszéspontjait, illetve a metszéspontok által meghatározott húr hosszát ($h=\sqrt{90}$), aztán a 10.3.15 alapján e a hozzá tartozó középponti szöget ($\alpha=90°$). Így a keresett körív a körvonal negyed, illetve háromnegyed része: $i_1\approx10.54$, $i_2\approx31.61$. A körszeletek területei: $t_1=12{,}84$, $t_2=128.53$.

10.3.25. A kör középpontjának abszcisszája 2 megegyezik a C első koordinátájával, így a háromszög alapja párhuzamos az x tengellyel. A beírt kör sugara 3, így az alap egyenlete y=-4. Az E,F érintési pontok rajta vannak az OC átmérőjű Thalész körön, így a Thalész kör és a beírt kör metszés-pontjaként: $E\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right), E\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$. Így a CF szár egyenlete:



$3x-\sqrt{3}y=8-6\sqrt{3}$. Ennek, és az y=3 alapnak a metszéspontja $A\left(2-3\sqrt{3};-4\right)$. Ezt A G(2,-4) pontra tükrözve $B\left(2+3\sqrt{3};-4\right)$. A háromszög alapjának, és szárainak hossza $6\sqrt{3}$, magassága 9, így kerülete: $18\sqrt{3}$, területe: $27\sqrt{3}$.

10.3.26. Az adott kör középpontja $O_1(-1,-1)$ sugara $\sqrt{2}$. A keresett körközéppontja $O_2(u,v)$, sugara $\sqrt{8}$, és illeszkedik az A(0,4) pontra, így ki kell elégítenie a $(0-u)^2+(4-v)^2=8$ egyenletet. Mivel a két kör érinti egymást kívülről a sugarak összege megegyezik a két kör középpontjának távolságával, azaz

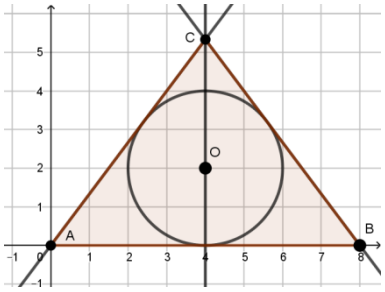


$\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{\left(u+1^2\right)+\left(v+1\right)^2}$. Azaz

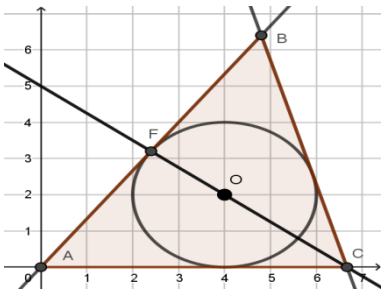
$18=(u+1)^2+(v+1)^2$. Ezt az egyenletrendszert megoldva $u_1=2, v_1=2$, illetve $u_2=-34/13$, $v_2=12/13$. Tehát a megoldás:

$(x-2)^2+(y-2)^2=8$ vagy $\left(x+\frac{34}{13}\right)^2+\left(y-\frac{12}{13}\right)^2=8$

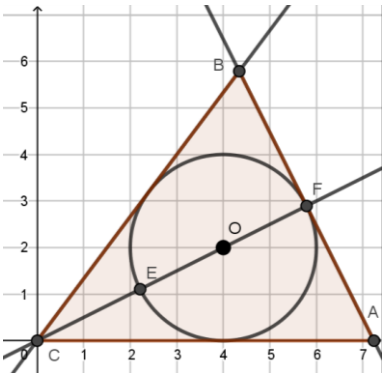
10.3.27. Három eset van. I. eset: a háromszög alapja az x tengelyre illeszkedik. Ekkor a szárak metszéspontjának abszcisszája megegyezik a beírt kör középpontjának O(4,2) első koordinátájával, tehát rajta van az x=4 egyenesen. Mivel ez a pont illeszkedik az $y=\frac{4}{3}x$ egyenesre is, így koordinátái: $C\left(4,\frac{16}{3}\right)$. Az alap egyik végpontja A(0,0). Az alap felezőpontja F(4,0), így az alap másik végpontja B(8,0). A harmadik egyenes a B,C pontokra illeszkedő egyenes, ennek egyenlete: $\frac{16}{3}x+4y=\frac{128}{3}$



II. eset: Az egyenlő szárú háromszög alapja az adott $y=\frac{4}{3}x$ egyenes (e). Az alap egyik végpontja ekkor is az A(0,0). Az alap felezőmerőlegese az O-ra illeszkedő $y=\frac{4}{3}x$-re merőleges egyenes (g), ennek egyenlete: $x+\frac{4}{3}y=\frac{20}{3}$. Ez a $C\left(\frac{20}{3},0\right)$ pontban metszi az x tengelyt, ez lesz az alappal szemközti csúcs. A g egyenes és az e egyenes metszéspontja megadja az alap felezőpontját: $F\left(\frac{12}{5},\frac{16}{5}\right)$. Ebből az alap másik végpontja $B\left(\frac{24}{5},\frac{32}{5}\right)$. A B,C pontokból megkapjuk a harmadik oldal egyenesét: 24x+7y=160.



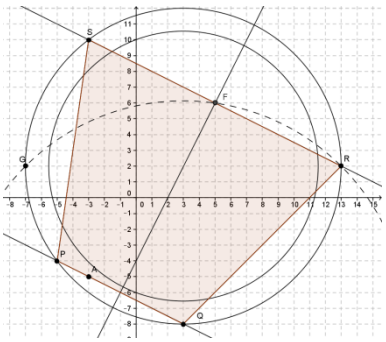
III. eset: Az ismeretlen oldal az alap. Az alappal szemközti csúcs most C(0,0). Az OC egyenes : 2x-4y=0, merőleges a harmadik oldalra, melynek felezőpontját megkapjuk a beírt kör és OC metszéspontjaként $F\left(\frac{20+4\sqrt{5}}{5},\frac{10+2\sqrt{5}}{5}\right);E\left(\frac{20-4\sqrt{5}}{5},\frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)$. Az E metszéspont nem jöhet szóba, mert az adott kör ebben az esetben nem beírt kör. Az F pontból, és a CO normálvektorból a harmadik oldal egyenlete: $2x+y=10+2\sqrt{5}$



10.3.28. A háromszög köré írt körének középpontja O(5,-3), sugara 5 egység. Mivel az adott A pont második koordinátája is -3, az OA egyenes párhuzamos az x tengellyel, így a BC egyenes merőleges lesz az x tengelyre. A háromszög szabályos, így a köré írt kör középpontja egyben súlypont is, tehát a súlypont és a BC egyenes távolsága (2.5) fele a súlypont és az A

távolságának (a súlypont harmadolja a súlyvonalakat). Így a BC egyenes egyenlete: 2x=5. A BC egyenesnek és a körnek a metszéspontjai megadják a B,C pontokat. $B\left(\frac{5}{2},\frac{-6+5\sqrt{3}}{2}\right);C\left(\frac{5}{2},\frac{-6-5\sqrt{3}}{2}\right)$

10.3.29. A PQ alap merőleges a szimmetriatengelyre és illeszkedik az A pontra, így egyenlete: x+2y=-13. Ez a köré írt kört P, illetve Q-ban metszi, így ezek koordinátái: P(-5,-4), Q(3,-8). Az R pont $10\sqrt{2}$ távolságra van Q-tól, így illeszkedik a Q középpontú, $10\sqrt{2}$ sugarú körre. De illeszkedik a trapéz köré írt körre is, így a két kör metszéspontjaként megkaphatjuk ennek koordinátáit is. A két kör metszéspontjai: (-7,2), illetve (13,2). Az előbbi nem jöhet szóba, mert akkor nem teljesül, hogy a QR szár hossza $10\sqrt{2}$. Így az R pont koordinátái csak a (13,2) lehetnek. Ezután felírjuk az R ponton áthaladó, PQ-val párhuzamos egyenes egyenletét: x+2y=17. Ennek, és a szimmetriatengelynek a metszéspontja: F(5,6). Ez felezi a QS oldalt, így S(-3,10).



10.3.30. Az adott kör középpontja C(4,3), sugara $\sqrt{25+c}$, az érintési pont E. Az EOC szög α=30°. Az EOC derékszögű háromszögben $\sin\alpha=\frac{EC}{OC}=\frac{r}{5}=\frac{1}{2}$, így r=2.5=$\sqrt{25+c}$. Ebből pedig c= -18.75.

10.4. Parabolák

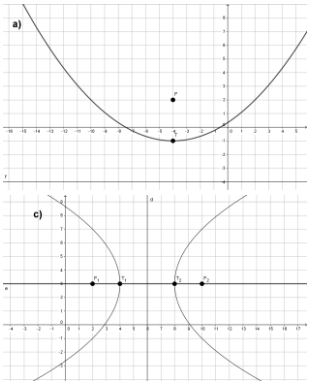
10.4.1.

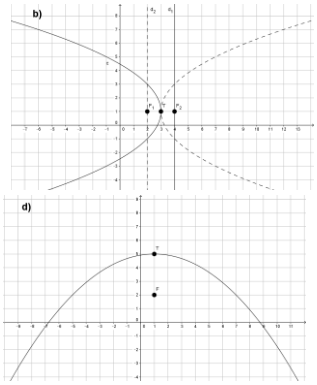
a) A parabola paramétere 6, tengelypontja (-4-1), tengelye x=-4 egyenes, felfelé nyílik, tehát egyenlete $y=\frac{1}{12}(x+4)^2-1$.

b) Két eset lehetséges, nyílhat balra és jobbra is. Első esetben fókuszpontja $F_1(2,1)$, vezéregyenese d_1: x=4, egyenlete: $x=-\frac{1}{4}(y-1)^2+3$, második esetben fókuszpontja $F_2(4,1)$, vezéregyenese d_2: x=2, egyenlete: $x=\frac{1}{4}(y-1)^2+3$

c) $x=-\frac{1}{8}(y-3)^2+4$, $x=\frac{1}{8}(y-3)^2+8$

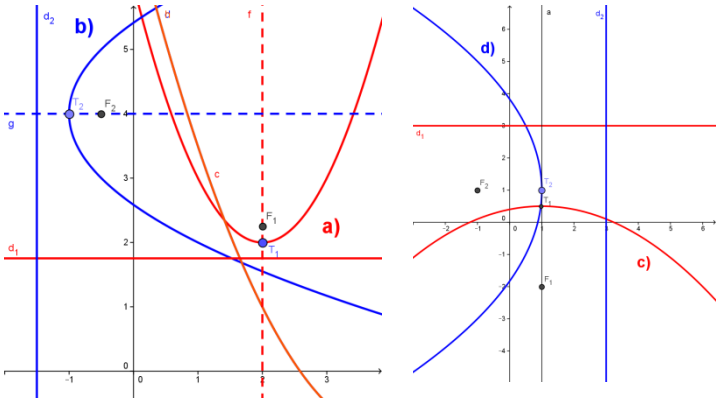
d) $y=-\frac{1}{12}(x-1)^2+5$





10.4.2.

a) Teljes négyzetté alakítva: $y=(x-2)^2+2$. Így a tengelypont koordinátái $T_1(2,2)$, szimmetriatengelye x=2, paramétere 0.5. Így a fókuszpont $F_1(2,2.25)$, vezéregyenese: d_1:y=1,75



b) Teljes négyzetté alakítva: $x=0.5(y-4)^2-1$. Így a tengelypont koordinátái $T_2(-1,4)$, szimmetria tengelye y=4, paramétere 1. Így a fókuszpont $F_2(-0.5,4)$, vezéregyenese: d_2:x=-1,5

c) $y = -1/10\ (x-1)^2 +1/2$, így a paraméter 5, $T_1(1,1/2)$, $F_1(1,-2)$, szimmetriatengelye: x = 1, vezéregyenese y = 3

d) $x = -1/8\ (y-1)^2 +1$, így a paraméter 4, $T_2(1,1)$, $F_2(-1,1)$, szimmetria tengelye: y = 1, vezéregyenese x = 3

10.4.3. A parabola általános egyenlete $x=1/8(y-v)^2+u$ vagy $x=-1/8(y-v)^2+u$, hiszen szimmetriatengelye az x tengellyel párhuzamos, és paramétere 4. Ebbe az egyenletekbe a két adott pont koordinátáit behelyettesítjük. az I. esetben v=3, u=1, ekkor az egyenlet: $x=1/8(y-3)^2+1$, a II. esetben v=7, u=11, ekkor az egyenlet: $x=-1/8(y-7)^2+11$.

10.4.4. Általános egyenlet: $y=\frac{1}{2p}x^2-4$. A parabolának illeszkednie kell a (-4,0), (4,0) pontokra, ezekből bármelyiket behelyettesítve p=2, tehát a parabola egyenlete: $y=\frac{1}{4}x^2-4$

10.4.5. A szóban forgó pontok A(2,2), B(4,8). Ezeket összekötő vektor koordinátái: (2,6), tehát a párhuzamos érintő meredeksége 3. Így egyenlete y=3x+b. Ennek az egyenesnek a parabolával egy közös pontja van (hiszen érintője). Vagyis az egyenletrendszerükből keletkező másodfokú egyenletnek ($3x+b=0.5x^2$) egy gyöke van, tehát ennek diszkriminánsa 0. $D=(-3)^2-4\cdot0.5\cdot(-b)=0$, ebből b=-4.5. Vagyis a párhuzamos érintő egyenlete: y=3x-4.5. A merőleges érintő meredeksége -1/3. Az előzőekhez hasonlóan a merőleges érintő egyenlete: y=-1/3x-1/18.

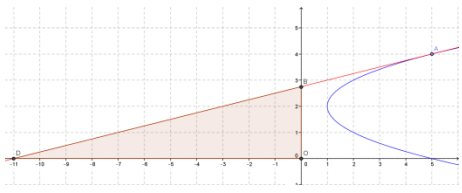
10.4.6. A két alakzat egyenletrendszeréből megkapjuk a metszéspontok koordinátáit. A(-2,2), B(2,2), C(0,0). A háromszög alapja 4, ehhez az oldalhoz tartozó magassága 2, szárainak hossza $2\sqrt{2}$, így területe 4 területegység. Kerülete $4\sqrt{2}$.

10.4.7. A parabola 4 abszcisszájú pontja P(4,4). Az érintő egyenlete általánosan y = mx+b. Ebbe a (4,4) pontot behelyettesítve: 4=4m+b, vagyis b=4-4m, ezzel az érintő egyenlete y=mx-4m+4. Ezt a parabola egyenletébe visszahelyettesítve $mx-4m+4=0.5x^2 - 2x + 4$, ennek a diszkriminánsa 0, ebből m=2=tgα, vagyis az irányszög 63.43°

10.4.8. Meg kell határozni az adott egyenessel párhuzamos érintő egyenletét. Az érintési pont lesz a parabolának az egyeneshez legközelebb eső pontja. Az érintő meredeksége a párhuzamosság miatt 2. Így egyenlete y=2x+b. Ezt a parabola egyenletébe visszahelyettesítve, az előző feladat alapján b=-6. Így az érintő egyenlete y=2y-6. Ennek a parabolával való metszéspontja: M(3,0). A -2x + y + 14= 0 egyenestől való távolsága:

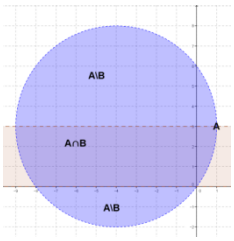
$$d=\left|\frac{-6+14}{\sqrt{4+1}}\right|=\frac{8}{\sqrt{5}}\approx 3.58$$

10.4.9. A parabola keresett érintési pontja A(5,4), az ehhez tartozó érintő egyenlete az előző feladatok alapján x - 4y = -11. Ez az y tengelyt a B(0,2.75), az x tengelyt a D(-11,0) pontban metszi, így meghatározandó háromszög (BOD– O az origó) területe 121/8 ≈ 15.13



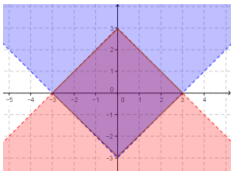
10.5. Tartományok

10.5.1. Az A tartomány egy (-4,3) középpontú, 5 sugarú körlap belső pontjai, a B halmaz az x tengely és az y=3 egyenes közötti pontok. Metszetük a kör és a párhuzamos egyenespár közös része, az A\B pedig két részből áll, ez az ábrán jól látható.

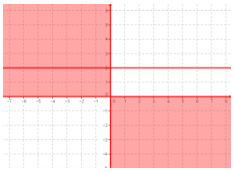


10.5.2. A megadott tartomány az x,y értékek behelyettesítése után, $x^2+y^2+8x+8y=25$, azaz egy (-4,-4) középpontú, 5 sugarú kör, melynek a -8 abszcisszájú pontjai E_1(-8,-1), E_2(-8,-7). Ezekbe húzható érintők egyenlete: -4x+3y=29, illetve 4x+3y=-53. Metszéspontjuk: M(-10.25,-4)

10.5.3. Átalakítva: | y | > 3- | x |. Két esetre bonthatjuk. 1: y > 3 - | x |, ha y ≥ 0, illetve y < | x | - 3, y ≤ 0. Így a megoldás az a tartomány, amely annak a négyzetnek a belső pontjai, melynek középpontja az origó, csúcsai: (3,0), (0,3), (-3,0), (0,-3).



10.5.4. Egy szorzat úgy lehet nempozitív, hogy a két tényező ellentétes előjelű, vagy valamelyik 0. Mivel a teljes négyzet nem lehet negatív, az x és y közül az egyiknek a ≤ 0, a másiknak pedig a ≥ 0 feltételt teljesítenie kell. Így természetesen a megoldás-tartomány része a két koordinátatengely (ezek pontjainak egyik koordinátája 0), valamint a 2., illetve 4. síknegyed. Megoldást ad az y = 2 egyenes is, hiszen ekkor a baloldal 0, ami kielégíti a megadott feltételt.

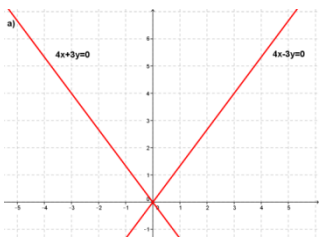


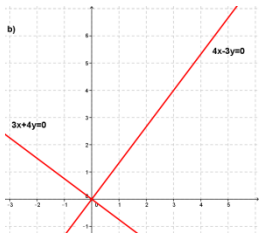
10.5.5.

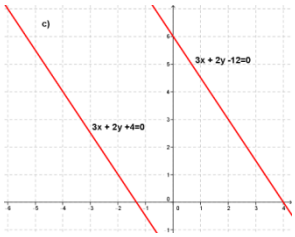
a) Egy szorzat akkor, és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így 4x+3y=0, vagy 4x-3y=0, ez az ábrán látható két egyenes.

b) $12x^2-12y^2+7xy=12x^2+16xy-9xy-12y^2=4x(3x+4y)-3y(3x+4y)=(3x+4y)(4x-3y)=0$.

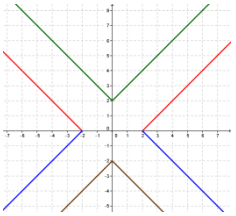
Így 3x+4y=0, vagy 4x-3y=0, ez az ábrán látható két egyenes. c) 3x + 2y -12=0, vagy 3x + 2y +4 = 0







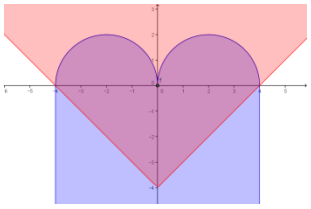
10.5.6. Két esetet kell vizsgálnunk. I: $|x| - |y| = 2$, ha $|x| - |y| \geq 0$, azaz $|x| \geq |y|$, vagy II: $|x| - |y| = -2$, ha $|x| - |y| \leq 0$ azaz $|x| \leq |y|$. Az I. esetben $y = |x| - 2$, ha $y \geq 0$, (ábrán piros), vagy $y = 2 - |x|$, ha $y \leq 0$, (ábrán kék). A II. esetben $y = |x| + 2$, ha $y \geq 0$, (ábrán zöld), vagy $y = -2 - |x|$, ha $y \leq 0$, (ábrán barna). Koordinátarendszerben ábrázolva, feltételeket figyelembe véve a következő ponthalmaz a megoldás:



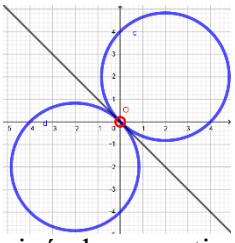
10.5.7. Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője 0, így a 10.5.5 valamint a 10.5.6 alapján a megoldás $x = \pm 2$, illetve $y = \pm 3$ egyenesek.

10.5.8. Két négyzetszám összege csak abban az esetben nulla, ha mindkettő 0. Így a megoldás a következő 4 pont: (2,3), (2,-3), (-2,3), (-2,-3).

10.5.9. Két esetünk van. I. $x \geq 0$. Ekkor $\boldsymbol{x - 4 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}}$. A kifejezésünk értelmezési tartománya a $x \in [0;4]$, $y \in \mathbb{R}$;. A jobb oldal átalakítva $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$, így ez egy félkörvonal „alatti” terület. A baloldal pedig a megfelelő egyenes „feletti” terület. II. $x \leq 0$. Ekkor $\boldsymbol{-x - 4 \leq y \leq \sqrt{-4x - x^2}}$. A kifejezésünk értelmezési tartománya a $x \in [-4,0]$, $y \in \mathbb{R}$;. A jobb oldal átalakítva $x^2 + y^2 + 4x \leq 0$, így ez egy, az előbbire szimmetrikus félkörvonal „alatti” terület. A baloldal pedig szintén a megfelelő egyenes „feletti” terület. Így a keresett tartomány, az ábrán látható „szívecske”.



10.5.10. A tört miatt $x \neq -y$. Két esetünk van: I. $x > -y$, ekkor az összefüggés az $x2+y2-4x-4y=0$ alakra hozható. Ez egy (2,2) középpontú, sugarú kör egyenlete. Ennek csak az origó olyan pontja, mely nem tesz eleget az adott feltételnek! II.. $x < -y$, ekkor az összefüggés az $x2+y2+4x+4y=0$ alakra hozható. Ez egy (-2,-2) középpontú, sugarú kör egyenlete. Ennek is csak az origó olyan pontja, mely nem tesz eleget az adott feltételnek!



11. Trigonometria

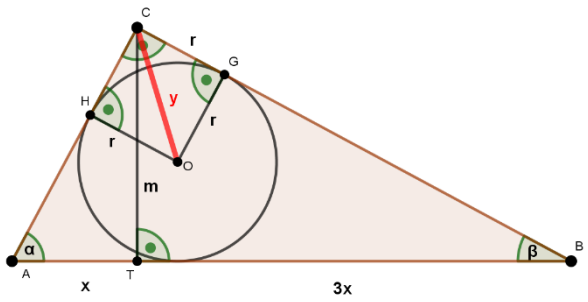
11.1. Szögfüggvények derékszögű háromszögben, szinusz-és koszinusz tétel

11.1.1. Mivel az egész számok halmazán keressük az oldalakat, ezeket a Pitagoraszi számhármasok között kell keresni. Olyan számhármast nem találunk, ahol a két befogó relatív prím, és különbségük 2 cm. Így csak olyat kell keresnünk, ahol az egyik 1 cm-rel nagyobb, mint a másik, és ha vesszük ezek kétszeresét, akkor már 2 cm lesz a különbség. Így az oldalak, 6 cm, 8 cm, 10 cm, ezekből a szögek: 36.87°, 53.13°.

11.1.2. A háromszög alapját jelöljük *a*-val, ekkor a félkerület $s = \frac{a+78}{2}$. A T = r·s alapján $s = \frac{T}{r} = \frac{540}{10} = 54$, ebből a=30. A szárak α szögére $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{15}{39}$, vagyis α ≈ 67.4°, az alapon fekvő szögekre pedig β = 56.3°. A háromszög köré írható körének sugarát pedig meghatározhatjuk a $T = \frac{a\ b\ c}{4\ R}$ alapján, ebből $R = \frac{a \cdot b \cdot b}{4 \cdot T} = \frac{30 \cdot 39^2}{2160} = \frac{169}{8}$cm.

11.1.3. A magasságtétel alapján $m = \sqrt{x \cdot 3x}$

Ebből $x = \sqrt{\frac{64}{3}}$, így az átfogó $c = 4 \cdot \sqrt{\frac{64}{3}}$, az AC befogó az ATC derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétele alapján $AC = \sqrt{64 - \frac{64}{3}} = \sqrt{\frac{128}{3}}$, illetve a BC befogó az ABC háromszögben $BC = \sqrt{\frac{1024}{3} - \frac{128}{3}} = \sqrt{\frac{896}{3}}$. Így a háromszög szögei $\sin\alpha = \frac{\sqrt{\frac{896}{3}}}{4\sqrt{\frac{64}{3}}}$

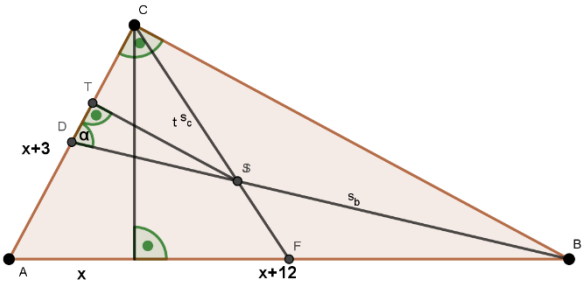


alapján α ≈ 69,3°, β = 90°- 69.3° = 20,7°. A keresett távolsághoz először megállapítjuk a beírt

kör sugarát. $r=\frac{T}{s}=\frac{\frac{\sqrt{\frac{128}{3}}\cdot\sqrt{\frac{896}{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{\frac{128}{3}}+\sqrt{\frac{896}{3}}+4\cdot\sqrt{\frac{64}{3}}}{2}}\approx 3{,}718$. Az OHCG négyszög négyzet, mert oldalai a beírt kör sugarai, szögei 90°-osak, mert a beírt kör sugarai merőlegesek az oldalakra, így a keresett távolság $y=\sqrt{2}\cdot r\approx 5{,}6cm$.

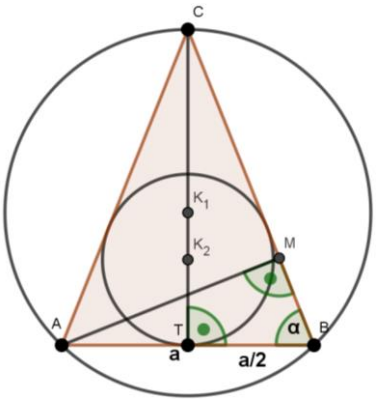
11.1.4. A $T=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$ összefüggés alapján $\frac{2T}{b^2}=\sin\gamma$, ebből $\gamma = 73.74°$a szárak szöge, az alapon fekvő szögek pedig 53,13°-53,13°. $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\frac{a}{2}}{b}$ alapján pedig $a=2\cdot b\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=12$. Ebből az előző feladathoz hasonlóan $r=\frac{T}{s}=\frac{48}{16}=3cm$ a beírható kör sugara, $R=\frac{a\cdot b^2}{4\cdot T}=\frac{1200}{192}=6{,}25cm$ a köré írt kör sugara.

11.1.5. A szóban forgó befogó merőleges vetülete legyen x, ekkor a befogó x+3, az átfogó x+9. A befogótétel értelmében $x+3=\sqrt{x\cdot(x+6)}$. Ennek az egyenletnek egyetlen megoldása az x=3. Így a befogó 6cm, az átfogó 12 cm. A továbbiakban

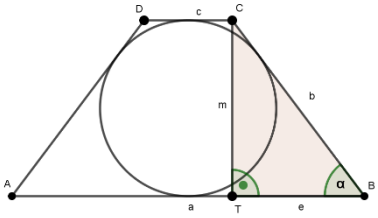


először kiszámoljuk BC átfogót Pitagorasz-tétellel: $BC=\sqrt{12^2-6^2}=\sqrt{108}$, majd a BD súlyvonal hosszát a BDC derékszögű háromszögből, szintén Pitagorasz-tételével: $BD=\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+\sqrt{108}^2}=\sqrt{117}$. A BDC háromszögben a CDB szög nagysága $tg\alpha=\frac{BC}{DC}=\frac{\sqrt{108}}{3}$, ebből α = 73.9°. Az SD szakasz a BD súlyvonal harmadrésze, így az STD derékszögű háromszögben $\sin\alpha=\frac{ST}{SD}$, vagyis a keresett ST távolságra ST=SD·sinα=3.46 cm.

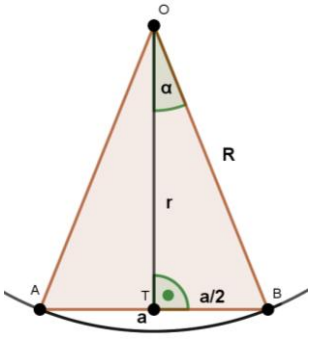
11.1.6. Az TBC háromszögben, (ahol T az alaphoz tartozó magasság talppontja) $\text{tg}\alpha = \frac{TC}{TB} = \frac{12}{5}$. Ebből α=67.38°. A BTC háromszögben $\sin\alpha = \frac{AM}{AB}$, ebből pedig a szárhoz tartozó magasság: $AM = \sin\alpha \cdot AB = \frac{120}{13} \approx 9.23$ cm. A háromszög szára Pitagorasz-tétele alapján 13cm. A háromszög köré írt körének sugara $R = K_1C = \frac{a \cdot b^2}{4 \cdot T} = \frac{1690}{4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2}} = \frac{169}{24}\text{cm}$. A Beírt körének a sugara $r = K_2T = \frac{T}{s} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}\text{cm}$. Így a két középpont távolsága: $K_1K_2 = CT - R - r = 12 - \frac{169}{24} - \frac{10}{3} = \frac{13}{8}\text{cm}$.



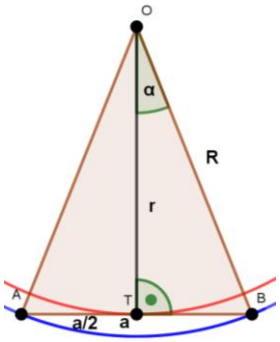
11.1.7. A trapéz magassága a beírható kör átmérője, így m = 8cm. A BTC derékszögű háromszögben $\sin 30^\circ = \frac{m}{b} = \frac{1}{2}$, vagy b = 2m = 16cm, illetve. $\cos 30^\circ = \frac{e}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, azaz\ e = 8\sqrt{3}$. Mivel a trapéz érintőnégyszög, így szemközti oldalainak összege a + c = 2b = 16cm. Másrészt a trapéz szimmetrikus így $e = \frac{a+c}{2}$, azaz $a + c = 16\sqrt{3}$. A kapott egyenletrendszer alapján $a = 16 + 8\sqrt{3}$, illetve $c = 16 - 8\sqrt{3}$.



11.1.8. Minden n oldalú szabályos sokszög n db egyenlő szárú háromszögre bontható, amelyek alapja a sokszög oldala (a), szára a sokszög köré (R), az alaphoz tartozó magassága pedig a beírható körének sugara (r). Szárszögük (2α) meghatározható a 360°és az n hányadosaként. Az ábra alapján $\sin\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}R}{R} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$. Ebből α=15°, így a $2\alpha = \frac{360}{n}$ alapján a sokszög 12 oldalú.

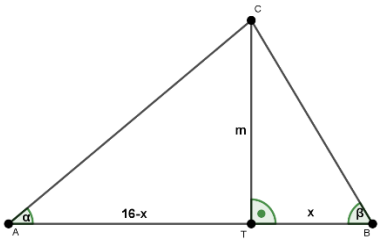


11.1.9. A sokszög területe (1) $T = n \cdot \frac{R^2 \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}{2}$ a köré írható kör R sugarával, illetve (2) $T = n \cdot \frac{a \cdot r}{2} = n \cdot \frac{2r \cdot tg\left(\frac{360}{2n}\right) \cdot r}{2} = n \cdot r^2 \cdot tg\left(\frac{360}{2n}\right)$, a beírható kör r sugarával. Az (1) alapján $R^2 = \frac{2T}{n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)}$. A (2) alapján $r^2 = \frac{T}{n \cdot tg\left(\frac{360}{2n}\right)}$. A keresett síkidom területe, annak a körgyűrűnek a területe, melyet a köré, illetve beírt kör íve határoz meg. $T_{kgy} = R^2\Pi - r^2\Pi =$



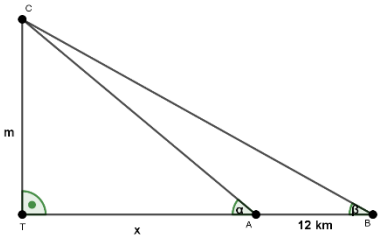
$$= \frac{2T \cdot \Pi}{n \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)} - \frac{T \cdot \Pi}{n \cdot tg\left(\frac{360}{2n}\right)} = \frac{T \cdot \Pi}{n} \cdot \left(\frac{2}{\sin\left(\frac{360}{n}\right)} - \frac{1}{tg\left(\frac{360}{2n}\right)} \right)$$

11.1.10. A domb keleti ösvénye az AC szakasz, ennek emelkedési szöge az α = 16°, illetve a nyugati ösvény a BC szakasz, ennek emelkedése a β=21°13'. A BTC derékszögű háromszögben $x = \frac{m}{tg\beta}$. Az ATC derékszögű háromszögben $16 - x = \frac{m}{tg\alpha}$. Az (1)-et (2)-be behelyettesítve:



$16 - \frac{m}{tg\beta} = \frac{m}{tg\alpha}$, ebből $m = \frac{16}{\frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{tg\beta}} = \frac{16 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha + tg\beta} \approx$ 2 639 m ≈ 2,6 km.

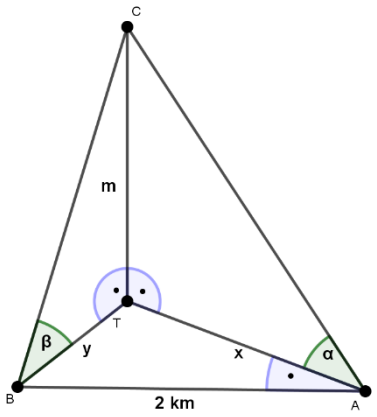
11.1.11. A völgy A látszik az emlékmű α = 31°, illetve a B pontjából β=22° emelkedési szög alatt. Az ATC derékszögű háromszögben (1) $x = \frac{m}{tg\alpha}$. A BTC derékszögű háromszögben (2) $16 + x = \frac{m}{tg\beta}$. Az (1)-et (2)-be behelyettesítve:



$12 + \frac{m}{tg\alpha} = \frac{m}{tg\beta}$, ebből $m = \frac{12}{\frac{1}{tg\beta} - \frac{1}{tg\alpha}} = \frac{12 \cdot tg\alpha \cdot tg\beta}{tg\alpha - tg\beta} \approx$ 14,8 km.

11.1.12. Az előző feladatok alapján a domb 47,3 m magas. A madár 95,52 métert repül.

11.1.13. Jelenleg az A pontban vagyunk, innen látjuk keletre (T felé) a hegyet α=25° emelkedési szög alatt. Innen megyünk délre 3 km-t délre – A B pontba, ahonnan a hegyet β=22° emelkedési szög alatt látjuk.. Így a TAB szög derékszög, mivel a keleti és a déli irányt fogja közre. Az ATC derékszögű háromszögben $x = \frac{m}{tg\alpha}$, illetve a BTC derékszögű háromszögben $y = \frac{m}{tg\beta}$. Az ABT derékszögű háromszögben



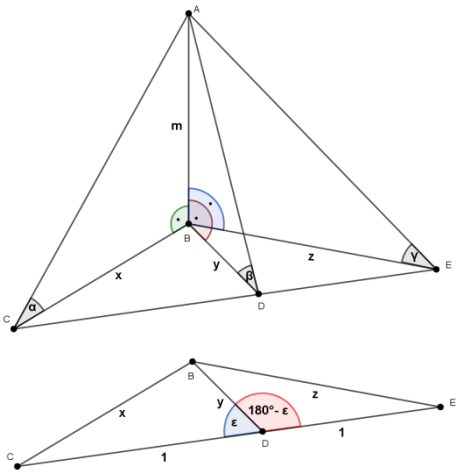
Pitagorasz-tételét felírva: $y^2 = x^2 + 3^2$. Azaz $\left(\frac{m}{tg\beta}\right)^2 = \left(\frac{m}{tg\alpha}\right)^2 + 144$. Ebből m ≈ 2427 méter.

11.1.14. Az előző feladat alapján a hegy 2845 méter magas

11.1.15. Az előző feladatok, és a mellékelt rajz alapján

$x = \frac{m}{tg\alpha}$, $y = \frac{m}{tg\beta}$, $z = \frac{m}{tg\gamma}$. Ezután a DBC háromszögben cosinus tétel alapján

$(1)\ x^2 = y^2 + 1^2 - 2 \cdot y \cdot 1 \cdot \cos\varepsilon$, illetve a BDE háromszögben: $(2) z^2 = y^2 + 1^2 - 2 \cdot y \cdot 1 \cdot \cos(180 - \varepsilon)$, de a $(2)\ z^2 = y^2 + 1^2 + 2 \cdot y \cdot 1 \cdot \cos\alpha$ alakban is írható mivel $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$. Így : $(1)+(2)$: $x^2 + z^2 = 2y^2 + 2$,

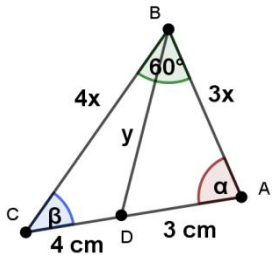


vagyis $\left(\frac{m}{tg\alpha}\right)^2 + \left(\frac{m}{tg\gamma}\right)^2 = 2\left(\frac{m}{tg\beta}\right)^2 + 2$. Ebből a hegy magassága mintegy 1225 méter.

11.1.16. Az előző feladat második rajza alapján: $b = \frac{20 \cdot \sqrt{285}}{19} \approx 17{,}77\,cm$;

$a = \frac{32 \cdot \sqrt{285}}{19} \approx 28{,}43\,cm$

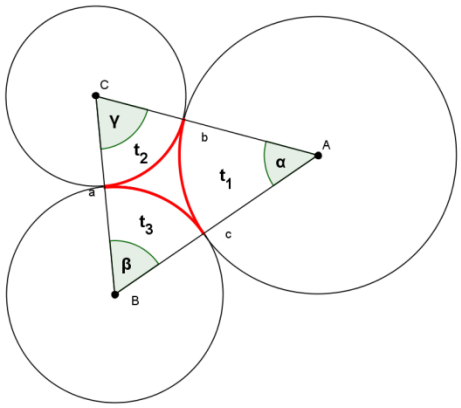
11.1.17. A szögfelező tétel alapján az AB oldal hossza 3x, a BC oldalé 4x. Először az ABC háromszögben írunk fel cosinus-tételt:



$7^2 = (4x)^2 + (3x)^2 - 2\cdot 4x\cdot 3x\cdot\cos 60°$. Ebből $x = \sqrt{\frac{49}{13}}\,\text{cm}$. , így

$AB = 3\sqrt{\frac{49}{13}} \approx 5{,}82\,cm$, $CB = 4\sqrt{\frac{49}{13}} \approx 7{,}77\,cm$. A hiányzó szögek, szintén cosinus-tétel segítségével: $\alpha \approx 73{,}9°$, illetve $\beta = 46{,}1°$. A szögfelező pedig 5,76 cm.

11.1.18. Az ábrán látható, piros körívek által határolt síkidom területét kell meghatározni. A három kör középpontja egy háromszöget alkot, melynek oldalai az érintkező körök sugarainak összege, azaz a =14 cm, b =15 cm, c =17 cm. Ennek a háromszögnek a területe a Héron képlet alapján: $12\cdot\sqrt{69}\,\text{cm}$. Ha ebből kivonjuk a t_1, t_2, t_3-al jelölt körcikkek a területét, akkor megkapjuk a keresett területet. Ehhez szükség van a háromszög szögeire, amelyeket az oldalakból cosinus–tételek segítségével kapunk meg. Így $\alpha = 51{,}43°$, $\beta = 56{,}89°$, $\gamma = 71{,}68°$. A körcikkek területét megkapjuk a középponti szögek, sugarak segítségével:



$t_1 = 36{,}35\ \text{cm}^2$, $t_2 = 31{,}77\ \text{cm}^2$, $t_3 = 22{,}52\ \text{cm}^2$. Így a keresett terület

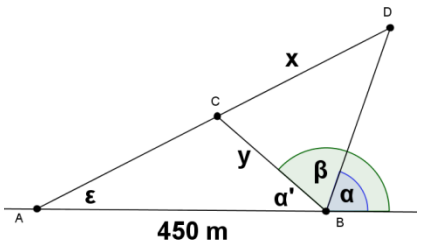
$T = 12\cdot\sqrt{69}$ - 36,35 – 31,77 – 22,52 ≈ 9,04 cm^2.

11.1.19. Hat órakor a két mutató egy egyenesre esik, így végpontjaik távolsága a két mutató hosszának az összege. Ha a nagymutató hossza x, akkor a kismutatóé 30-x. Négy órakor a két mutató 120°-os szöget zár be egymással, ekkor egy cosinus-tételt felírva a távolságukra: $\left(6\sqrt{19}\right)^2 = x^2 + (30-x)^2 - 2x(30-x)\cdot\cos 120°$. Ebből x = 18 cm, illetve x = 12 cm, de a nagymutatónak kell hosszabbnak lenni, így ez 18 cm, míg a kismutató hossza 12 cm.

11.1.20. A nagymutató hossza legyen x, a kismutatóé y. Kilenc órakor a két mutató derékszöget zár be, ez alapján $(1)\ x^2 + y^2 = 12.5^2$. Nyolc órakor 120°-os szöget zárnak be egymással, ekkor cosinus-tétel alapján $(1)\ x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° = \left(\frac{5\sqrt{37}}{2}\right)^2$. A (2)-(1) alapján xy=75, $x = \frac{75}{y}$

ebből . Ezt az (1) be behelyettesítve y^2-re másodfokú egyenletet kapunk, melynek gyökei: 10 cm, illetve 7,5 cm. Ebből a 7,5 cm a kismutató, így 10 cm a nagymutató hossza.

11.1.21. Meghatározandó a CD=x távolság. A feladat adatai alapján ε=40°, α=75°, illetve β=120°. Így α′=60°, hiszen a β szög kiegészítő szöge. Így az ABC háromszögben az ACB szög 80°. Az ABC háromszögben a sinus tételt alkalmazva:



$$\frac{y}{450}=\frac{\sin 40°}{\sin 80°}, \text{azaz } y = 450\cdot\frac{\sin 40°}{\sin 80°}\approx 293{,}72 \text{ méter.}$$

A BCD háromszögben a DBC szög = 120°-75°=45°, illetve a DCB szög 100°, így a CDB szög 35°. Szintén sinus tételt alkalmazva:

$$\frac{x}{y}=\frac{\sin 45°}{\sin 35°}, \text{azaz } x = y\cdot\frac{\sin 45°}{\sin 35°}\approx 362{,}09 \text{ méter.}$$

11.2.Addíciós-tételek alkalmazása

11.2.1. Osszuk el a baloldalon lévő tört számlálóját és nevezőjét $\cos\alpha$-val:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

A $\tan 45° = 1$, ezért:

$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{\tan 45°+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan 45°}=\tan(45°+\alpha)$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.2. Használjuk fel a következő összefüggést:

$$(\sin\alpha)^2=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

A baloldal a következő alakba írható:

$$\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\right]^2-\left[\sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\right]^2=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)-1+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}$$

Használjuk fel a következő összefüggést:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

Ekkor:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right)}{2} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \sin 2\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2} \sin 2\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.3. A számláló értéke:

$$2(\cos\alpha)^2 - 1 = 2(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 - (\cos\alpha)^2 = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha$$

A nevező értéke:

$$2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]^2 = 2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \left[\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right)\right]^2 =$$

$$= 2 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]^2$$

Használjuk fel a következő összefüggést:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$$

Ekkor a nevező a következő alakba írható:

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \cos 2\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.4. A baloldal a következő alakba írható:

$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]^2 = \frac{\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]^2}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]^2}$$

Használjuk fel a következő összefüggést:

$$\frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{\frac{\pi}{2} - 2\alpha}{2}$$

Használjuk fel a félszög szinuszának és koszinuszának a képletét:

$$\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]^2=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.5. A baloldal nevezőjét szinusszal és koszinusszal fejezzük ki:

$$(\cot\alpha)^2-(\tan\alpha)^2=\frac{\cos 2\alpha}{(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^2}$$

Ezt behelyettesítve:

$$\frac{\cos 2\alpha}{(\cot\alpha)^2-(\tan\alpha)^2}=\frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos 2\alpha}{(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^2}}=(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^2=$$

$$=\frac{4(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^2}{4}==\frac{(\sin 2\alpha)^2}{4}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.6. Alakítsuk át a jobb oldal második tényezőjét:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\left[1+\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\tan\frac{\alpha}{2}\right]\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Ezért a jobb oldal a következő alakba írható:

$$\tan\alpha\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\,(1+\sin\alpha)}{(\cos\alpha)^2}=\frac{\sin\alpha\,(1+\sin\alpha)}{1-(\sin\alpha)^2}=\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.7. Alakítsuk át a baloldali törtet:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

Osszuk el a számlálót és a nevezőt is $\cos\alpha$-val:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$$

Azt, hogy ez a kifejezés egyenlő $\tan(45°+\alpha)$-val, a **11.2.1.** feladatban már bizonyítottuk. Tehát igaz az állítás.

11.2.8. A **11.2.6.** feladat szerint:

$$\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$$

Alkalmazzuk a következő összefüggést úgy, hogy $\frac{\alpha}{2}$ helyére $\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$-t írunk:

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Ekkor:

$$\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\cot\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}=\frac{1+\sin 2y}{\cos 2y}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.9. Alkalmazzuk a következő összefüggést úgy, hogy φ helyére $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$-t írunk:

$$\tan\frac{\varphi}{2}=\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$$

Ekkor:

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\cdot(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.10. Használjuk fel a következő azonosságot:

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

Ekkor a baloldal a következő alakba írható:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 2\alpha=1-\sin 2\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.11. A baloldali számlálót alakítsuk át:

$$\sin\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha=2\sin 3\alpha\cos 2\alpha-\sin 3\alpha=$$

$$=\sin 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)$$

A nevezőt ehhez hasonlóan átalakítva:

$$\cos 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)$$

Vagyis:

$$\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\frac{\sin 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)}{\cos 3\alpha\,(2\cos 2\alpha-1)}=\tan 3\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.12. A két utolsó tagot összegezzük a következő összefüggés alapján:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Vagyis:

$$\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)=\sin\alpha\,2\sin(\pi+\alpha)\cos\frac{\pi}{3}=$$

$$=\sin\alpha-2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha=0$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.13. Használjuk fel a következő összefüggést:

$$(\sin\alpha)^2-(\sin\beta)^2=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}=$$

$$=\frac{\cos 2\beta-\cos 2\alpha}{2}=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)$$

Ezért a baloldalt a következő alakba írhatjuk:

$$[\sin(45° + \alpha)]^2 - [\sin(30° - \alpha)]^2 - \sin 15° \cdot \cos(15° + 2\alpha) =$$

$$= \sin(45° + \alpha + 30° - \alpha)\sin(45° + \alpha - 30° + \alpha) - \sin 15° \cdot \cos(15° + 2\alpha) =$$

$$= \sin 75° \cdot \sin(15° + 2\alpha) - \sin 15° \cdot \cos(15° + 2\alpha)$$

Használjuk fel, hogy $\sin 75° = \cos 15°$. Ekkor:

$$\cos 15° \cdot \sin(15° + 2\alpha) - \sin 15° \cdot \cos(15° + 2\alpha) = \sin(15° + 2\alpha - 15°) = \sin 2\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.14. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\,(1 - \cos\alpha)}{2\sin\alpha\,(1 + \cos\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.15. A baloldalon a második és harmadik tagból emeljük ki a következőt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Ekkor a baloldal a következő alakú:

$$(\cos\beta)^2 + [\cos(\alpha + \beta)]^2 - 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= (\cos\beta)^2 - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) =$$

$$= (\cos\beta)^2 - (\cos\alpha)^2(\cos\beta)^2 + (\sin\alpha)^2(\sin\beta)^2 =$$

$$= (\cos\beta)^2(1 - (\cos\alpha)^2) + (\sin\alpha)^2(\sin\beta)^2 =$$

$$(\cos\beta)^2(\sin\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2(\sin\beta)^2 = (\sin\alpha)^2[(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2] = (\sin\alpha)^2$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.16. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2} = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.17. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{2\cdot\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{1}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}-\frac{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1-2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2-2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=1$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.18. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\left(\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan\frac{\alpha}{2}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.19. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{\tan 2\alpha}{\tan\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha\sin\alpha}=\frac{2(\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$1+\frac{1}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}=\frac{(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2}{\cos 2\alpha}=\frac{2(\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.20. Alakítsuk át a baloldalt:

$$2\cdot[\cos(45°+\alpha)]^2=2(\cos 45°\cos\alpha-\sin 45°\sin\alpha)^2=2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\right]^2=$$

$$=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.21. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\tan 2\alpha+\frac{1}{\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.22. Alakítsuk át a baloldalt:

$$2 \cdot \sin(45° + \alpha) \cdot \sin(45° - \alpha) =$$

$$= 2(\sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha)(\sin 45° \cos\alpha + \cos 45° \sin\alpha) =$$

$$= 2\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.23. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin(2\alpha + \alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin\alpha\,(\cos\alpha)^2 + \cos 2\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= 2(\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2 = 3(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

Alakítsuk át a baloldalt:

$$4\sin(60° + \alpha)\cos(30° + \alpha) =$$

$$= 4(\sin 60° \cos\alpha + \cos 60° \sin\alpha)(\cos 30° \cos\alpha - \sin 30° \sin\alpha) =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha\right)\left(\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha\right) = 3(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.24. Alakítsuk át a tangens kifejezéseket:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan(2\alpha - \pi) = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - (\tan\alpha)^2} = \frac{2\tan\alpha\,(\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2} = \frac{2\tan\alpha\,(\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha}$$

Ekkor a jobb oldal a következő alakú:

$$\frac{1}{\tan\alpha} \cdot \frac{2\tan\alpha\,(\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha} - 1 = \frac{2(\cos\alpha)^2}{\cos 2\alpha} - 1 = \frac{2(\cos\alpha)^2 - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{2(\cos\alpha)^2 - ((\cos\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2)}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.25. Alakítsuk át a szinuszos kifejezéseket:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\frac{2\pi}{3}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha\right)$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha\right)$$

Ezek szorzata:

$$\frac{1}{4}(3(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2)$$

Mivel:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

Ezért a baloldal a következő alakba írható:

$$(\sin\alpha)^2+\frac{3}{4}(\cos\alpha)^2-\frac{1}{4}(\sin\alpha)^2=\frac{3}{4}((\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2)=\frac{3}{4}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.26. Alakítsuk át a tangens kifejezést:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Ekkor a baloldal a következő alakba írható:

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}\frac{(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.27. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{1-2(\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2-2(\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha)^2-(\cos\alpha)^2}{\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\alpha-\cot\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.28. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha\,(1+\cos\alpha)}=\frac{1-\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]}{1+\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.29. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\tan\frac{\pi+2\alpha}{4}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.2.30. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2}=\frac{(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

11.3. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek

11.3.1. Átalakítások után a következőt kapjuk:

$$\sin 5x - \sin 3x = 0$$

Alkalmazzuk a $(\sin x - \sin y)$-ra vonatkozó képletet:

$$2 \sin x \cos 4x = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x = 0$. Ebből:

$$x = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $\cos 4x = 0$. Ebből:

$$x = (4k \pm 1)\frac{\pi}{8}, akol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.2. A baloldalt alakítsuk szorzattá:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = (\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) =$$

$$= 2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x = 2 \cos x\,(\sin 2x + \sin 3x) = 4 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x$$

Ebből:

$$\sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin \frac{5x}{2} = 0$

Ebből:

$$x = k \cdot 72°$$

2. eset: $\cos \frac{x}{2} = 0$

Ebből:

$$x = (2k + 1) \cdot 180°$$

3. eset: $\cos x = 0$

Ebből:

$$x = (2k + 1) \cdot 90°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.3. Alakítsuk át a kifejezéseket:

$$\cos(x + 60°) = \cos[90° - (30° - x)] = \sin(30° - x)$$

$$1 + \cos 2x = 2(\cos x)^2$$

Ekkor az egyenlet a következő alakú:

$$\sin(x + 30°) + \sin(30° - x) = 2(\cos x)^2$$

Alkalmazzuk a $\sin\alpha + \sin\beta$ összegre vonatkozó képletet:

$$\sin 30° \cos x - (\cos x)^2 = 0$$

$$\cos x \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos x = 0$

Ebből: $x = (2k + 1) \cdot 90°$

2. eset: $\frac{1}{2} - \cos x = 0$

Ebből: $x = (6k \pm 1) \cdot 60°, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.4. Rendezzük az egyenletet a következő alakba:

$$(\sin x + \sin 3x) - (\cos x + \cos 3x) + (\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

Az első két tagra alkalmazzuk a szorzattá alakító képletet:

$$2 \sin 2x \cos x - 2 \cos 2x \cos x + (\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

$$(2 \cos x + 1)(\sin 2x - \cos 2x) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $2 \cos x + 1 = 0$

Ebből: $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

2. eset: $\sin 2x - \cos 2x = 0$

Ebből:

$\sin 2x = \cos 2x$, azaz $\tan 2x = 1$

$$x = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{8}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.5. Rendezzük az egyenletet a következő alakba:

$$(\cos 6x + \cos 2x) - (1 + \cos 8x) = 0$$

Alkalmazzuk a következő két azonosságot:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1 + \cos\alpha = 2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

Ekkor:

$$2\cos 4x \cos 2x - 2(\cos 4x)^2 = 0$$

Emeljünk ki $2\cos 4x$-t és a $\cos 2x - \cos 4x$ kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$\cos 4x \sin 3x \sin x = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos 4x = 0$

Ebből: $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{8}$

2. eset: $\sin 3x = 0$

Ebből: $x = k \cdot \frac{\pi}{3}$

3. eset: $\sin x = 0$

Ebből: $x = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.6. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$$

$$\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\frac{3x}{2} \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin\frac{3x}{2} = 0$

Ebből: $x = k \cdot \frac{2\pi}{3}$

2. eset: $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=0$

Ebből: $x=(4k-1)\cdot\frac{\pi}{2}$

3. eset: $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

Ebből: $x=(4k+1)\cdot\frac{\pi}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.7. Alakítsuk át a jobboldalt:

$$\cos(x+30°)=\sin[90°-(x+30°)]=\sin(60°-x)=-\sin(x-60°)$$

Ekkor:

$$\sin(x-60°)=-\sin(x-60°)$$

$$2\sin(x-60°)=0$$

$$x-60°=k\cdot 180°$$

$$x=(3k+1)\cdot 60°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.8. Alakítsuk át az egyenletet:

$$2\sin 3x\cdot\cos 2x+1-\cos 2x=1$$

$$\cos 2x\,(2\sin 3x-1)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos 2x=0$

Ebből: $x=(2k+1)\cdot 45°$

2. eset: $2\sin 3x-1=0$

Ebből: $x=k\cdot 60°+(-1)^k\cdot 10°, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.9. Alakítsuk át a jobboldalt:

$$3\sin x\,(\cos x-\sin x)+3=3(\sin x\cos x-(\sin x)^2+1)=$$

$$=3(\sin x\cos x-(\cos x)^2)=3(\cos x)^2(\tan x+1)$$

Ekkor az egyenlet a következő alakú:

$$(\sin x)^2(\tan x+1)=3(\cos x)^2(\tan x+1)$$

$$(\tan x+1)((\sin x)^2-3(\cos x)^2)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\tan x + 1 = 0$

Ebből: $x = (4k - 1) \cdot \frac{\pi}{4}$

2. eset:

$$(\sin x)^2 - 3(\cos x)^2 = 0$$

$$\tan x = \pm\sqrt{3}$$

Ebből: $x = (3k \pm 1) \cdot \frac{\pi}{3}, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.10. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\cos 4x + 2(\cos x)^2 = 0$$

$$\cos 4x + 1 + \cos 2x = 0$$

$$2(\cos 2x)^2 + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x\,(1 + 2\cos 2x) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos 2x = 0$

Ebből: $x = (2k - 1) \cdot 45°$

2. eset: $1 + 2\cos 2x = 0$

Ebből: $x = (3k \pm 1) \cdot 60°, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.11. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$$

$$(\sin x)^2 + \sin x \cos x = 1$$

$$\sin x \cos x = (\cos x)^2$$

Ebből a megoldás:

$$x_1 = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}, x_2 = (4k + 2) \cdot \frac{\pi}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.12. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sin 3x = \cos 2x$$

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

Alkalmazzuk a szorzattá alakító képletet:

$$\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Ebből: $x = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{10}$

2. eset: $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Ebből: $x = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.13. Adjuk hozzá mind a két oldalhoz a következő kifejezést:

$$2\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2$$

Ekkor:

$$\left(\sin\frac{x}{3}\right)^4 + 2\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{5}{8} + 2\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2$$

$$\left[\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{x}{3}\right)^2\right]^2 = \frac{5}{8} + 2\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2$$

$$1 = \frac{5}{8} + 2\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2$$

$$2\left(\sin\frac{x}{3}\right)^2\left(\cos\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

Szorozzuk be 2-vel az egyenletet, majd alkalmazzuk a kétszeres szög szinuszának képletét:

$$\left(\sin\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sin\frac{2x}{3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ebből:

$$x = (3k \pm 1) \cdot \frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.14. Alakítsuk át az egyenletet:

$$(1 + \cos 4x) \sin 4x = (\cos 2x)^2$$

$$2(\cos 2x)^2 \sin 4x = (\cos 2x)^2$$

$$(\cos 2x)^2(2 \sin 4x - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $(\cos 2x)^2 = 0$

Ebből: $x = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$

2. eset: $2 \sin 4x - 1 = 0$

Ebből: $x = k \cdot \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24}, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.15. Adjuk hozzá mind a két oldalhoz a következő kifejezést:

$$2(\sin x)^2(\cos x)^2$$

Ekkor:

$$(\sin x)^4 + 2(\sin x)^2(\cos x)^2 + (\cos x)^4 = \cos 4x + 2(\sin x)^2(\cos x)^2$$

$$[(\sin x)^2 + (\cos x)^2]^2 = \cos 4x + 2(\sin x)^2(\cos x)^2$$

$$1 - \cos 4x = \frac{(\sin 2x)^2}{2}$$

$$(\sin 2x)^2 + (\cos 2x)^2 - (\cos 2x)^2 + (\sin 2x)^2 = \frac{(\sin 2x)^2}{2}$$

$$4(\sin 2x)^2 = (\sin 2x)^2$$

$$(\sin 2x)^2 = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

Ebből:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.16. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Mivel a $\sin x$ $és$ $\cos x$ egyszerre nem lehet 0, ezért ha az egyenletet elosztjuk $(\cos x)^2$-szel, akkor nem lesz gyökvesztés. Ekkor:

$$3 - (\tan x)^2 - \tan x = 0$$

Ebből:

$$\tan x = 1\ vagy\ \tan x = -3$$

A megoldás:

$$x_1 = (4k+1)\cdot\frac{\pi}{4}\ és\ x_2 = k\pi - arc\tan 3\,, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.17. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

Mivel a $\sin x$ $és$ $\cos x$ egyszerre nem lehet 0, ezért ha az egyenletet elosztjuk $(\cos x)^2$-szel, akkor nem lesz gyökvesztés. Ekkor:

$$(\tan x)^2 + \sqrt{3}\tan x = 0$$

Ebből:

$$\tan x = 0\ vagy\ \tan x = -\sqrt{3}$$

A megoldás:

$$x_1 = (3k-1)\cdot\frac{\pi}{3}\ és\ x_2 = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.18. Alkalmazzuk a következő helyettesítést:

$$2(\cos x)^2 + 2(\sin x)^2 = 2$$

Ezt követően ugyanúgy oldjuk meg, mint az előző feladatot. A megoldás:

$$x_1 = (4k+1)\cdot\frac{\pi}{4}\ és\ x_2 = k\pi - arc\tan\frac{7}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.19. Az előző három feladathoz hasonlóan oldhatjuk meg. A megoldás:

$$x_1 = (4k+1)\cdot\frac{\pi}{4}\ és\ x_2 = k\pi + arc\tan\frac{3}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.20. Írjuk a $\sqrt{3}$ helyébe a $\cot 30°$-ot. Ekkor:

$$\sin x + \frac{\cos 30°}{\sin 30°}\cos x = 1$$

Vagyis:

$$\sin x \cdot \sin 30° + \cos x \cdot \sin 30° = \sin 30°$$

Ebből:

$$x - 30° = k \cdot 360° \pm 60°$$

A megoldás:

$$x_1 = (4k + 1) \cdot 90° \text{ és } x_2 = (12k - 1) \cdot 30°, \text{ahol } k \text{ egész szám.}$$

11.3.21. Az egyenlet bal oldala felírható a következő alakba:

$$\sqrt{2} \cdot \cos(x - 45°)$$

Vagyis:

$$\cos(x - 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ebből:

$$x - 45° = k \cdot 360° \pm 45°$$

A megoldás:

$$x_1 = k \cdot 360° + 90° \text{ és } x_2 = k \cdot 360°, \text{ahol } k \text{ egész szám.}$$

Megjegyzés:

Ha négyzetre emeljük mindkét oldalt, akkor hamis gyökök jelennek meg. Ugyanis:

$$(\sin x)^2 + 2 \sin x \cos x + (\cos x)^2 = 1$$

$$\sin 2x = 0$$

Ebben az egyenletben már nem csak az eredeti egyenlet gyökei szerepelnek, hanem a következő egyenleté is:

$$\sin x + \cos x = -1$$

11.3.22. Alakítsuk át az egyenletet:

$$\sin x + \cos x = (\sin x)^2 + 2 \sin x \cos x + (\cos x)^2$$

$$\sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2$$

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x + \cos x = 0$

Ebből: $x_1 = (4k - 1) \cdot \frac{\pi}{4}$

2. eset: $\sin x + \cos x - 1 = 0$. Lásd az előző feladatot! A megoldás:

$$x_2 = k \cdot 360° + 90° \text{ és } x_3 = k \cdot 360°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.23. Ugyanúgy oldható meg, mint a **11.3.21.** A megoldás:

$$x = (8k + 1) \cdot 15°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.24. Alkalmazzuk mind a két oldalon a következő egyenlőséget:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Ekkor:

$$\frac{1}{2}[\cos(x - 7x) - \cos(x + 7x)] = \frac{1}{2}[\cos(3x - 5x) - \cos(3x + 5x)]$$

Ebből:

$$\cos 6x - \cos 2x = 0$$

Szorzattá alakítva:

$$\sin 4x \cdot \sin 2x = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

$$\sin 4x = 0\ vagy\ \sin 2x = 0$$

Az első gyökei mind szerepelnek a második egyenlet gyökei között. A megoldás:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.25. Alkalmazzuk mind a két oldalon a következő egyenlőséget:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}, és\ x_2 = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{8}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.26. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 2(2x)$$

$$\sin 2x\,(2\sin x \sin 3x - \cos 2x) = 0$$

Vezessük be a **11.3.24.** feladat szerint az alábbi helyettesítést:

$$2\sin x \sin 3x = \cos 2x - \cos 4x$$

Ebből:

$$\sin 2x\,(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0$$

$$\sin 2x \cdot \cos 4x = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = k \cdot \frac{\pi}{2}, és\ x_2 = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{8}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.27. Alkalmazzuk a következő egyenlőséget:

$$(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$$

Ekkor:

$$5(\cos x)^2 + 4\cos x - 3 = 0$$

Ebből:

$$\cos x = \frac{\sqrt{19}-2}{5}\ vagy\ \cos x = -\frac{\sqrt{19}+2}{5}$$

Megoldást csak az első esetből kapunk:

$$x = 2k\pi \pm arc\cos\frac{\sqrt{19}-2}{5}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.28. Alkalmazzuk a következő egyenlőséget:

$$\cos 2x = 1 - 2(\sin x)^2$$

Ekkor:

$$10(\sin x)^2 + 4\sin x - 5 = 0$$

A megoldás:

$$x = k\pi + (-1)^k \cdot arc\sin\frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.29. Alkalmazzuk a következő egyenlőséget:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Ekkor:

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

Vagyis az egyenletünk:

$$(\tan x)^2-4\tan x+1=0$$

A megoldás:

$$x=k\pi+arc\tan\left(2\pm\sqrt{3}\right), ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.30. Alkalmazzuk a következő egyenlőségeket:

$$\cos(\pi-x)=-\cos x\ \ és\ \ \sin\frac{x+\pi}{2}=\cos\frac{x}{2}$$

Ekkor:

$$1+\cos x+\cos\frac{x}{2}=0$$

Vagyis:

$$2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2+\cos\frac{x}{2}=0$$

A megoldás:

$$x_1=(2k+1)\cdot\pi\ és\ x_2=(3k\pm1)\cdot\frac{4\pi}{3}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.31. Alkalmazzuk a következő egyenlőségeket:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x\ \ és\ \ \tan\frac{\pi-x}{2}=\cot\frac{x}{2}$$

Ekkor:

$$2(1+\cos x)-\sqrt{3}\cdot\cot\frac{x}{2}=0$$

Alkalmazzuk a következő egyenlőséget:

$$\cot\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Ekkor:

$$(1+\cos x)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{\sin x}\right)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $1+\cos x=0$

Ebből: $x_1=(2k+1)\cdot\pi$

2. eset: $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ebből: $x_2=k\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}, ahol\ k\ egész\ szám, n\ természetes\ szám.$

11.3.32. Alkalmazzuk a következő egyenlőséget:

$$(\cos x)^2=1-(\sin x)^2$$

Az egyszerűsítések után:

$$3\sin x+\cos x=0$$

Vagyis:

$$\tan x=-\frac{1}{3}$$

A megoldás:

$$x=k\pi-arc\tan\frac{1}{3}$$

11.3.33. Alakítsuk át a baloldalt a következő módon:

$$\cot x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{\cos x+(\cos x)^2+(\sin x)^2}{\sin x\,(1+\cos x)}=\frac{\cos x+1}{\sin x\,(1+\cos x)}$$

A $\cos x+1\neq 0$. Ezért:

$$\frac{1}{\sin x}=2$$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

Azoknak a szögeknek, amelyekre $\sin x=\frac{1}{2}$, a koszinusza nem lehet -1. A megoldás:

$$x=k\pi+(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}, ahol\ k\ egész\ szám, n\ természetes\ szám.$$

11.3.34. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\frac{(\sin x)^3(\sin x+\cos x)}{\sin x}+\frac{(\cos x)^3(\sin x+\cos x)}{\cos x}=(\cos x)^2-(\sin x)^2$$

Legyen $\sin x \neq 0$ *és* $\cos x \neq 0$! Ekkor rendezve az egyenletet:

$$(\sin x+\cos x)((\sin x)^2+(\cos x)^2-\cos x+\sin x)=0$$

$$(\sin x+\cos x)(1-\cos x+\sin x)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x+\cos x=0$

Ebből: $x_1=(4k-1)\cdot\frac{\pi}{4}$

2. eset: $\cos x-\sin x=1.$

Ebből: $x_2=2k\pi\ vagy\ x_3=(4k-1)\cdot\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$

Azonban x_2 esetén $\sin x=0$, x_3 esetén $\cos x=0$. Tehát ezek hamis gyökök.

11.3.35. Rendezzük át az egyenletet a következő módon:

$$\tan 2x=\tan 3x-\tan x$$

Osszuk el mind a két oldalt $(1+\tan x\tan 3x)$-szel. Ekkor:

$$\frac{\tan 2x}{1+\tan x\tan 3x}=\tan(3x-x)$$

Ebből:

$$\tan 2x=\tan 2x\,(1+\tan x\tan 3x)$$

Vagyis:

$$\tan x\cdot\tan 2x\cdot\tan 3x=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\tan 3x=0$

Ebből: $x_1=k\cdot\frac{\pi}{3}$

2. eset: $\tan x=0.$

Új gyököt nem kapunk, mert mindegyik előfordul az első esetben.

3. eset: $\tan 2x = 0$.

Ebből: $x_2 = k \cdot \frac{\pi}{2}$, *ahol k egész szám.*

Ezek az értékek páros *k*-ra ismét nem újak. Páratlan *k*-ra viszont hamis gyökök. Ugyanis ha $k = 2n + 1$, akkor az $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ értékekre az eredeti egyenletben a $\tan x$ *és* $\tan 3x$ értelmetlenné válik.

11.3.36. Alkalmazzuk a $\cos(\alpha - \beta)$-ra vonatkozó képletet a jobb oldalra:

$$2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$$

Fejezzük ki a baloldalt is $\frac{x}{2}$ függvényeivel:

$$(1 + \cos x) + \sin x = 2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 + 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$$

Vagyis a következő egyenletet kaptuk:

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)$$

$$\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0$

Ebből: $x_1 = k \cdot 360° - 90°$

2. eset: $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ebből: $x_2 = k \cdot 720° \pm 90°$, *ahol k egész szám.*

11.3.37. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$1 - (\cos 2x)^2 = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$(\sin 2x)^2 = \sin 3x + \sin x$$

$$(\sin 2x)^2 = 2\sin 2x + \cos x$$

$$\sin 2x\,(\sin 2x - 2\cos x) = 0$$

$$2\sin 2x\cos x\,(\sin x - 1) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin 2x = 0$

2. eset: $\cos x = 0$

3. eset: $\sin x = 1$

A két utóbbi egyenlet gyökei mind előfordulnak az első egyenlet gyökei között. A megoldás:

$$x = k \cdot \frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.38. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right) =$$

$$= \cos 2x = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

Vagyis az egyenlet a következő alakba írható:

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

$$(\sin x)^2 + 2\sin x \cos x + (\cos x)^2 = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$$

$$2(\sin x)^2 + 2\sin x \cos x = 0$$

$$2\sin x\,(\sin x + \cos x) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x = 0$

Ebből: $x_1 = k \cdot \pi$

2. eset: $\sin x + \cos x = 0$

Ebből: $x_2 = (4k-1) \cdot \frac{\pi}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.39. A baloldalon helyettesítsük be a következőt:

$$1 + \sin 2x = (\cos x + \sin x)^2$$

A jobb oldalon helyettesítsük be a következőt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Ezek után szorozzuk be az egyenletet $\cos x$-szel. Ekkor:

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x + \sin x) = 0$$

$$(\cos x + \sin x)[(\cos x)^2 - (\sin x)^2 - 1] = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos x + \sin x = 0$

Ebből: $x_1 = (4k-1) \cdot \frac{\pi}{4}$

2. eset: $(\cos x)^2 - (\sin x)^2 - 1 = 0$

Ebből: $x_2 = k \cdot \pi, ahol\ k\ egész\ szám.$

11.3.40. Alakítsuk át az egyenletet:

$$(\cos x + \sin x)^2(\cos x - \sin x) = \cos 2x$$

$$(\cos x + \sin x)[(\cos x)^2 - (\sin x)^2] = \cos 2x$$

$$(\cos x + \sin x)\cos 2x = \cos 2x$$

$$\cos 2x\,(\cos x + \sin x - 1) = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{4}, x_2 = 2k \cdot \pi, x_3 = (4k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\ ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.41. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{(\cos x)^2 - (\sin 2x)^2}{4(\cos x)^2} = \frac{1}{4} - \frac{4(\sin x)^2(\cos x)^2}{4(\cos x)^2} = \frac{1}{4} - (\sin x)^2, ha\ \cos x \neq 0$$

A jobb oldalon alkalmazzuk a következő azonosságot:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin(x + 30°)\sin(x - 30°) = \frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - (1 - (\sin x)^2)\right] =$$

$$= \frac{-1 + 4(\sin x)^2}{4}$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{4} - (\sin x)^2 = -\left[\frac{1}{4} - (\sin x)^2\right]$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1}{4}$$

Ebből:

$$\sin x = \frac{1}{2}\ és\ \sin x = -\frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 30° \text{ és } x_2 = k \cdot 180° - (-1)^k \cdot 30°, \text{ahol } k \text{ egész szám.}$$

11.3.42. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{\sin(60° + x) + \sin(60° - x)}{2} = \sin 60° \cdot \cos x$$

Alakítsuk át a jobb oldalt, ha $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$:

$$\frac{\tan x}{[1 + (\tan x)^2]^2} + \frac{\cot x}{[1 + (\cot x)^2]^2} = \tan x\,(\cos x)^4 + \cot x\,(\sin x)^4 =$$

$$= \sin x\,(\cos x)^3 + \cos x\,(\sin x)^3 = \sin x \cos x\,[(\cos x)^2 + (\sin x)^2] = \sin x \cos x$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sin 60° \cdot \cos x = \sin x \cos x$$

$$\cos x\,(\sin 60° - \sin x) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. A kikötés miatt $\cos x = 0$ nem lehet.

A megoldás:

$$x_1 = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 60° \text{ ahol } k \text{ egész szám.}$$

11.3.43. Alakítsuk át a baloldalt szorzattá:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2} \cdot \sin x$$

Alakítsuk át a jobb oldal számlálóját:

$$\tan\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{\sin x}$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sqrt{2} \cdot \sin x = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin x}$$

A megoldás:

$$x = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}, \text{ahol } k \text{ egész szám.}$$

11.3.44. Alakítsuk át a baloldalt:

$$2\sqrt{2}\sin(45° + x) = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = 2(\sin x + \cos x)$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{1+\cos 2x}{1+\sin x}=\frac{2(\cos x)^2}{1+\sin x}=\frac{2(1-(\sin x)^2)}{1+\sin x}=2(1-\sin x)$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$2(\sin x+\cos x)=2(1-\sin x)$$

$$(1-\cos x)-2\sin x=0$$

Azaz:

$$2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2-4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$

$$2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-2\cos\frac{x}{2}\right)=0$$

A megoldás:

$$x_1=2k\pi \text{ és } x_2=2(k\pi+arc\tan 2), ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.45. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\sin 3x=3\sin x-4(\sin x)^3$$

Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$4\sin x\cos 2x=4\sin x\,(1-(\sin x)^2)$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$3\sin x-4(\sin x)^3=4\sin x\,(1-(\sin x)^2)$$

$$3\sin x-4(\sin x)^3=4\sin x-8(\sin x)^3$$

$$\sin x\,(4(\sin x)^2-1)=0$$

A megoldás:

$$x_1=k\cdot 180^\circ \text{ és } x_2=(6k\pm 1)\cdot 30^\circ, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.46. Alakítsuk át a tört nevezőjét:

$$\tan 2x-\tan x=\frac{\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x}{\cos x\cos 2x}=\frac{\sin x}{\cos x\cos 2x}=\frac{\tan x}{\cos 2x}$$

Vagyis az egész tört értéke: $\sin 2x$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sin 2x-2\sin(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)=0$$

$$\sin 2x - \cos 2x = 0$$

$$\tan 2x = 1$$

A megoldás:

$$x = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{8}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.47. Alakítsuk át a jobb oldalt, ha $x \neq (2k + 1) \cdot 45°$:

$$\tan(x + 45°) \tan(x - 45°) \tan x = \tan(x - 45°) \cot(45° - x) \tan x = -1 \cdot \tan x$$

Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{\tan(x + 45°) + \tan(x - 45°)}{2} = \frac{1}{2}[\tan(x + 45°) - \cot(x + 45°)] =$$

$$= \frac{[\sin(x + 45°)]^2 - [\cos(x + 45°)]^2}{2 \sin(x + 45°) \cos(x + 45°)} = -\cot(2x + 90°)$$

Vagyis:

$$\tan 2x = -\tan x\ \ vagy\ \ \tan 2x = \tan(-x)$$

Ebből következik, hogy $2x$ és $-x$ különbsége $180°$ egész számú többszöröse: $3x = k \cdot 180°$

A megoldás:

$$x = k \cdot 60°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.48. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 - \sin x$$

Alakítsuk át a jobb oldal nevezőjét:

$$\tan\frac{x}{2} - \tan\frac{x + \pi}{2} = \tan\frac{x}{2} - \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2} + \cot\frac{x}{2} = \frac{2}{\sin x}$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$1 - \sin x = \sin x$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 30°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.49. Alakítsuk át mind a két oldalt. Ekkor:

$$\tan x = 1 + 2\tan x$$

$$\tan x = -1$$

A megoldás:

$$x = (4k-1)\cdot 45°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.50. Mivel:

$$(\sin x)^4 = [(\sin x)^2]^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$

Ezért:

$$\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^4 = \left[\frac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]^2 = \left(\frac{1+\sin 2x}{2}\right)^2$$

Így az alábbi egyenletet kapjuk:

$$1-\cos 2x+\sin 2x = 0\ vagy\ 2(\sin x)^2 + 2\sin x\cos x = 0$$

A megoldás:

$$x_1 = k\pi\ és\ x_2 = (4k-1)\cdot\frac{\pi}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.51. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sin(x+30°) + \cos x = \frac{3}{2}$$

$$\sin x\sin 30° + \cos x\cos 30° + \cos x = \frac{3}{2}$$

$$1 - \frac{\sin x}{\sqrt{3}} = \sqrt{1-(\sin x)^2}$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre, rendezzük 0-ra, majd alakítsuk szorzattá:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x - 1\right) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x = 0$

Ebből: $x_1 = k\pi$

2. eset: $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin x - 1 = 0$

Ebből: $x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ *és* $x_3 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$

Ezek között vannak hamis gyökök a négyzetre emelés miatt. A megoldás:

$$x_1 = 2k\pi \text{ és } x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.52. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\frac{\sin ax}{\cos ax} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\cos x \cos ax - \sin x \sin ax = \cos(a+1)x = 0$$

$$(a+1)x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{2(a+1)} + \frac{k}{a+1} \cdot \pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.53. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$(\sin x)^4(1 - (\sin x)^2) + (\cos x)^4(1 - (\cos x)^2) = \frac{1}{4}$$

$$(\sin x)^4(\cos x)^2 + (\cos x)^4(\sin x)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(\sin x)^2(\cos x)^2[(\sin x)^2 + (\cos x)^2] = \frac{1}{4}$$

$$4(\sin x)^2(\cos x)^2 = 1$$

$$(\sin 2x)^2 = 1$$

A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.54. A gyökjel és a nevező miatt csak olyan x-re van értelmezve az egyenlet, melyekre $\cos 2x > 0$. Vagyis:

$$\frac{(2k-1)\pi}{4} < x < \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = 0$$

$$\cos x\,[(\cos x)^2 - (\sin x)^2] - \sin x\, 2 \sin x \cos x = 0$$

$$(\cos x)^3 - \cos x\,(\sin x)^2 - 2(\sin x)^2 \cos x = 0$$

$$(\cos x)^3 - 3\cos x\,(\sin x)^2 = 0$$

$$4(\cos x)^3 - 3\cos x = 0$$

$$\cos 3x = 0$$

Ebből:

$$3x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + l\pi$$

A megoldás:

$$x_1 = 30° + k \cdot 180° \text{ és } x_1 = 150° + k \cdot 180°, \textit{ahol } k \textit{ egész szám.}$$

11.3.55. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\left(\sqrt[6]{1 + 2\cos 2x}\right)^3 - \left(\sqrt[6]{1 + 2\cos 2x}\right)^2 = 0$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\sqrt[6]{1 + 2\cos 2x} = t$$

Ekkor:

$$t^3 - t^2 = t^2(t-1) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $t^2 = 0, azaz\ 1 + 2\cos 2x = 0$. Ebből:

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ és } x_2 = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \textit{ahol } k \textit{ egész szám.}$$

2. eset: $t = 1, azaz\ 1 + 2\cos 2x = 1$. Ebből:

$$\cos 2x = 0$$

A megoldás:

$$x_3 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.56. Alakítsuk át az egyenletet. Mivel $\sin(\pi - x) = \sin x$, ezért a baloldal:

$$[\cos x - \sin(\pi - x)]^2 + 1 = (\cos x - \sin x)^2 + 1 =$$

$$= (\cos x)^2 + (\sin x)^2 - 2\sin x \cos x + 1 = 2(1 - \sin x \cos x)$$

A következő egyenletet kapjuk:

$$2(1 - \sin x \cos x) = \frac{2(\sin x)^2(\cos x)^2}{1 - (\cos x)^2}$$

Ebből:

$$1 - \sin x \cos x = (\cos x)^2$$

$$1 - (\cos x)^2 = \sin x \cos x$$

$$(\sin x)^2 - \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x\,(\sin x - \cos x) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x = 0, azaz\ x = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$ Ekkor azonban a jobb oldal nem értelmezhető.

2. eset: $\sin x = \cos x$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.57. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 + \sin x$$

1. eset: $1 + \sin x = 0, azaz\ \sin x = -1.$

A megoldás:

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $1 + \sin x = 1, azaz\ \sin x = 0$

A megoldás:

$$x_2 = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.58. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$2\sin 2x + \cos 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2x\,(2\sin 2x + 1) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos 2x = 0$.

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

A megoldás:

$$x_2 = -\frac{\pi}{12} + k\pi, és\ x_3 = -\frac{5\pi}{12} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.59. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sin x + 2\sin x\cos x = \cos x + (\cos x)^2 - (\sin x)^2 + 1$$

$$\sin x\,(1 + 2\cos x) = \cos x\,(1 + 2\cos x)$$

$$(\sin x - \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x - \cos x = 0$.

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $\cos x = -\frac{1}{2}$

A megoldás:

$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, és\ x_3 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.60. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$(\cos x)^2 - (\sin x)^2 + 3\sin x = -1$$

$$1-(\sin x)^2-(\sin x)^2+3\sin x=-1$$

$$-2(\sin x)^2+3\sin x+2=0$$

Az másodfokú egyenlet gyökei:

1. eset: $\sin x=2$.

A megoldás: Ez nem lehetséges.

2. eset: $\sin x=-\frac{1}{2}$

A megoldás:

$$x_1=\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \text{és } x_2=\frac{11\pi}{6}+2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.61. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sin x=1+\cos x$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2$$

$$2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos\frac{x}{2}=0$.

A megoldás:

$$x_1=\pi+2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=0, azaz\ \tan\frac{x}{2}=1$

A megoldás:

$$x_2=\frac{\pi}{2}+2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.62. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$(\sin x)^2=\frac{\sin x}{2\cos x}$$

$$\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2\cos x}\right)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x = 0$.

A megoldás:

$$x_1 = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $\sin x - \frac{1}{2\cos x} = 0, azaz\ \sin 2x = 1$

A megoldás:

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.63. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x - \cos x = 1 + \frac{\sin x}{10}$$

$$\sin x\left(\sqrt{3} - 0{,}1\right) = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3} - 0{,}1}$$

A megoldás:

$$x_1 = 37{,}8° + k \cdot 360° \text{ és } x_1 = 142{,}2° + k \cdot 360°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.64. Az egyenletnek csak akkor van megoldása, ha $\sin x = 0$ *és* $\cos x \neq -1$.

A megoldás:

$$x = \pm 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.65. A megoldás:

$$x_1 = 60° + k \cdot 180°, x_2 = 120° + k \cdot 180°,$$

$$x_3 = 30° + k \cdot 180°, x_4 = 150° + k \cdot 180°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.66. A megoldás:

$$x_1 = k \cdot 120°, x_2 = 60° + k \cdot 120°, x_2 = 15° + k \cdot 120°$$

$$x_4 = 45° + k \cdot 120°, x_5 = 105° + k \cdot 120°, x_6 = 75° + k \cdot 120°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.67. A $\sin x$ függvény miatt:

$$\frac{\pi}{2}\cos x = \frac{\pi}{2}(4k + 1)$$

Ebből:

$$\cos x = 4k + 1$$

Mivel $|\cos x| \leq 1, ezért\ \cos x = 1$. A megoldás:

$$x = 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.68. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sin 4x + (\cos 2x)^2 = (\sin 2x)^2$$

$$\sin 4x + (\cos 2x)^2 - (\sin 2x)^2 = 0$$

$$\sin 4x + \cos 4x = 0$$

Ebből:

$$4x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\ és\ 4x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\ és\ x_1 = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}\ , ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.69. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\cos 3x = 3\cos x$$

$$4(\cos x)^3 - 3\cos x = 3\cos x$$

$$4(\cos x)^3 - 6\cos x = 0$$

$$2\cos x\,(2(\cos x)^2 - 3) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos x = 0$.

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $2(\cos x)^2 - 3 = 0,\ de\ (\cos x)^2 \neq \frac{3}{2}$. Ebben az esetben nincs megoldás.

11.3.70. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

$$\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$$

$$\sqrt{1 - (\sin x)^2} = \sqrt{3}(1 - \sin x)$$

Ebből:

$$\sin x = 1 \text{ és } \sin x = \frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ és } x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Megjegyzés:

Az $x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám$, hamis gyök.

11.3.71. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sqrt{3}\sin 2x - 2(\sin x)^2 = 1$$

$$\sqrt{3}\sin x \cos x = 1 + 2(\sin x)^2$$

$$\sqrt{3}\sin x \sqrt{1 - (\sin x)^2} = 1 + 2(\sin x)^2$$

Emeljük négyzetre mind a két oldalt:

$$12(\sin x)^2(1 - (\sin x)^2) = 1 + 4(\sin x)^2 + 4(\sin x)^4$$

$$16(\sin x)^4 - 8(\sin x)^2 + 1 = 0$$

$$[4(\sin x)^2 - 1]^2 = 0$$

Ebből:

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ és } \sin x = -\frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ és } x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.72. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\tan x + \cot x = 2\sin 2x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 4\sin x \cos x$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 4(\sin x)^2(\cos x)^2$$

$$1 = (\sin 2x)^2$$

Ebből:

$$\sin 2x = 1 \text{ és } \sin 2x = -1$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ és } x_2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ahol } k \text{ egész szám.}$$

11.3.73. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sin 2x + 1 = 4(\cos x)^2$$

$$2 \sin x \cos x = 4(\cos x)^2 - 1$$

$$2 \cos x \sqrt{1 - (\cos x)^2} = 4(\cos x)^2 - 1$$

$$4(\cos x)^2(1 - (\cos x)^2) = 16(\cos x)^4 - 8(\cos x)^2 + 1$$

$$20(\cos x)^4 - 12(\cos x)^2 + 1 = 0$$

Ebből:

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2} \text{ és } (\cos x)^2 = \frac{1}{10}$$

1. eset: $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A megoldás:

$$x_1 = 45° + k \cdot 360° \text{ és } x_2 = -45° + k \cdot 360°, \text{de ez hamis gyök.}$$

2. eset: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. A megoldás:

$$x_3 = 135° + k \cdot 360° \text{ és } x_4 = -135° + k \cdot 360°, \text{de ez hamis gyök.}$$

3. eset: $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$. A megoldás:

$$x_5 = 71{,}6° + k \cdot 360° \text{ és } x_6 = -71{,}6° + k \cdot 360°, \text{de ez hamis gyök.}$$

4. eset: $\cos x = \frac{\sqrt{10}}{10}$. A megoldás:

$$x_7 = 108{,}4° + k \cdot 360° \text{ és } x_8 = -108{,}4° + k \cdot 360°, \text{de ez hamis gyök.}$$

Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

11.3.74. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\sin x + \tan x = \sin 2x$$

$$\sin x + \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x$$

$$\sin x\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)=2\sin x\cos x$$

1. eset: Ha $\sin x=0$, akkor:

$$x_1=k\pi$$

2. eset: Ha $\sin x\neq 0$, akkor:

$$1+\frac{1}{\cos x}=2\cos x$$

$$2(\cos x)^2-\cos x-1=0$$

Ebből:

$$\cos x=1\ és\ \cos x=-\frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x_2=2k\pi, x_3=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, x_4=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.75. A $\sin x\ és \cos x$ egyszerre nem lehet nulla. Legyen $\cos x\neq 0$. Ekkor:

$$\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x}=1$$

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

A megoldás:

$$x=\frac{\pi}{6}+k\pi\ ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.76. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$2(\sin x)^2+\cos x=2$$

$$2[1-(\cos x)^2]+\cos x=2$$

$$-2(\cos x)^2+\cos x=0$$

$$-2\cos x\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)=0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\cos x = 0$.

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2. eset: $\cos x = \frac{1}{2}$.

A megoldás:

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.77. Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$\cos 2x = \sin x$$

$$(\cos x)^2 - (\sin x)^2 = \sin x$$

$$1 - 2(\sin x)^2 = \sin x$$

$$2(\sin x)^2 + \sin x - 1 = 0$$

Ebből:

$$\sin x = -1\ és\ \sin x = \frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.78. Alakítsuk át a baloldalt az alábbi módon:

$$\frac{1}{(\sin x)^2} + \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\sin x)^2(\cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x)^2(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{4}{4(\sin x)^2(\cos x)^2} = \frac{4}{(2\sin x \cos x)^2} = \frac{4}{(\sin 2x)^2} \geq 4$$

Mivel $-1 \leq \sin 2x \leq 1, ezért\ 0 \leq (\sin 2x)^2 \leq 1$. Vagyis a nevező 1-nél nem nagyobb pozitív szám, azaz a hányados nem lehet kisebb 4-nél. Tehát minden *x*-re igaz az állítás.

11.3.79. A $\sin x$ függvény alapján:

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{x}{\pi} \leq \frac{13\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Vagyis a megoldás:

$$\frac{5\pi^2}{6} + 2k\pi^2 \leq x \leq \frac{13\pi^2}{6} + 2k\pi^2$$

11.3.80. A nevező miatt: $x \neq k\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám$. Rendezzük egy oldalra, majd alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$1 + (\tan x)^2 - \frac{1}{(\cos x)^2} - \frac{1}{(\sin x)^2} = \frac{(\sin x)^2(\cos x)^2 + (\sin x)^4 - (\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(\sin x)^2(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x)^2((\sin x)^2 - 1) + (\sin x)^2((\sin x)^2 - 1)}{(\sin x)^2(\cos x)^2} = \frac{((\sin x)^2 - 1)((\sin x)^2 + (\cos x)^2)}{(\sin x)^2(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x)^2 - 1}{(\sin x)^2(\cos x)^2} < 0$$

Ez a tört mindig negatív, mert a feltétel miatt a számláló negatív, a nevező pedig pozitív. Tehát az egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

11.3.81. A $\sin x$ függvény alapján:

$$\frac{\pi}{6} + k\pi \leq \frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Ebből *x*-et kifejezve, a megoldás:

$$\frac{5}{4} + 3k \leq x \leq \frac{13}{4} + 3k$$

11.3.82. A $\cos x$ függvény alapján:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \pi x < \frac{3\pi}{4} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Ebből *x*-et kifejezve, a megoldás:

$$\frac{1}{4} + k < x < \frac{3}{4} + k$$

11.3.83. Végezzük el a szorzást:

$$\cos x\left(\tan x - \frac{1}{\cos x}\right) = \sin x - 1 < 0$$

Vagyis:

$$\sin x < 1$$

Tehát a megoldás: $\sin x \neq 1, azaz\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám$, minden más valós szám megoldás.

11.3.84. Rendezzük egy oldalra, majd alakítsuk át a kifejezést:

$$2\cos x - \sin 2x \leq 0$$

$$2\cos x - 2\sin x \cos x \leq 0$$

$$2\cos x\,(1 - \sin x) \leq 0$$

A $\cos x$ *és* $\sin x$ függvény alapján:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.85. A $\sin x$ függvény alapján két intervallum felel meg:

1.

$$0 \leq \pi\sqrt{x} < \frac{\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Vagyis:

$$0 \leq x < \frac{1}{36} + 4k^2, ahol\ k\ egész\ szám.$$

2.

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < \pi\sqrt{x} < \frac{13\pi}{6} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Vagyis:

$$\left(\frac{5}{6} + 2k\right)^2 < x < \left(\frac{13}{6} + 2k\right)^2$$

11.3.86. Vizsgáljuk meg a két oldal értékkészletét:

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1$$

$$-3 \leq \sin(6x) - 2 \leq -1$$

Vagyis a baloldal értékei nagyobbak vagy egyenlőek a jobb oldal értékeinél. Tehát minden valós szám megoldás.

11.3.87. A tangens függvény és a nevező miatt:

$$x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Alakítsuk át a baloldalt:

$$(\tan 2x)^2 - \frac{1}{(\cos 2x)^2} = \frac{(\sin 2x)^2 - 1}{(\cos 2x)^2} = \frac{-(-(\sin 2x)^2 + 1)}{(\cos 2x)^2} = \frac{-(\cos 2x)^2}{(\cos 2x)^2} = -1 < 1$$

Tehát a feltétel kivételével minden valós szám megoldás.

11.3.88. Alakítsuk át a baloldalt:

$$(\cos 2x + \sin 2x)^2 = (\cos 2x)^2 + (\sin 2x)^2 + 2\cos 2x \sin 2x = 1 + \sin 4x$$

Ez egy azonosság, tehát minden valós szám megoldás.

11.3.89. Mivel

$$|(\sin 2x)^2 - 1| = |-(1 - (\sin 2x)^2)| = |-(\cos 2x)^2| = (\cos 2x)^2$$

A feltétel a $(\cos 2x)^2 \leq (\cos 2x)^2$ egyenlőtlenségnek felel meg, tehát minden valós szám megoldás.

11.3.90. Mivel

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right] = \sin(-x) = -\sin x$$

Az egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$4\sin x\,(\cos x)^2 + \sin x > 0$$

$$\sin x\,(4(\cos x)^2 + 1) > 0$$

A második tényező mindig pozitív, tehát $\sin x > 0$ kell, hogy teljesüljön. A megoldás:

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.91. A $\cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám$. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)}{\cos x}\tan x = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}\cos 2x + \sin\frac{3\pi}{2}\sin 2x}{\cos x}\tan x =$$

$$= \frac{-\sin 2x}{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sin 2x \sin x}{(\cos x)^2} = -2\cos x\,(\tan x)^2 < 0$$

Azaz

$$2\cos x\,(\tan x)^2 > 0$$

Ez akkor teljesül, ha a két függvény azonos előjelű. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2k\pi\ vagy\ 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.92. A tangens és cotangens függvények miatt: $x \neq k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$ Alakítsuk át a kifejezést:

$$\tan\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\right] =$$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} + x\right) = \cot(-2\pi + x) = \cot x$$

Azaz

$$\cot x \geq \cot x$$

A megoldás: A feltétel kivételével minden valós szám.

11.3.93. A cotangens függvény miatt: $x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, ahol\ k\ egész\ szám.$ Mivel:

$$\cot(3x - \pi) = \cot 3x$$

Továbbá:

$$\sin\left(3x - \frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(3x - \frac{7\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x + \frac{7\pi}{2}\right) = \cos(4\pi - 3x) = \cos(-3x) = \cos(3x)$$

Az egyenlőtlenség a következő alakba írható: $\cos(3x) < \cot(3x)$

A megoldás:

$$\frac{k\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.94. Alakítsuk át a kifejezést:

$$0 \leq \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x = \cos(5x + 2x) = \cos 7x$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7} \leq x \leq \frac{\pi}{14} + \frac{2k\pi}{7}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.95. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \sin\frac{\pi}{3}\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \leq 0$$

A megoldás:

$$-\frac{2\pi}{3} - 2k\pi \geq x \geq -\frac{5\pi}{3} - 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.96. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin x}{\sqrt{2}} \leq 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \leq 1$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x \leq 1$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \leq 1$$

A megoldás: Minden valós szám.

11.3.97. Nézzük meg, hogy a következő két függvénynek van-e metszéspontja:

$$\cos x = \sin x + \sqrt{2}$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 1$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$$

Ebből: $x = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$ A grafikonok érintik egymást, tehát ez adja a megoldást.

11.3.98. A cotangens függvény miatt: $x \neq k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$ Nézzük meg, hogy a következő két függvénynek van-e metszéspontja:

$$(\cot x)^2 = (\sin x)^2 + \frac{1}{2}$$

A metszéspontok: $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$ A megoldás:

$$\frac{3\pi}{4} + m\pi < x < m\pi\ vagy\ \pi + n\pi < x < \frac{5\pi}{4} + n\pi, ahol\ m, n\ egész\ számok.$$

11.3.99. Alakítsuk át a kifejezést:

$$2\cos x - \cos 2x - (\sin x)^2 > 0$$

$$2\cos x - [(\cos x)^2 - (\sin x)^2] - (\sin x)^2 > 0$$

$$2\cos x - (\cos x)^2 > 0$$

$$\cos x\,(2 - \cos x) > 0$$

Ez akkor teljesül, ha $\cos x > 0$, mert a másik kifejezés mindig pozitív. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.100. Alakítsuk át a kifejezést:

$$2\sin x + 2\cos x > 1 + \sin 2x$$

$$2(\sin x + \cos x) > (\sin x + \cos x)^2$$

$$2(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2 > 0$$

$$(\sin x + \cos x)(2 - \sin x - \cos x) > 0$$

Ez akkor teljesül, ha $\sin x + \cos x > 0$, mert a másik kifejezés mindig pozitív. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.101. Az első egyenlet baloldalát átírhatjuk a következő alakba:

$$\cos\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2} = \frac{\cos x + \cos y}{2}$$

Vagyis:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Ennek a megoldása:

$$\cos x = \cos y = \frac{1}{2}$$

A megoldás:

$$x = (6k \pm 1)\frac{\pi}{3}\ és\ y = (6l \pm 1)\frac{\pi}{3}, ahol\ k, l\ egész\ szám.$$

11.3.102. Az exponenciális függvény miatt az egyenletrendszer a következő alakba írható:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ebből:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{és} \quad \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

A megoldás:

$$x_1 = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 30°, \qquad x_2 = k \cdot 180° - (-1)^k \cdot 30°$$

$$y_1 = (3k \pm 1) \cdot 120°, \qquad y_1 = (6k \pm 1) \cdot 60°, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.103. A második egyenletet alakítsuk át, majd helyettesítsük be az elsőt. Ekkor:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}} \end{cases}$$

Az első egyenletet először hozzáadva a másodikhoz, azután kivonva belőle, a következőt kapjuk:

$$\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cos(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vagyis:

$$x + y = 2k\pi \pm arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x - y = 2l\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

Ahol *k és l* egymástól független egész számok, és a kettős előjel is tetszőleges lehet mind a két esetben. A $k + l$ *és* $k - l$ számok szintén egészek, de már nem függetlenek egymástól, mert vagy mind a kettőnek párosnak vagy mind a kettőnek páratlannak kell lennie.

A megoldás:

$$x_1 = n\pi + \frac{1}{2}arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}, \qquad y_1 = t\pi + \frac{1}{2}arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$$

$$x_2 = n\pi + \frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}, \qquad y_2 = t\pi + \frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$$

$$x_3 = n\pi - \frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}, \qquad y_3 = t\pi - \frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}$$

$$x_4 = n\pi - \frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}, \qquad y_4 = t\pi - \frac{1}{2} arc\cos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}$$

Ahol: $n = k + l$ *és* $t = k - l$.

11.3.104. Emeljük négyzetre mind a két egyenletet, majd adjuk össze:

$$1 = 4(\sin y)^2 + \frac{1}{4}(\cos y)^2$$

Ebből:

$$(\cos y)^2 = \frac{4}{5} \text{ } és \text{ } (\sin y)^2 = \frac{1}{5}$$

Vagyis:

$$\cos y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ } és \text{ } \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Az előjel mindkét estben egymástól függetlenül is tetszőleges lehet. Helyettesítsük be $\cos y$ és $\sin y$ értékeit az eredeti egyenletekbe. Ekkor az *x* és *y* eleget tesz az alábbi négy eset valamelyikének:

1. $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2. $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

3. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

4. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \sin x = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos y = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Mivel $\cos x \text{ } és \text{ } \cos y$, valamint $\sin x \text{ } és \text{ } \sin y$ előjele mindig megegyezik, ezért az *x* és *y* szög mindig ugyanazon síknegyedbe esik. Az 1. esetben az elsőbe, a 2. esetben a negyedikbe, a 3. esetben a másodikba, a 4. esetben a harmadikba. A megoldás:

$$x_1 = 2k\pi + arc\cos\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad y_1 = 2k\pi + arc\cos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x_2 = 2k\pi - arc\cos\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad y_2 = 2k\pi - arc\cos\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$x_3 = 2k\pi + arc\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad y_3 = 2k\pi + arc\cos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$x_4 = 2k\pi - arc\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \qquad y_4 = 2k\pi - arc\cos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

11.3.105. Adjuk össze a két egyenletet, majd alakítsuk tovább:

$$x(1-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha + y(1-\cos 2\alpha)\cos 2\alpha = y(1-\cos 2\alpha)$$

$$-x(1-\cos 2\alpha)\sin 2\alpha - y(\sin 2\alpha)^2 = -\sin 2\alpha$$

$$2y(\cos 2\alpha - 1) = -\sin 2\alpha$$

A megoldás:

$$y = \frac{\sin 2\alpha}{2(1-\cos 2\alpha)} = \frac{1}{2\tan\alpha}, \qquad x = \frac{1}{2}$$

11.3.106. Az első egyenletből:

$$\sin x = \frac{1}{2} + \cos y$$

Alakítsuk át a második egyenletet:

$$1 - 2(\sin x)^2 + 2(\cos y)^2 - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$-2\left(\frac{1}{2} + \cos y\right)^2 + 2(\cos y)^2 = -\frac{1}{2} - 2\cos y = -\frac{3}{2}$$

Ebből:

$$\cos y = \frac{1}{2}, \qquad \sin x = 1$$

A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.107. A második egyenlet alapján:

$$\sin x = -\sin y = \sin(-y)$$

Ekkor két esetet kell vizsgálni.

1. $x-(-y)=2k\pi$

$$\begin{cases} x+y=\pi \\ x+y=2k\pi \end{cases}$$

Ez $k=\frac{1}{2}$ esetén lenne igaz, de a *k* csak egész szám lehet.

2. $x+(-y)=\pi+2k\pi$

$$x-y=\pi+2k\pi$$

$$x-(\pi-x)=\pi+2k\pi$$

$$2x=2\pi+2k\pi$$

$$x=\pi+k\pi$$

$$x=\pi(1+k)$$

Legyen $1+k=l$, ekkor a megoldás:

$$x=\pi l$$

$$y=\pi-\pi l=\pi(1-l)$$

11.3.108. A $\sin x=\sin y$ pontosan akkor teljesül, ha:

$$x-y=k\cdot 2\pi\ vagy\ x+y=(2k+1)\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Az előbbi minden *k* egész számra kielégíti az első egyenletet, mivel:

$$\sin\frac{x-y}{2}=\sin k\pi=0$$

A második csak akkor megoldás, ha:

$$\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}=\sin[(2k+1)\pi]\cdot\sin\frac{x-y}{2}=0$$

Vagyis ha teljesül az alábbi:

$$x-y=l\cdot 2\pi, ahol\ l\ egész\ szám.$$

A megoldás:

$$x=\alpha, y=\alpha+k\cdot 2\pi, ahol\ \alpha\ valós\ szám, k\ egész\ szám.$$

11.3.109. A második egyenlet szerint:

$$y=-x$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve:

$$\sin \pi x \cos \pi(-x) = 0$$

Azonban:

$$\cos x = \cos(-x)$$

Ezért:

$$\sin \pi x \cos \pi y = 0$$

$$2 \sin \pi x \cos \pi y = 0$$

$$\sin 2\pi x = 0$$

A megoldás:

$$2\pi x = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

$$x = \frac{k}{2}, y = -\frac{k}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.3.110. A tangens függvény miatt: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), ahol\ k\ egész\ szám.$

A kotangens függvény miatt: $x \neq \pi n, ahol\ n\ egész\ szám$. A második egyenlet alapján:

$$x = \pi(2k+1), ahol\ k\ egész\ szám.$$

Ekkor: $\sin x = 0$ és $\tan x = 0$. Vagyis az első egyenlet:

$$0 \cdot \cot y = 0 \cdot \cos y$$

Tehát az *y* bármilyen értéket felvehet, kivéve a π egész számú többszöröseit. A megoldás:

$$x = \pi(2k+1), ahol\ k\ egész\ szám.$$

$$y \neq \pi n, ahol\ n\ egész\ szám.$$

11.3.111. A tangens és kotangens függvény miatt:

$$x \neq \frac{\pi}{2} \cdot k, ahol\ k\ egész\ szám.$$

$$y \neq \frac{\pi}{2} \cdot k, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Alakítsuk át az egyenleteket:

$$\begin{cases} \tan x = \dfrac{1}{\cot y} = \tan y \\ \tan y = \dfrac{1}{\cot x} = \tan x \end{cases}$$

A megoldás:

$$x = \alpha, y = \alpha + \pi \cdot k, ahol\ \alpha\ valós\ szám, k\ egész\ szám.$$

11.3.112. Adjuk össze a két egyenletet:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 + \sin y - \cos y = 1$$

$$\sin y - \cos y = 0$$

$$\sin y = \cos y$$

$$y = \frac{\pi}{4} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe:

$$(\sin x)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \frac{1}{2}$$

1. Ha *k* páros, akkor:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\sin x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$$

Ez ellentmondás.

2. Ha *k* páratlan, akkor:

$$y = \frac{\pi}{4} + \pi(2n + 1), ahol\ n\ egész\ szám.$$

$$y = \frac{5\pi}{4} + 2n\pi$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe:

$$(\cos x)^2 + \sin\left(\frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right) = \frac{1}{2}$$

$$(\cos x)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$$

Ez ellentmondás, tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

11.3.113. A tört miatt:

$$\sin y \neq 0, y \neq k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

Alakítsuk át a két egyenletet:

$$x = \frac{2\pi}{3} - y$$

$$\sin x = 2 \sin y$$

Behelyettesítve:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} - y\right) = 2 \sin y$$

Az addíciós tétel alapján:

$$\sin\frac{2\pi}{3}\cos y - \cos\frac{2\pi}{3}\sin y = 2 \sin y$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos y - \frac{1}{2}\sin y = 2 \sin y$$

Ezt tovább alakítva a következőt kapjuk: $\cot y = \sqrt{3}$

$$y = \frac{\pi}{6} + n\pi, x = \frac{\pi}{2} - n\pi, ahol\ n\ egész\ szám.$$

11.3.114. A $\sin(x - y) = \frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha:

$$x - y = \frac{\pi}{6} + k2\pi\ vagy\ x - y = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

A $\cos(x + y) = \frac{1}{2}$ pontosan akkor, ha:

$$x + y = \frac{\pi}{3} + l2\pi\ vagy\ x + y = -\frac{\pi}{3} + l2\pi$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + m\pi, \qquad y_1 = \frac{\pi}{12} + n\pi$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{12} + m\pi, \qquad y_2 = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{6} + m\pi, \qquad y_3 = \frac{\pi}{4} + n\pi$$

$$x_4 = \frac{\pi}{4} + m\pi, \qquad y_4 = -\frac{7\pi}{6} + n\pi, ahol\ m, n\ azonos\ parítású\ egész\ szám.$$

11.3.115. A $\sin y$ *és* $\cos x$ függvények miatt a második egyenlet csak akkor teljesülhet, ha:

$$\sin y = -1 \text{ és } \cos x = -1$$

Vagyis:

$$x = (2k+1)\pi \text{ és } y = (4k+3)\frac{\pi}{2}$$

Ezek az értékek az első egyenletet is igazzá teszik.

11.3.116. A két egyenletet szorozzuk össze:

$$(2\sin x \cos x)(2\sin y \cos y) = -1$$

$$\sin 2x \sin 2y = -1$$

Ez az egyenlőség két esetben teljesülhet:

1. eset: $\sin 2x = 1$ *és* $\sin 2y = -1$

Ebből:

$$x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{4} \text{ és } y_1 = (4l+3)\frac{\pi}{4}$$

2. eset: $\sin 2x = -1$ *és* $\sin 2y = 1$

Ebből:

$$x_2 = (4k+3)\frac{\pi}{4} \text{ és } y_2 = (4l+1)\frac{\pi}{4}$$

Ezek közül csak azok az (x, y) párok adnak megoldást, amelyekben a *k, l* különböző paritású.

11.3.117. A $|\sin 2x| \leq 1$ *és* $|\cos 3y \leq 1|$ miatt az első egyenlet csak két esetben teljesülhet.

1. eset: $\sin 2x = \cos 3y = 1$. Ebből:

$$x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{4} \text{ és } y_1 = l\frac{2\pi}{3}$$

2. eset: $\sin 2x = \cos 3y = -1$. Ebből:

$$x_2 = (4k+3)\frac{\pi}{4} \text{ és } y_2 = (2l+1)\frac{2\pi}{3}$$

Ezek azonban nem elégítik ki a második egyenletet, mivel ezekre:

$$\sin 4x = 0 \text{ és } |\cos 3y| = 1$$

Tehát a feladatnak nincs megoldása.

11.3.118. Alakítsuk át a második egyenletet:

$$\cos 2x + \cos 2y = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 + (\cos y)^2 - (\sin y)^2 =$$

$$1 - 2(\sin x)^2 + 2(\cos y)^2 - 1 = 2[(\cos y)^2 - (\sin x)^2] =$$

$$= 2(\cos y + \sin x)(\cos y - \sin x) = -\frac{3}{2}$$

Felhasználva az első egyenletet a következőt kapjuk:

$$\cos y + \sin x = \frac{3}{2}$$

Ezt adjuk hozzá az első egyenlethez:

$$2 \sin x = 2, azaz \ \sin x = 1$$

A megoldás:

$$x_1 = (4k+1)\frac{\pi}{2} \text{ és } y_1 = \pm\frac{\pi}{3} + l2\pi, ahol\ k, l\ egész\ számok.$$

11.3.119. Az első egyenletből: $y = \pi - x$. Ezt helyettesítsük a második egyenletbe:

$$\sin x + \sin y = \sin x + \sin(\pi - x) = 2 \sin x = 1, azaz \ \sin x = \frac{1}{2}$$

Ebből:

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ és } x_2 = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

$$y_1 = \frac{5\pi}{6} - l2\pi \text{ és } y_2 = \frac{\pi}{6} - l2\pi, ahol\ k, l\ egész\ számok.$$

11.3.120. Az első egyenletből: $x = \frac{\pi}{2} + y$. Ezt helyettesítsük a második egyenletbe:

$$\cos x + \cos 2y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \cos 2y = -\sin y + (\cos y)^2 - (\sin x)^2 =$$

$$= -\sin y + 1 - 2(\sin y)^2 = 1$$

Ebből:

$$\sin y\,(1 + 2\sin y) = 0$$

Egy szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin y = 0$. Ebből:

$$y_1 = k\pi \text{ és } x_1 = \frac{\pi}{2} + l\pi$$

2. eset: $1 + 2\sin y = 0$. Ebből:

$$y_2 = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, \qquad y_3 = \frac{5\pi}{3} + k2\pi$$

$$x_2 = \frac{11\pi}{6} + l2\pi, \qquad x_3 = \frac{13\pi}{6} + l2\pi, ahol\ k, l\ egész\ számok.$$

11.4. Vegyes feladatok

11.4.1. A $(\sin x)^6 + (\cos x)^6$ kifejezést bontsuk fel az alábbi képlet szerint:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ekkor figyelembe véve, hogy $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, a következőt kapjuk:

$$-(\sin x)^4 - 2(\sin x)^2(\cos x)^2 - (\cos x)^4 + 1 = 1 - ((\sin x)^2 + (\cos x)^2)^2 = 0$$

Tehát igaz az állítás.

11.4.2. Először fejtsük ki a $\cos(\alpha + \beta)$ kifejezést:

$$(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 2(\sin\alpha)^2(\sin\beta)^2$$

A harmadik tagot változatlanul hagyjuk, a többit alakítsuk az alábbi szerint:

$$((\sin\alpha)^2 - (\sin\alpha)^2(\sin\beta)^2) + ((\sin\beta)^2 - (\sin\alpha)^2(\sin\beta)^2) + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= (\sin\alpha)^2(\cos\beta)^2 + (\cos\alpha)^2(\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta)^2 + (\cos\alpha\sin\beta)^2 + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta =$$

$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)^2 = [\sin(\alpha + \beta)]^2$$

11.4.3. Az első három tag összege:

$$(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} + (\sin\gamma)^2$$

Mivel a feltétel szerint $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, ezért:

$$(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 = 1 - \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + [\sin(\alpha + \beta)]^2 =$$

$$= 1 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) + [1 - (\cos(\alpha + \beta))^2]$$

Vagyis:

$$(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 = 2 - \cos(\alpha+\beta)\,[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés értéke azonban $2\cos\alpha\cos\beta$, és mivel $\alpha+\beta = \pi-\gamma$, ezért:

$$(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Ezt rendezve:

$$(\sin\alpha)^2 + (\sin\beta)^2 + (\sin\gamma)^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$$

Tehát igaz az állítás.

11.4.4. A baloldal a következő módon alakítható:

$$\cot\alpha\cot\beta + (\cot\alpha + \cot\beta)\cot\gamma$$

A zárójelben lévő kifejezés értéke:

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Másrészt:

$$\cot\gamma = \cot[\pi - (\alpha+\beta)] = -\cot(\alpha+\beta)$$

Vagyis a baloldal:

$$\cot\alpha\cot\beta - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Tovább alakítva:

$$\cot\alpha\cot\beta - \left(\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right) =$$

$$= \cot\alpha\cot\beta - (\cot\alpha\cot\beta - 1) = 1$$

Tehát igaz az állítás.

11.4.5. Használjuk fel a következő összefüggéseket:

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{2\sin\frac{\pi}{5}} \quad \text{és} \quad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{2\sin\frac{2\pi}{5}}$$

Ezeket összeszorozva:

$$\frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

Használjuk fel a következő összefüggést:

$$\sin\frac{4\pi}{5} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{5}$$

Tehát igaz az állítás.

11.4.6. Alakítsuk át a baloldalt a $(\cos x + \cos y)$-ra vonatkozó képlettel:

$$2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}$$

Ez pedig már azonos az előző feladat megoldásával. Tehát igaz az állítás.

11.4.7. Használjuk fel a következő összefüggést:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

Ekkor:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1+\sin 2\alpha} = \sqrt{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{1+2t+t^2} = \frac{t+1}{t}$$

11.4.8. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\frac{\cos\alpha\,(1+\cos\alpha) + (\sin\alpha)^2}{\sin\alpha\,(1+\cos\alpha) - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha + (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2}{\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2}$$

Ebből:

$$\tan x = \cot\frac{\alpha}{2}$$

A megoldás:

$$x = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + k\pi, \qquad ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.9. A megoldás:

$$\frac{1}{(\sin x)^2(\cos x)^2} = \frac{(1+(\cot x)^2)^2}{(\cot x)^2}$$

11.4.10. Az első egyenlet kétszeresét vonjuk ki a másodikból:

$$(\cot y)^2 = 1 \text{ és } (\tan x)^2 = 3$$

A megoldás:

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ és } y_1 = \frac{\pi}{4} + l\pi$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ és } y_2 = \frac{\pi}{4} + l\pi$$

$$x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ és } y_3 = -\frac{\pi}{4} + l\pi$$

$$x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi \text{ és } y_4 = -\frac{\pi}{4} + l\pi, ahol\ k, l\ egész\ számok.$$

11.4.11. Az első egyenletet alakítsuk át:

$$1 = \tan\frac{\pi}{4} = \tan(2x+y) = \frac{\tan 2x + \tan y}{1 - \tan 2x \tan y}$$

Ezt vessük egybe a második egyenlettel:

$$\tan 2x \tan y = 0$$

Ebből:

$$2x = k\pi\ vagy\ y = k\pi$$

Ha $2x = k\pi$, akkor:

$$x_1 = k\frac{\pi}{2} \text{ és } y_1 = \frac{\pi}{4} - k\pi$$

Ha $y = k\pi$, akkor:

$$x_2 = \frac{\pi}{8} - k\frac{\pi}{2} \text{ és } y_2 = k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.12. A második egyenlőség az alábbi esetben teljesül:

$$\frac{\pi x}{8} = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

Vagyis:

$$x = 6 + 8k \text{ és } y = \frac{n}{6 + 8k}, \text{ahol } k, n \text{ egész számok.}$$

11.4.13. Az első egyenlőség csak akkor teljesül, ha:

$$\tan x = \tan 3y \,, \text{vagyis } x - 3y = k\pi$$

Ezzel: $3x = 9y + k3\pi$. Vagyis:

$$\cot 3x + \tan 9y = \cot(9y + k3\pi) + \tan 9y =$$

$$= \cot 9y + \tan 9y = \frac{1}{\tan 9y} + \tan 9y = 2$$

Ebből:

$$(\tan 9y)^2 - 2\tan 9y + 1 = (\tan 9y - 1)^2 = 0$$

Azaz: $\tan 9y = 1$. A megoldás:

$$y = (4k + 1)\frac{\pi}{36} \text{ és } x = \frac{\pi}{12} + (3l + k)\frac{\pi}{3}, \text{ahol } k, l \text{ egész számok.}$$

11.4.14. A második egyenletből csak a következő teljesülhet:

$$\cos 2x = 1 \text{ és } \sin y = -1$$

Ebből:

$$x = k\pi \text{ és } y = (4l + 3)\frac{\pi}{2}, \text{ahol } k, l \text{ egész számok.}$$

Ezek az első egyenletet is igazzá teszik.

11.4.15. Rendezzük és alakítsuk szorzattá az egyenlőtlenséget:

$$(\sin x)^4 + 3(\sin x)^2 - 4 = ((\sin x)^2 + 4)((\sin x)^2 - 1) > 0$$

A $(\sin x)^2 + 4 > 0$ minden valós számra, illetve a $(\sin x)^2 - 1 \leq 0$. A szorzatuk így nem lehet pozitív, tehát nincs megoldása az egyenlőtlenségnek.

11.4.16. Alakítsuk át a jobb oldalt:

$$(\tan x)^2 = \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1 - (\cos x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2} - 1$$

Ezért az egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$-\frac{2}{\cos x}+1\leq -1$$

$$2\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)\leq 0$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha:

$$1\leq \frac{1}{\cos x}$$

Vagyis: $0<\cos x\leq 1$. A megoldás:

$$-\frac{\pi}{2}+k2\pi<x<\frac{\pi}{2}+k2\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.17. Végezzük el a következő átalakítást:

$$(\cot x)^2=\frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}=\frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}=\frac{1}{(\sin x)^2}-1$$

Ezért az egyenlőtlenség a következő alakba írható:

$$-\frac{2}{\sin x}<-2$$

$$2\left(1-\frac{1}{\sin x}\right)<0$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha:

$$1<\frac{1}{\sin x}$$

Vagyis: $0<\sin x<1$. A megoldás:

$$k2\pi<x<(2k+1)\pi\ és\ x\neq(4k+1)\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.18. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$1+\sin x\geq \sin 2x+2\cos x$$

$$1+\sin x\geq 2\sin x\cos x+2\cos x$$

$$1+\sin x\geq 2\cos x\,(1+\sin x)$$

$$(1+\sin x)(1-2\cos x)\geq 0$$

Mivel $-1 \leq \sin x$ minden valós számra, ezért $1 + \sin x \geq 0$. Tehát a $\cos x \leq \frac{1}{2}$ a feltétele, hogy teljesüljön az eredeti egyenlőtlenség. A megoldás:

$$\frac{\pi}{3} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{3} + k2\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.19. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\cos x} \leq \tan x$$

$$\frac{1}{\cos x} \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$0 \leq \frac{1}{\cos x}(\sin x - 1)$$

A $\sin x - 1 \leq 0$ minden valós számra. Tehát: $\frac{1}{\cos x} < 0$. A szükséges és elégséges feltétele, hogy az eredeti egyenlőtlenség igaz legyen: $\cos x < 0$. A megoldás:

$$\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.20. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{\sin x} > \cot x$$

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} > 0$$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} > 0$$

A $\cos x \leq 1$ minden valós számra, tehát $x \neq k\pi\ az\ 1 - \cos x > 0$. A hányados pontosan akkor pozitív, ha a nevező is az. A megoldás:

$$2k\pi < x < (2k+1)\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.21. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\sin x \cos 5x > \cos x \sin 5x$$

$$0 > \sin 5x \cos x - \sin x \cos 5x = \sin(5x - x) = \sin 4x$$

Ebből:

$$\pi + k2\pi < 4x < 2\pi + k2\pi$$

A megoldás:

$$\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.22. Alakítsuk át az egyenlőtlenséget:

$$\cos 2x \cos 3x \leq \sin 2x \sin 3x$$

$$\cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x \leq 0$$

$$\cos(2x + 3x) \leq 0$$

$$\cos 5x \leq 0$$

Ebből:

$$\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 5x \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$$

A megoldás:

$$\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \leq x \leq \frac{3\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.23. Két valós szám hányadosa pontosan akkor pozitív, ha szorzatuk is pozitív. Vagyis:

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 = \cos 2x > 0$$

Ebből:

$$-\frac{\pi}{2} + k2\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.24. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\frac{(\tan x)^2-(\sin x)^2}{(\cot x)^2-(\cos x)^2}>1$$

$$\frac{(\sin x)^2\left[\frac{1}{(\cos x)^2}-1\right]}{(\cos x)^2\left[\frac{1}{(\sin x)^2}-1\right]}>1$$

$$\frac{(\sin x)^2\left[\frac{1-(\cos x)^2}{(\cos x)^2}\right]}{(\cos x)^2\left[\frac{1-(\sin x)^2}{(\sin x)^2}\right]}>1$$

$$\frac{(\sin x)^2\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}}{(\cos x)^2\frac{(\cos x)^2}{(\sin x)^2}}>1$$

$$\frac{(\sin x)^6}{(\cos x)^6}>1$$

$$(\tan x)^6>1$$

Ebből: $\tan x>1\ vagy\ \tan x<-1$. A megoldás:

$$\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi\ vagy\ -\frac{\pi}{2}+k\pi<x<-\frac{\pi}{4}+k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.25. Alakítsuk át a baloldalt:

$$(\cos x)^4-(\sin x)^4\geq\frac{1}{2}$$

$$[(\cos x)^2+(\sin x)^4][(\cos x)^2-(\sin x)^2]\geq\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x\geq\frac{1}{2}$$

Ebből:

$$-\frac{\pi}{3}+k2\pi\leq 2x\leq\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{6}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{6}+k\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.26. Alakítsuk át a baloldalt:

$$(\cos x)^4 + (\sin x)^4 \geq \frac{3}{4}$$

$$[(\cos x)^2 + (\sin x)^2]^2 - 2(\cos x)^2(\sin x)^2 \geq \frac{3}{4}$$

$$1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 \geq \frac{3}{4}$$

Ebből:

$$\frac{1}{2} \geq (\sin 2x)^2$$

Vagyis:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin 2x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ebből:

$$-\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq 2x \leq \frac{\pi}{4} + k2\pi \; vagy \; \frac{3\pi}{4} + k2\pi \leq 2x \leq \frac{5\pi}{4} + k2\pi$$

A megoldás:

$$-\frac{\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{8} + k\pi \; vagy \; \frac{3\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$$

11.4.27. A $|\cos x| \leq 1$ miatt $(\cos 6x)^2 - 1 \leq 0$, vagyis a $\sqrt{(\cos 6x)^2 - 1}$ csak a $(\cos 6x)^2 = 1$ esetén értelmezhető. Ez a $6x = k\pi, azaz \; x = k\frac{\pi}{6}$ esetén teljesül és akkor a jobb oldal 0. A baloldal akkor 0, ha $\sin x = \frac{1}{2}$, vagyis:

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \; vagy \; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, ahol \; k \; egész \; szám.$$

A megoldás:

$$x_1 = (12k + 1) \cdot \frac{\pi}{6} \; és \; x_1 = (12k + 5) \cdot \frac{\pi}{6}, ahol \; k \; egész \; szám.$$

11.4.28. A $|\cos x| \leq 1$ miatt az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ és } \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

Vagyis:

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ és } 3x + \frac{\pi}{4} = (2k+1)\pi$$

Azaz:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

A kettő egyszerre csak úgy teljesülhet, ha: $\frac{2}{3}k = 2l, vagyis\ k = 3l$. A megoldás:

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.29. Szorozzuk be az egyenletet 2-vel és alakítsuk tovább:

$$\sin x \cos x - \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \tan x}$$

$$2\sin x \cos x - 1 = 2\sqrt{1 - \tan x}$$

$$\sin 2x - 1 = 2\sqrt{1 - \tan x}$$

A $\sin 2x \leq 1$ miatt csakis a $\sin 2x = 1$ jöhet számításba. A megoldás:

$$x = (4k+1) \cdot \frac{\pi}{4}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.30. A $\cot x \geq 1$ miatt $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ lehet csak. Ezekre:

$$\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq 0, azaz\ \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A feltételnek csak az $x = \frac{\pi}{4}$ felel meg.

11.4.31. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha:

$$\sqrt{1 - \sin x} \cdot \sqrt{1 + \sin x} = -\cos x$$

$$\sqrt{1 - (\sin x)^2} = -\cos x$$

$$\sqrt{(\cos x)^2} = -\cos x$$

$$|\cos x| = -\cos x \text{ és } -1 \leq \cos x \leq 0$$

Azonban $x \neq \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, mert a nevező nem lehet 0 és $|\cos x|$ nem lehet negatív.

A $-1 \leq \cos x \leq 0$ akkor teljesül, ha:

$$\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + k2\pi, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.32. Alakítsuk át a baloldalt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{41}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{41} + \cos x \sin\frac{\pi}{41}$$

Ekkor az egyenlet a következő alakba írható:

$$\cos\frac{\pi}{41}(\sin x - 1) = 0$$

Mivel $\cos\frac{\pi}{41} \neq 0$, ezért $\sin x = 1$. A megoldás:

$$x = (4k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

11.4.33. A $\sqrt{1 - (\sin x)^2} = \sqrt{(\cos x)^2} = |\cos x| = \cos x$, mivel a baloldalon nem negatív kifejezések összege áll. Ezért a jobb oldal is nem negatív, azaz $\cos x \geq 0$. Vagyis az egyenlet a következő alakba írható:

$$\sqrt{1 + \sin x} = \cos x$$

Ebből:

$$1 + \sin x = (\cos x)^2$$

$$1 + \sin x = 1 - (\sin x)^2$$

$$\sin x\,(1 + \sin x) = 0$$

Vagyis:

$$\sin x = 0\ vagy\ \sin x = -1$$

Ebből:

$$x_1 = k\pi\ és\ x_2 = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$$

A $\cos x \geq 0$ feltétel miatt: $x = k2\pi$. A megoldás:

$$x_1 = k2\pi\ és\ x_2 = (4k + 3)\frac{\pi}{2}, ahol\ k\ egész\ szám.$$

12. Síkgeometria

12.1. Háromszögek

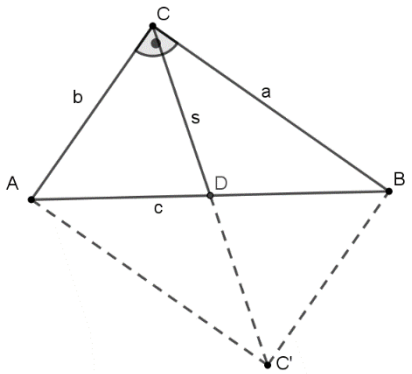
12.1.1 Legyenek a keresett befogók a, b. A Pitagorasz tételértelmében $a^2+b^2=41^2$, illetve a terület alapján $a\cdot b=360$. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása adja a két befogót, melyek: 9 cm és 40 cm.

12.1.2 A terület alapján a másik befogó 10 cm. Az átfogó 26 cm. A háromszög köré írható kör sugara a Thalész tétel alapján: 13 cm, a beírt kör sugara pedig a c = a + b - 2r alapján 4 cm.

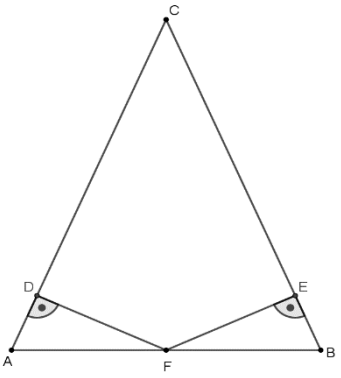
12.1.3 $a^2+15^2=c^2$, ebből 225 = (a-c)·(a+c), ahol a-b < a+b, így, a 225 = 1·225, ekkor a=112 cm, c= 113 cm, vagy 3·75, ekkor a=36 cm, c=39 cm, vagy 5·45, ekkor a=20 cm, c=25 cm, vagy 9·25, ekkor a=8 cm, c=17 cm. Tehát 4 ilyen derékszögű háromszög van.

12.1.4 6db

12.1.5 A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó súlyvonal (s) egyenlő az átfogó (c) felével. A mértani közép alapján $\frac{c}{2}=\sqrt{a\cdot b}$, ebből $b=\frac{c^2}{4a}$. A Pitagorasz-tétel alapján $a^2+b^2=c^2$, ebbe b-t behelyettesítve $a^2+\frac{c^4}{16a^2}=c^2$. Ebből a^2-re nézve egy másodfokú egyenletet kapunk, melynek gyökei $c^2\cdot\left(2\pm\sqrt{3}\right)$, melyből csak $a^2=\frac{c^2\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}$ lehetséges, így $a=\frac{c\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, $b=\frac{c}{2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

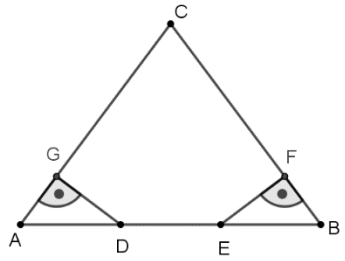


12.1.6 A szárak (AC, BC) hossza a Pitagorasz-tétel segítségével 50 cm. Az ABC háromszög területe 1200 cm^2. Így a CFB háromszög területe 600 cm^2. Ez felírható a CB oldal, és a hozzá tartozó EF magasság segítségével is, így EF = 24 cm, és a DF szakasz is ugyanennyi. A CE (=CD) szakasz pedig a Pitagorasz-tételből 32 cm, így a CEFD négyszög kerülete K = 112 cm, területe T=768 cm^2.



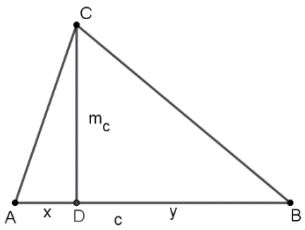
12.1.7 Az előző feladat alapján a kerület $\frac{170}{13}$ cm, a terület $\frac{1500}{169}$ cm^2.

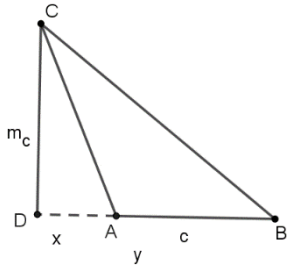
12.1.8 Az előző feladat alapján, EF=GD=3,2 cm, BF = AG = 2,4 cm, így CF = CG = 7,6 cm, így a kerület 25,6 cm, a terület 40,32 cm^2.



12.1.9 Az adott arányból $a=3x, m_a=2x$, a kerületből $b=\frac{64-3x}{2}$. Pitagorasz-tétel segítségével x = 8 cm. Így a = 24 cm, m_a = 16 cm, b = 20 cm. Innen az előző feladat alapján a kerület 51,2 cm, a terület 161,28cm^2.

12.1.10 Két eset van. Az egyik, hogy a háromszög hegyesszögű, ekkor $x=\sqrt{20}$ cm, $y=\sqrt{33}$ cm, így a harmadik oldal $x+y=\sqrt{20}+\sqrt{33}\approx 10{,}22$ cm, a másik, hogy a háromszög tompaszögű, ekkor x és y értéke nem változik, de a harmadik oldal $y-x=\sqrt{33}-\sqrt{20}\approx 1{,}27$ cm.





12.1.11 Az előző feladat alapján a harmadik oldal 21 cm, vagy 9 cm.

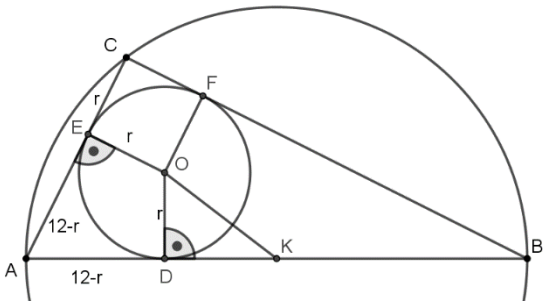
12.1.12 A szabályos háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Mivel ez egyben súlyvonal is, melyet a súlypont harmadol, és a súlypont egyben a beírható, illetve köré írható kör középpontja is, így a beírható kör sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot a$, a köré írható kör sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$. Ez utóbbi 2 cm-el nagyobb, ebből $a=4\sqrt{3}$

12.1.13 I. eset, ha a két befogó van megadva. Ekkor az átfogó $c=2\sqrt{61}$. Ekkor a Thalész tétel értelmében a köré írt kör sugara $R=\sqrt{61}\approx 7{,}81$ cm, a beírt kör sugara pedig legegyszerűbben a $c=a+b-2r$ alapján $r=\frac{22-2\sqrt{61}}{2}\approx 3{,}19$ cm.. II. eset, ha az átfogó 12 cm, ekkor a másik befogó $b=\sqrt{44}$. Ekkor R = 6 cm, $r=\frac{\sqrt{44}-2}{2}\approx 2{,}32$.

12.1.14 $T = r \cdot s$ alapján, ahol az r a háromszögbe írt kör sugara, s pedig a félkerület, a kerület 36 cm. Így $c = a + b - 2r$ alapján pedig c=15 cm (c az átfogó). A területből még $a \cdot b = 104$, illetve $a + b = 21$, ennek az egyenletrendszernek a megoldásai 9 és 12. Így a háromszög oldalai 9 cm, 12 cm, 15 cm.

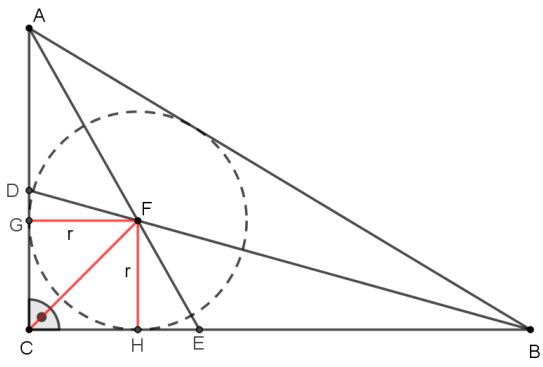
12.1.15 A háromszög oldalai 6,5 cm, 6 cm, 2,5 cm.

12.1.16 A derékszögű háromszög átfogója 20 cm. Köré, illetve bele írt körének középpontjai K, O. A beírt kör sugara r = 3 cm. Az OFCE négyszög négyzet, mert minden szöge derékszög, és két szomszédos oldala OE és OF biztosan r. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok hossza megegyezik, ezért AD = AE = 12 – r = 9 cm. Az AK szakasz hossza Thalész tételének értelmében az átfogó fele, így AK = 10cm, így DK = 1cm. Az ODK derékszögű háromszögben így a Pitagorasz-tétel segítségével OK = $\sqrt{10}$ cm.



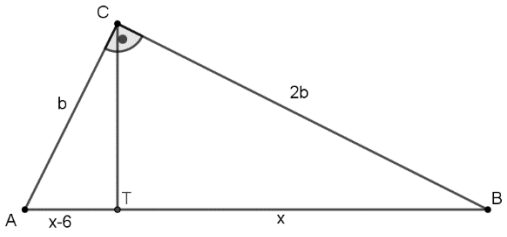
12.1.17 Az előző feladathoz hasonlóan a két középpont távolsága $\sqrt{52}$ cm.

12.1.18 A két befogó CA = 16 cm és CB = 30 cm. A szögfelező tétel értelmében $\frac{CE}{CB-CE}=\frac{AC}{AB}$. Ebből CE = 9,4 cm. Így a CEA derékszögű háromszögben az AE ≈ 18,56 cm. A másik szögfelező ehhez hasonlóan BD ≈ 7,5 cm. A beírt kör sugara a korábbi feladatok alapján r = 6 cm. A derékszögű csúcs és a beírható kör távolsága a CHFG négyzet átlója, CF = $6\sqrt{2}$ cm.

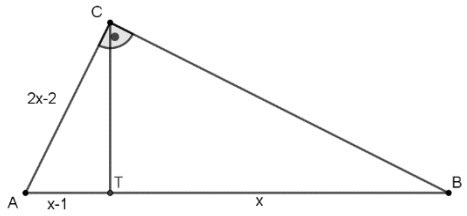


12.1.19 Az oldalak x, x-2, x-16 cm-esek. A Pitagorasz-tétel alapján $x_1 = 26$, $x_2 = 10$ cm, ez utóbbi nem megoldás. Így a két befogó 24 cm, és 10 cm. A befogótétel alapján a befogók átfogóra eső vetületeinek hossza: $\frac{288}{13}$, illetve $\frac{50}{13}$ cm, így az arányuk $\frac{144}{25}$. Az átfogóhoz tartozó magasság a magasságtétel alapján $\frac{120}{13}$ cm.

12.1.20 A befogótételt alkalmazzuk a ’b’ oldalra: $b^2=(x-6)\cdot(2x-6)$, illetve $4b^2=x\cdot(2x-6)$Ennek az egyenletrendszernek a megoldása: x = 8, illetve x = 3cm (ez utóbbi nem megoldása a feladatnak). Így a háromszög oldalai: 10cm, $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm.



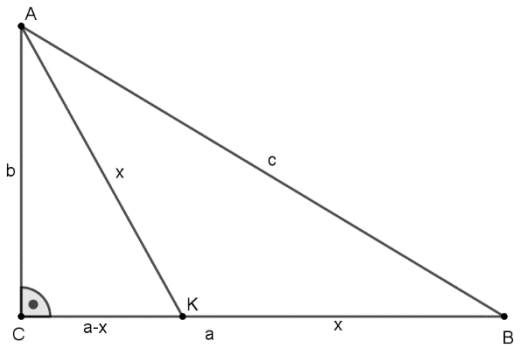
12.1.21 Az átfogó 2x-1, a kisebbik befogó 2x-2. A befogótétel alapján $(2x-2)^2=(x-1)\cdot(2x-1)$. Ennek megoldásai x = 1 (nem megoldása a feladatnak), és az x = 1,5 cm. Így a háromszög oldalai: 2 cm, 1 cm, $\sqrt{3}$ cm. A háromszögbe írható kör sugara $r=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$



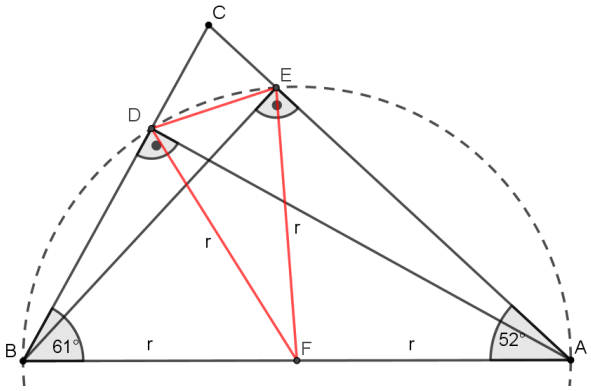
12.1.22 A feladat feltétele alapján $a^2=b\cdot c$. Ezt a Pitagorasz-tételbe helyettesítve $b\cdot c+b^2=c^2$, amiből $b^2+b\cdot c-c^2=0$, b-re másodfokú egyenlet. Ennek gyökei $b_{1,2}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4\cdot1\left(-c^2\right)}}{2}=\frac{-c\pm\sqrt{5c^2}}{2}=\frac{-c\pm c\sqrt{5}}{2}$. Ebből csak a $b=c\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ezt visszahelyettesítve $a=c\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$

12.1.23 A háromszög oldalai. 15 cm, 8 cm, és 17cm. I. eset: a = 15 cm, b = 8 cm. Ekkor a KCA derékszögű háromszögben $x=\frac{289}{30}\approx9{,}63cm$.

II. eset: a = 8 cm, és b = 15 cm. Ekkor $x=\frac{289}{16}\approx18{,}06cm$



12.1.24 Mivel a D, E pontok két magasságvonal talppontjai, belőlük az AB szakasz derékszög alatt látszik. Így rajta vannak az AB szakasz Thalész-körén. Így AF = EF = DF = BF = r. Tehát az AFE, EFD, DFB háromszögek mindegyike egyenlő szárú háromszög. Így az AEF∠= 52°, ebből következésképpen az EFA∠=76°.

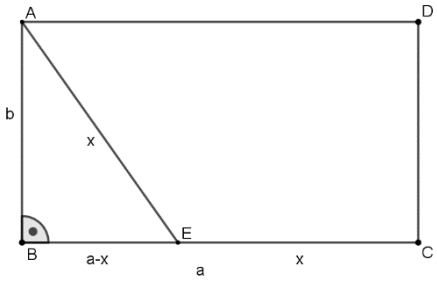


Hasonlóképpen a BFD∠=58°. DFE∠= 180°-(76°+58°) = 46°. FDE∠=DEF∠=67°.

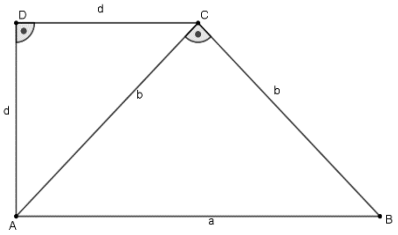
12.2. Négyszögek

12.2.1. Az ABE derékszögű háromszögben $x^2 = b^2 + (a-x)$. Mivel b = 12 cm, és a = 20 cm, akkor x = 13,6 cm. Ha a rövidebik oldalon keressük azt a pontot, amelyik egyenlő távolságra van két átellenes csúcstól, akkor a megoldás hasonlóképpen,

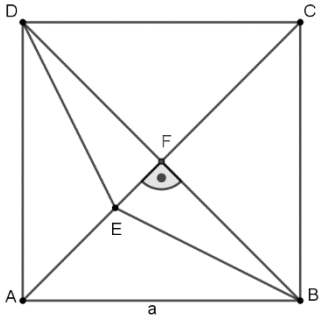
x ≈ 22,67 cm.



12.2.2. A feladat feltételei csak úgy teljesülhetnek, hogy derékszögű trapézról van szó. Az ábra jelöléseit használva $b = \sqrt{2} \cdot d$. Ebből pedig $a = 2 \cdot d$. Így a trapéz területe $t = \frac{2d+d}{2} \cdot d = \frac{3}{2} d^2$

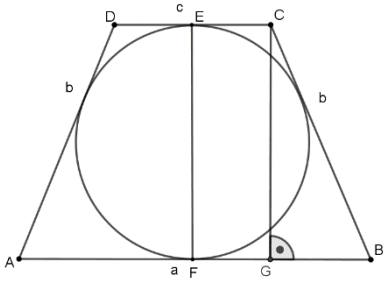


12.2.3. Az AC átló harmadolópontja az E pont. Kérdés az AE, BE, CE, DE távolság. Az AC átló hossza $\sqrt{2} \cdot a$, így $AE = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{3}$, illetve $CE = \frac{2\sqrt{2} \cdot a}{3}$. $EF = AF - AE = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a - \frac{\sqrt{2} \cdot a}{3} = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{6}$.

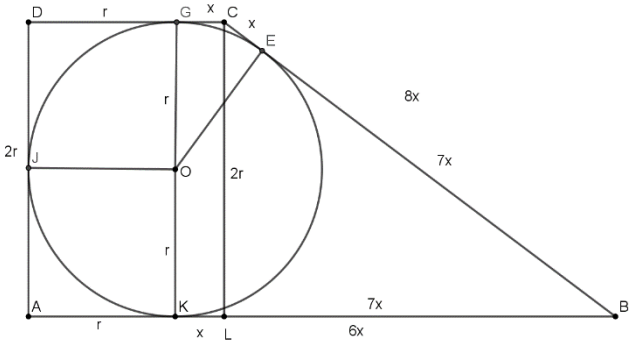


Így a BFE derékszögű háromszögben $BF^2 + EF^2 = BE^2$. Vagyis $\frac{1}{2} \cdot a^2 + \frac{1}{18} \cdot a^2 = BE^2$, ebből $BE = \sqrt{\frac{5}{9}} \cdot a$, a szimmetria miatt a DE távolság ugyanennyi.

12.2.4. Mivel érintőtrapézról van szó, a szemközti oldalak összege egyenlő, így b = 17 cm. Továbbá a BG szakasz hossza $\frac{20-14}{2}=3cm$. A BGC derékszögű háromszögben a GC oldal hossza $\sqrt{17^2-3^2}=2\cdot\sqrt{70}cm$, és ez a trapézba írható kör átmérője.



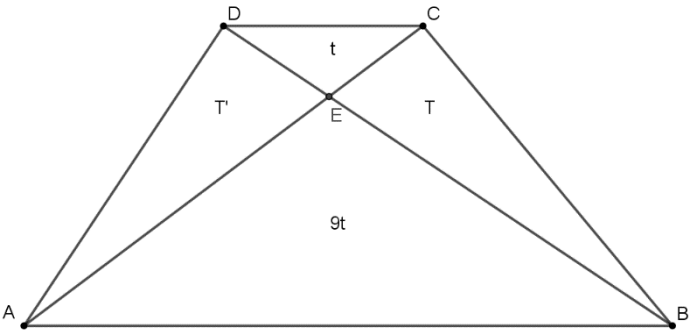
12.2.5. A megadott arány miatt ha CE = x, akkor BE = 7x. Körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így GC = CE, illetve BE = BK. Mivel az LK szakasz hossza is x, így BL = BK – LK = 6x. A trapéz érintőnégyszög, így az alapok összege egyenlő a szárak összegével, vagyis 2r = 30 – 8x, ebből



A BLC derékszögű háromszögben $(2r)^2+(6x)^2=(8x)^2$, $(30-8x)^2+(6x)^2=(8x)^2$, $900-120x+64x^2+36x^2=64x^2$, ennek megoldásai $\frac{20+5\sqrt{7}}{3}\approx 11{,}07$ (ez nem lehetséges), illetve $\frac{20-5\sqrt{7}}{3}\approx 2{,}26$. Így a trapéz oldalai AD = 2r = 30 – 8x ≈11,94 cm, AB = r + 7x ≈ 21,77 cm, BC ≈ 18,06 cm, CD ≈ 8,23 cm.

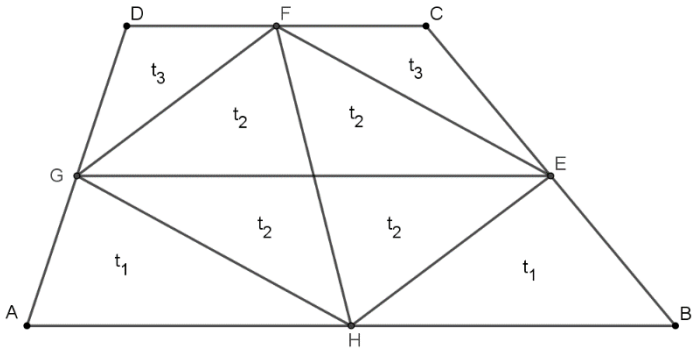
12.2.6. Az előző feladat alapján AB = 27,32 cm, BC = 23,09 cm, CD = 15,77 cm.

12.2.7. Az EBC háromszög területét jelöljük T-vel. Az ABE háromszög hasonló a DCE háromszöghöz. Területük aránya 1 : 9, így a hasonlóság aránya 1: 3. Az ABD és ABC háromszögek területe megegyezik, mert ugyanaz az alapjuk (AB), és ugyanaz a hozzá tartozó magasságuk. Így a T'=T. Az ABC háromszög területe háromszorosa a DCB háromszög területének, mert magasságuk ugyanaz, de az alapjaikra AB = 3·DC. Így 9t + T = 3·(t + T). Ebből T = 3t. Így az ABCD trapéz területe 16t, tehát $\frac{16}{3}$-szorosa az EBC háromszög területének.



12.2.8. Az előző feladat alapján 4.5-szerese.

12.2.9. Mindegyik oldalfelezőpontot összekötjük mindegyikkel, így nyolc háromszög keletkezik. Ezek közül az ugyanakkora területű (ugyanaz az alap, illetve a hozzá tartozó magasság) háromszögeket ugyanazzal a jelöléssel áttuk el (t_1, t_2, t_3). Ha a CD alapot 2x-el jelöljük, akkor az AB alap 5x, az EG középvonal pedig 3.5x. Tehát a t_2-vel jelölt terület 1.75-ször akkora, mint a t_3, mert a magasság ugyanaz, és az alap 1,75-szöröse a t_1 területű háromszög alapjának. A t_1 terület hasonlóképpen pedig $\frac{5}{3.5}=\frac{10}{7}$ szerese a t_2-nek, így $t_1=\frac{10}{7}t_2=\frac{10}{7}\cdot 1.75t_3=2.5t_3$. Így a trapéz területe $2t_1+4t_2+2t_3=14t_3=420$ cm^2, ebből $t_3=30$ cm^2, $t_2=52{,}5$ cm^2, $t_3=75$ cm^2.



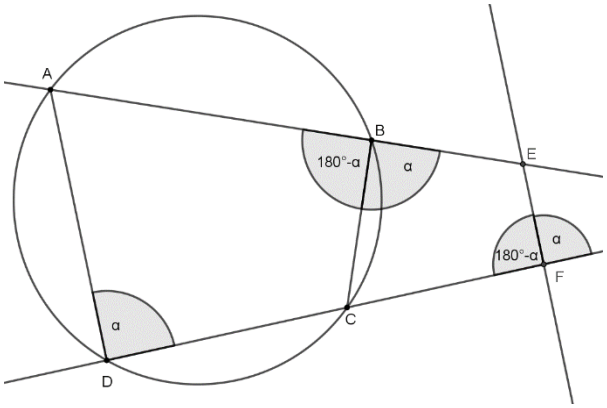
12.2.10. Az előző feladat alapján a trapéz területe 360 cm^2.

12.2.11. Az előző feladat alapján a trapéz területe 1920 cm^2.

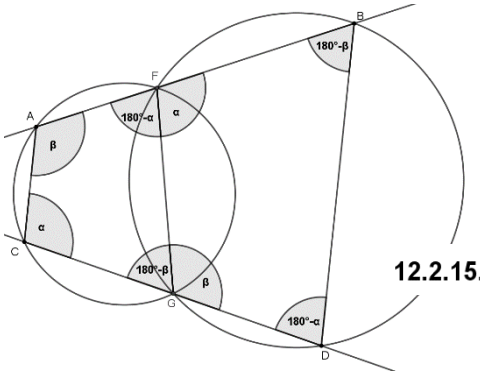
12.2.12. A húrnégyszög 3 szöge: 5x, 6x, 7x. Három eset van. I. eset: Szemközti szög 5x és 7x. Mivel a szemközti szögek összege 180° a húrnégyszögekben, így a másik két szög 6x és 6x. Ezekből x = 15°, tehát a húrnégyszög szögei 75°, 105°, 90°, 90°. II. eset: Szemközti szög 5x és 6x. Ebből $x=\frac{180}{11}$, vagyis a szögek $\frac{900}{11}\approx 81{,}82°$, $\frac{1080}{11}\approx 98{,}18°$, $\frac{1260}{11}\approx 114{,}55°$, $\frac{720}{11}\approx 65{,}45°$. III. eset: Szemközti szög 7x és 6x. Ebből $x=\frac{180}{13}$, vagyis a szögek $\frac{1080}{13}\approx 83{,}08°$, $\frac{1260}{13}\approx 96{,}92°$, $\frac{900}{13}\approx 69{,}23°$, $\frac{1440}{13}\approx 110{,}77°$.

12.2.13. I. eset: 72°, 108°, 60°, 12°. II. eset: $\frac{900}{11} \approx 81{,}82°$, $\frac{1080}{11} \approx 98{,}18°$, $\frac{1260}{11} \approx 114{,}55°$, $\frac{720}{11} \approx 65{,}45°$. III. eset: $\frac{810}{7} \approx 115{,}71°$, $\frac{450}{7} \approx 64{,}29°$, $\frac{540}{7} \approx 77{,}14°$, $\frac{720}{7} \approx 102{,}86°$.

12.2.14. Az ABCD négyszög húrnégyszög, így ha az ADB∠ = α, akkor az ABC∠ = 180°-α. Így ennek kiegészítő szögére, CBE∠ = α. Az AD és EF párhuzamossága miatt az F-nél lévő jobb oldali szög α, így ennek kiegészítő szögére, EFC∠ = 180°-α. Tehát szemközti szögeinek összege 180°, így húrnégyszög a BCFE négyszög.



12.2.15. Az ábra és az előző feladat alapján trapéz, mivel az egy oldalon fekvő szögeinek összege 180°

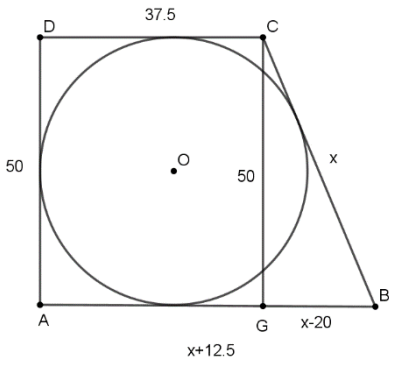


12.2.15. feladat

12.2.16. Érintőtrapézról van szó, így a szárak összege megegyezik az alapok összegével. Mivel szimmetrikus trapéz, így a szárak hossza 15 cm. A trapéz magassága $10\sqrt{2}$, így a területe $75\sqrt{2} \approx 106{,}07$ cm^2. Az átlók hossza $5\sqrt{17} \approx 20{,}62$ cm.

12.2.17. Az alapok hossza 32 és 16 cm. Magassága $16\sqrt{2}$. Átlói $8\sqrt{17} \approx 32{,}98$ cm. Területe $192\sqrt{2}$ cm^2. A 12.2.8.-as feladat alapján a keletkező háromszögek területének aránya 1:2:2:4. Így a keletkező háromszögek területe: 3.66 cm^2, 7.33 cm^2, 7.33 cm^2, 14.66 cm^2.

12.2.18. Mivel derékszögű a trapéz, a derékszögű szár egyenlő a trapéz átmérőjével, így az AD szakasz hossza 50 cm. Érintőtrapézról van szó, így ha a BC szárat x-el jelöljük, akkor az AB alap x+12.5. Így a GB szakasz x+12.5. A GCB derékszögű háromszögből x = 72,5 cm, tehát az AB alap 85 cm. Így a területe 3062,5 cm^2.



12.2.19. Az előző feladat alapján a trapéz területe 490 cm^2. A trapéz körön kívüli részének területe ≈ 175,84 cm^2, ez 35,88%-a a trapéz területének.

12.2.20. A hagyományos jelöléseket alkalmazzuk. A megadott feltételek alapján $m^2 = a \cdot c$. Vizsgáljuk meg a két alap összegének a négyzetét: $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2 = a^2 + c^2 + 2m^2 =$

$= a^2 + c^2 + 2\left(b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2\right) = a^2 + c^2 + 2\frac{4b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{4} = a^2 + c^2 + \frac{4b^2 - a^2 + 2ac - c^2}{2}$

$= \frac{4b^2 + a^2 + 2ac + c^2}{2} = \frac{4b^2 + (a+c)^2}{2}$. Vagyis $(a+c)^2 = \frac{4b^2 + (a+c)^2}{2}$. Ebből $(a+c)^2 = 4b^2$

Mivel mindkét hatványalap pozitív $a + c = 2b$, ami azt jelenti, hogy érintőnégyszögről van szó.

12.3. Sokszögek

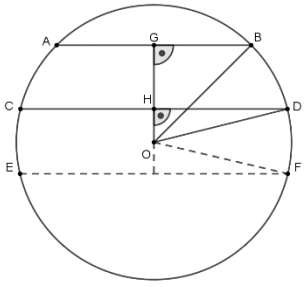
12.3.1. A sokszög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2} = 170$. Ebből n = 20, tehát 20 oldalú a szabályos sokszög. Egy csúcsából 17 átló húzható, ebből egy a szemközti csúcsba mutat, a többi erre szimmetrikus hossz tekintetében, tehát 9 lényegesen különböző átlója van.

12.3.2. Az egyenlet megoldásai: x = 0, x = -10, x = 1800. Ez utóbbi lehet csak megoldás a feladat szempontjából. A sokszögek belső szögeinek összege: $(n-2)180 = 1800$. Ebből n = 12. Így az átlók száma 54, szimmetriatengelyek száma 12.

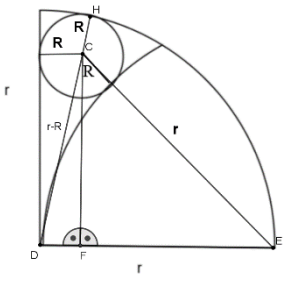
12.3.3. Az oldalak száma 13. Egy belső szög nagysága $\frac{11 \cdot 180}{13} = \frac{1980}{13} \approx 152.31°$. A különböző hosszúságú átlók száma 5.

12.4. Kör

12.4.1. Két lehetőség van. Az első esetben a két párhuzamos húr úgy helyezkedik el, hogy kör középpontja nincs a két húr közötti területen, míg a második esetben a két húr közötti területen kívül helyezkedik el. Az OHD derékszögű háromszögben OH = 6 cm, míg az OBG derékszögű háromszögben OG = 8 cm. Így a két húr távolsága OG – OH = 2 cm. A második esetben a két húr távolsága 8 + 6 = 14 cm.

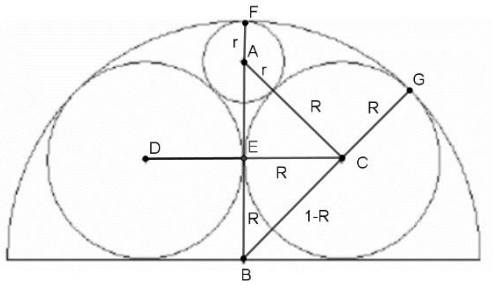


12.4.2. Az érintkező körök középpontjai, illetve az érintési pont egy egyenesre esik. Az érintő pedig merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Az ábrán látható DFR derékszögű háromszögben a DF szakasz hossza is R, így 10 cm, $CF^2 = (r-10)^2 - 10^2 = r^2 - 20r$. Az EFC derékszögű háromszögben a EF szakasz hossza r - R, illetve az EC hossza r + 10, így $(r+10)^2 = (r-10)^2 + CF^2$. Ebből $60r = r^2$. Mivel $r \neq 0$, r-el oszthatunk, tehát r = 60 cm.

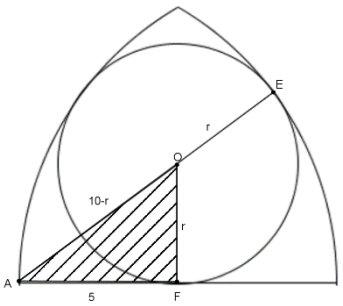


12.4.3. Az előző feladat alapján R = 5/6 cm.

12.4.4. Az ábrán látható EBC derékszögű háromszög alapján $R = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ $\approx 0.4142cm$. Az AEC derékszögű háromszögben $AE = 1-R-r$. $AC = r+R$. Ebben a háromszögben $(1-R-r)^2 + R^2 = (r+R)^2$, amiből $r = 3-2\sqrt{2}$, $\approx 0{,}1716cm$



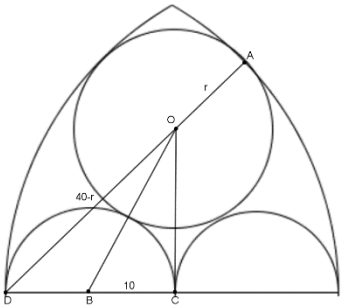
12.4.5. Az előző feladat alapján a félkör sugara $2+\sqrt{2}$ cm $\approx 3{,}4142cm$, a kiskör r sugara pedig $r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}cm \approx 0{,}2929cm$.



12.4.6. Az ábrán látható AFO derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel alapján r = 3,75 cm.

12.4.7. Az előző feladat alapján a körívek sugara 16 cm.

12.4.8. Az ábrán látható DBC derékszögű háromszögben a nagy körív hossza a félkörök átmérőjének kétszerese, így 40 cm. Pitagorasz-tétele alapján $(40-r)^2 = 20^2 + OC^2$. Ebből $OC^2 = (40-r)^2 - 20^2$. A BCO derékszögű háromszögben pedig $(10+r)^2 = 10^2 + OC^2$. Ebbe az előzőt behelyettesítve $(10+r)^2 = 10^2 + (40-r)^2 - 20^2$. Ennek megoldása r = 12 cm.

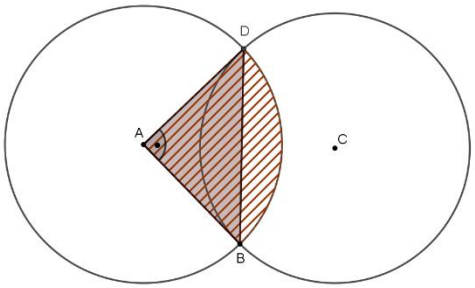


12.4.9. Az előző feladat alapján r = 5 cm.

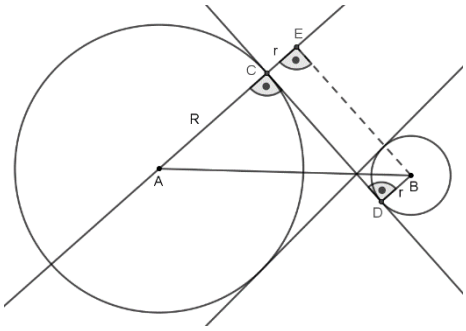
12.4.10. A szaggatott kör sugara $\frac{8}{3}$ cm.

12.4.11. A félkörök sugara 7,5 cm

12.4.12. A keresett terület adódik a DB ív és húr által határolt körszelet területének kétszereséként. Az ABD háromszög területe 12,5 cm^2 , a vonalkázott körcikk területe $\frac{5^2 \cdot \pi}{4} \approx 19{,}63$ cm^2, így a közös rész területe: $2 \cdot \frac{25 \cdot \pi - 50}{4} \approx 14{,}27\,cm^2$

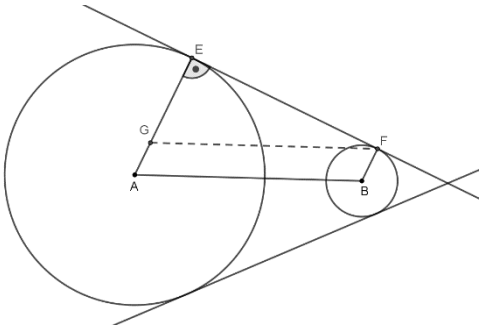


12.4.13. Az előző feladat alapján a keresett terület ≈ 57,4 cm^2



12.4.14. Az ábrán látható AEB háromszög derékszögű, hiszen az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra (AC), és a CD szakasz párhuzamos eltolása az EB szakasz, ami a közös belső érintőszakasz hossza, 10 cm. Átfogója az AB oldal, amely a két középpont távolsága. Az AB befogó hossza a két sugár összege. Pitagorasz-tétele alapján a középpontok távolsága: $AB=\sqrt{10^2+(8+5)^2}=\sqrt{269}\approx 16{,}1$ cm

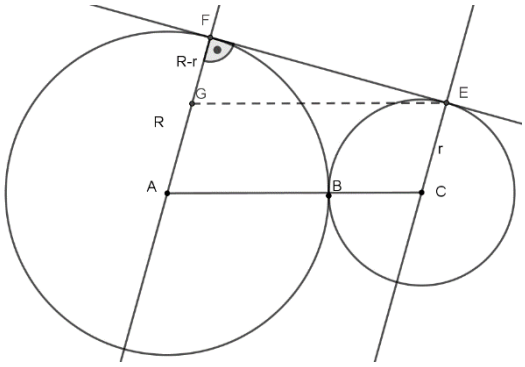
12.4.15. Az ábrán látható GEF háromszög derékszögű, hiszen az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra. Átfogója az FG szakasz, amely az AB szakasz párhuzamos eltolásával keletkezik, így a GE szakasz hossza a két sugár különbsége. Pitagorasz-tétele alapján a középpontok távolsága: $AB=GF=\sqrt{32^2+(8-5)^2}=\sqrt{1033}cm\approx 32{,}14\,cm$



12.4.16. Az előző feladatok alapján a közös külső érintőszakasz hossza

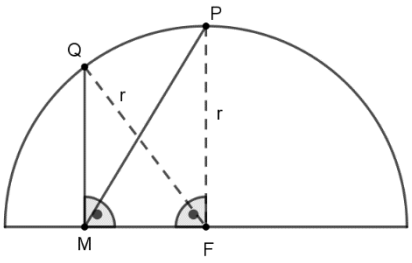
$\sqrt{20^2-(10-8)^2}=\sqrt{396}\approx 19{,}9$ cm, a közös belső érintőszakasz hossza

$\sqrt{20^2-(10+8)^2}=\sqrt{76}\approx 8{,}72$ cm.



12.4.17. Középpontjaik távolsága a két sugár összege, 13 cm. A GFE háromszög derékszögű, a párhuzamos eltolás miatt a GF befogó hossza a két sugár különbsége, 5 cm. Így a Pitagorasz-tételt alkalmazva az EF érintőszakasz hossza 12 cm.

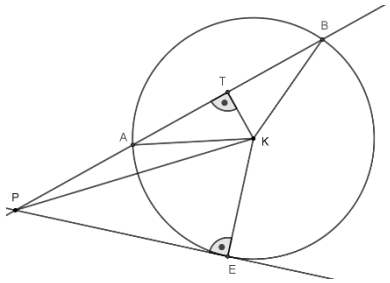
12.4.18. Az előző feladat alapján az érintő szakasz hossza $\sqrt{1344}\approx 36{,}66$ cm.



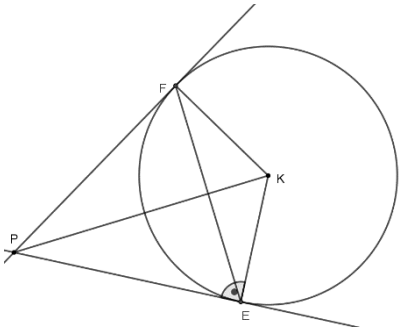
12.4.19. A PMF háromszög derékszögű, $PM^2=r^2+MF^2$. A QMF háromszög szintén derékszögű, $QM^2=r^2-MF^2$

Így $PM^2+QM^2=2r^2=200$.

12.4.20. A megadott adatok: PE = 30cm, PA = 15 cm, KT = 12 cm. A szelőtétel értelmében $PE^2=PA\cdot PB$. Innen PB = 60 cm. AB = PB – PA = 45 cm. AT = 22,5 cm. Az AKT háromszög derékszögű, Pitagorasz-tétele alapján $AK^2=AT^2+KT^2$, KT = 25,5 cm, és ez a kör sugara.



12.4.21. . $PK^2=PE^2+KE^2$, így PK = 13 cm. A PKE háromszög területe $T=\frac{PE\cdot KE}{2}=\frac{12\cdot 5}{2}=30cm^2$. De ez a terület úgyis felírható, hogy



$$T=\frac{PK\cdot\frac{EF}{2}}{2}=\frac{13\cdot\frac{EF}{2}}{2}=30\,cm^2.$$

Ebből $EF=\frac{120}{13}\approx 9{,}23cm$

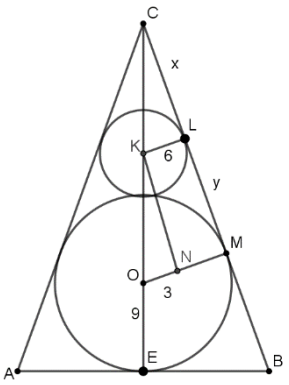
12.4.22. A 12.4.22.-es feladat alapján a kör sugara 8,5 cm

12.4.23. Az előző feladatok alapján a keresett távolság $\frac{3\sqrt{11}}{2} \approx 4{,}97cm$

12.4.24. A keresett pont a 6 cm sugarú kör középpontjától y, a másik kör középpontjától 20-y távolságra van. Az egyenlő hosszú érintőszakaszok hosszát jelöljük x-el. Mivel az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó sugárra, így keletkezik két derékszögű háromszög is, 6, x, y, illetve 8, x, 20-y hosszakkal. Mindkettőben felírva a Pitagorasz-tételt, x,y ra kapunk egy másodfokú egyenletrendszert, melynek a megoldása y = 9,3 cm. Tehát a 6 cm sugarú kör középpontjától 9,3 cm-re lévő pontból húzható egyenlő hosszú érintőszakasz a két körhöz.

12.5. Hasonlóság

12.5.1. Az ábrán látható KON derékszögű háromszögben KO a két sugár összege, azaz 15 cm, ON pedig a különbségük, azaz 3 cm. Ebből KN = y = $6\sqrt{6}$ cm. Ehhez a háromszöghöz hasonló a KLC háromszög, így x = $12\sqrt{6}$ cm, CO = 30 cm, illetve CE = 39 cm. Az EBC háromszög is hasonló az OMC háromszöghöz, így $\frac{CE}{BE} = \frac{CM}{OM}$,



vagyis $\frac{39}{BE} = \frac{18\sqrt{2}}{9}$. Ebből a BE = $\frac{39\sqrt{2}}{4} \approx$ 13,79 cm. $\frac{BC}{CE} = \frac{CO}{CM}$,

vagyis $\frac{BC}{\frac{39\sqrt{2}}{4}} = \frac{30}{18\sqrt{2}}$. Ebből a BC = 16,25 cm. Tehát a háromszög szárai 16,25 cm-esek,

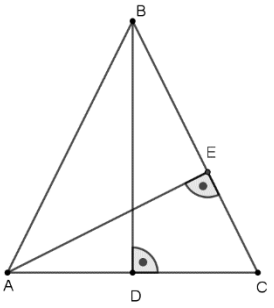
alapja $\frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 27{,}58$ cm.

12.5.2. A nagyobbik kör sugara 8 cm, a kisebbik köré r. Az előző feladat jelöléseit és hasonló háromszögeit használva a KON derékszögű háromszög oldalai 8+r, 8-r, y. Ebben a háromszögben $y = 4\sqrt{2r}$. Ehhez a háromszöghöz hasonló a KLC háromszög, így (1) x = $\frac{4\sqrt{2r} \cdot r}{8-r}$ A KLC háromszög hasonló az OMC háromszöghöz, így $\frac{CK + r + 8}{8} = \frac{CK}{r}$,

ebből (2) $CK = \frac{r^2 + 8r}{8-r}$. EBC háromszög is hasonló az KLC háromszöghöz, így $\frac{CE}{BE} = \frac{CL}{KL}$,

azaz $\frac{2 \cdot 8 + r + CK}{6} = \frac{x}{r}$. Ebbe (1), és (2)-t behelyettesítve kapjuk $R = \frac{128}{9} cm$.

12.5.3. Az ACE háromszög és DCB háromszögek hasonlóak, mert az ACE szög közös és derékszögű háromszögek. Így $\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{BD}$, ebből $6\cdot AC=4.5BC$, vagyis $BC=\frac{4}{3}AC$. A DCB derékszögű háromszögben Pitagorasz-tételéből



$BC^2=DC^2+BD^2$ azaz, $\left(\frac{4}{3}AC\right)^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+12^2$, ebből

$AC=\frac{144\sqrt{55}}{55}, BC=\frac{192\sqrt{55}}{55}$. Így a háromszög kerülete

$K=\frac{528\sqrt{55}}{55}$, a kerület fele $s=\frac{264\sqrt{55}}{55}$. A terület

$T=\frac{864\sqrt{55}}{55}$. A $T=r\cdot s$ alapján a beírt kör sugara $r=\frac{36}{11}\approx$ 3,27 cm.

12.5.4. Az előző feladat alapján a háromszög köré írható kör sugara megközelítőleg 7,99 cm

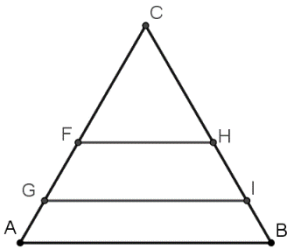
12.5.5. Az ABC háromszög hasonló a CPB háromszöghöz, így a BC $\sqrt{66}\approx 8{,}12$ cm

12.5.6. AP = 3 cm, PC = 9 cm.

12.5.7. Az AC szár másik harmadolópontját jelöljük G-vel. Ekkor a CGD háromszög hasonló a CAB háromszöghöz, és a hasonlóság aránya 1:3, vagyis AB = 3·GD. A GDE háromszög egybevágó az AFE háromszöggel, így GD = AF. FB = 4·GD, tehát a keresett arány 4:1.

12.5.8. Az előző feladathoz hasonlóan a keresett arány 9:2.

12.5.9. Az FHC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, területük aránya 1:3, így a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{1}{\sqrt{3}}$, így FH = $\lambda\cdot 12$ = $\frac{12}{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$ cm. A CGI háromszög hasonló az ABC háromszöghöz,

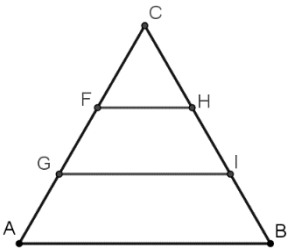


területük aránya 2:3, így a hasonlóság aránya $\lambda=\sqrt{\frac{2}{3}}$, így FH = $\lambda\cdot 12=$ $\lambda=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{6}$ cm.

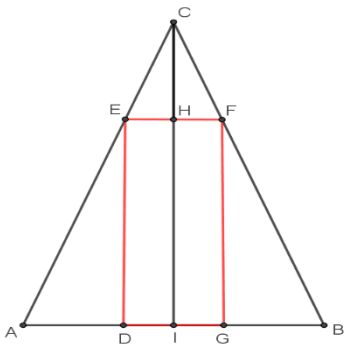
12.5.10. Az előző feladathoz hasonlóan a párhuzamos háromszögbe eső szakasza $\frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

Ez a szakasz egy szabályos háromszögre és egy trapézra bontja az eredeti háromszöget. A szabályos háromszög kerülete $3 \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$,

a trapézé $5\sqrt{2} + 2 \cdot \left(10 - 5\sqrt{2}\right) + 10 = 30 - 5\sqrt{2}$.



12.5.11. Az FHC háromszög hasonló a CGI háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{2}$ területük aránya 1:4, így ha az FHC háromszög területe x, akkor a CGI háromszög területe 4x, vagyis a GIHF trapéz területe 3x. Az FHC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{3}$ területük aránya 1:9, így ha az FHC háromszög területe x, akkor az ABC háromszög területe 9x, vagyis a ABGI trapéz területe 5x. Így a keletkező síkidomok területének aránya 1:3:5.

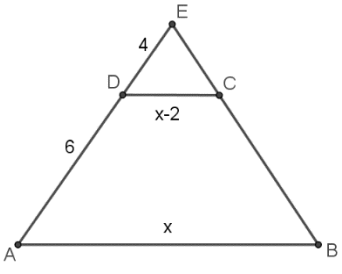


12.5.12. Az előző feladathoz hasonlóan a keresett arány 1:3:5:7.

12.5.13. A téglalap másik oldala FG = x, ekkor CH = 15-x. Az EFC háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, így $\frac{15-x}{15} = \frac{8}{24}$. Ebből x = 10 cm, ez lesz a téglalap másik oldalának a hossza.

12.5.14. Az előző feladathoz hasonlóan 4,5 cm lesz a téglalap másik oldalának a hossza.

12.5.15. A DCE háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. $\frac{x-2}{x} = \frac{4}{10}$. Így az AB alap hossza $\frac{10}{3}$ cm, a CD alapé $\frac{4}{3}$ cm. A hasonlóság aránya $\frac{2}{5}$, így ha az EDC háromszög területe 2y, akkor az ABC háromszög területe 5y, azaz a trapéz területe 3y, így a keresett arány 2:3.

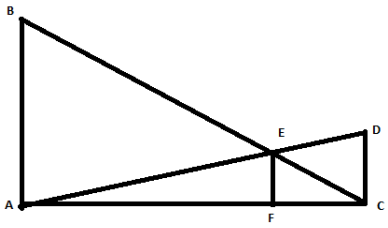


12.5.16. Az előző feladathoz hasonlóan a trapéz szára 2 cm, a keresett arány pedig 2:1.

12.5.17. Az egyik szárat párhuzamosan eltoljuk a másik szár végpontjába, innentől az előző feladatokhoz hasonlóan a háromszögekben keletkező szakaszok hossza: 1 cm, 2 cm, 3 cm. Így a trapézban lévő párhuzamos szakaszok hossza 9 cm, 10 cm, 11 cm.

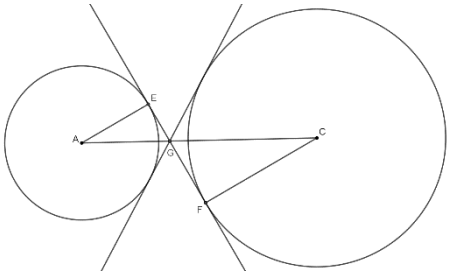
12.5.18. Az előzőhöz hasonlóan a trapézban lévő párhuzamos szakaszok hossza 17 cm, 19 cm, 21 cm, 23 cm.

12.5.19. Az ABC háromszög hasonló FEC háromszöghöz, így $\frac{EF}{AB}=\frac{FC}{AC}$. $EF=\frac{FC\cdot AB}{AC}=\frac{5\cdot FC}{10+FC}$ Az ADC háromszög hasonló AFE háromszöghöz, így $\frac{EF}{DC}=\frac{AF}{AC}$, $EF=\frac{30}{10+FC}$, ebből FC = 6 cm, ezt bármelyikbe behelyettesítve EF = 1,875 cm.



12.5.20. Az előző feladat alapján az AB = 24 cm.

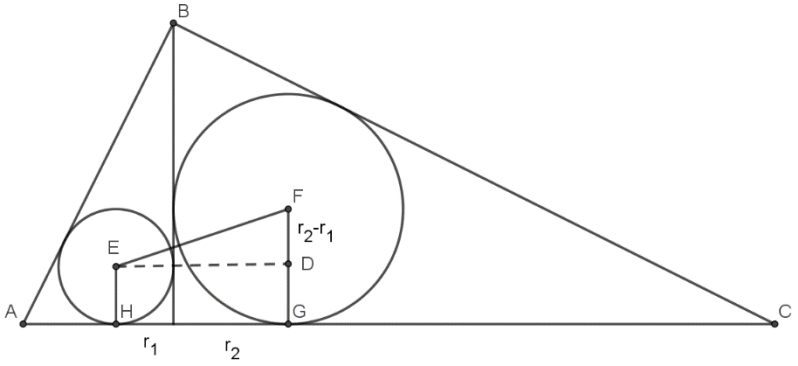
12.5.21. AE = 21 cm, CF = 28 cm, AG = 30 cm. Az AEG háromszög hasonló a GFC háromszöghöz, így $\frac{GC}{AG}=\frac{FC}{AE}$, ebből GC = 40 cm, így a két középpont távolsága 70 cm.



12.5.22. A két középpont távolsága 10 cm.

12.6. Vegyes feladatok

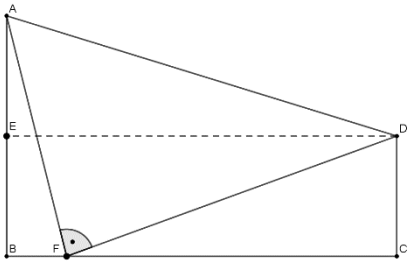
12.6.1. A terület és az arány segítségével a befogók 9 cm, és 12 cm. Így az átfogó 15 cm. A befogótétellel kiszámolható, hogy az átfogóhoz tartozó magasság 5,4 cm és 9,6 cm.



Magasságtétellel az átfogóhoz tartozó magasság 7,2 cm. A kerületek 21,6 cm, 28,8 cm, területek 19,44 cm^2, 34,56 cm^2, így a beírt körök sugarai

$r_1 = \frac{T_1}{s_1} = \frac{19.44}{10.8} = 1{,}8cm$, illetve $r_1 = \frac{T_2}{s_2} = 2{,}4cm$. A két középpont távolsága pedig az ábrán látható derékszögű háromszögben, mint átfogó szerepel, a két befogó pedig r_2-r_1 illetve r_2+r_1. Így a keresett EF távolság $\sqrt{18} \approx 4{,}24cm$

12.6.2. A szóban forgó háromszögek területe: 17,75 cm^2, 102,25 cm^2, így a beírt körök sugarai $r_1 = \frac{20}{13} = 1{,}54cm$, illetve $r_1 = \frac{48}{13} = 3{,}69cm$. A beírható körök középpontjának távolsága 4,27 cm, a köré írható körök középpontjának távolsága 13 cm.

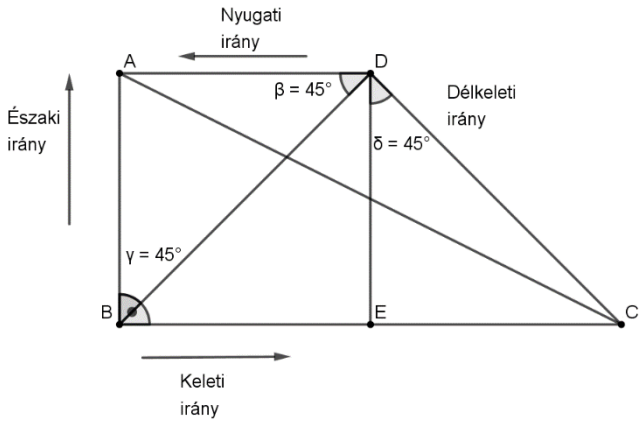


12.6.3. Az AED derékszögű háromszögben AD = $\sqrt{109}$.

A BAF derékszögű háromszögben AF = $\sqrt{36+BF^2}$. A CFD derékszögű háromszögben FD = $\sqrt{9+(10-BF)^2}$. A DAF derékszögű háromszögben 109 = 36+BF^2 + (10-BF)^2+9. Ebből BF ≈ 7,65 cm, vagy BF ≈ 2,35 cm.

12.6.4. Az előző feladat ábrája alapján, az AED derékszögű háromszögben AD = $\sqrt{160}$. A BAF derékszögű háromszögben AF = $\sqrt{81+BF^2}$. A CFD derékszögű háromszögben FD = $\sqrt{25+(12-BF)^2}$. A DAF derékszögű háromszögben 160 = 81+BF^2 + (12-BF)^2+25. Ennek az egyenletnek nincs megoldása, tehát ebben az esetben nincs olyan pont, amelyből derékszög alatt látszik az AD szakasz.

12.6.5. Kezdetben a hajó a B pontban van, az északra lévő hegycsúcs az A, a keletre fekvő a C pontban. A két hegycsúcs távolsága az AC = 100 km. Az ábra alapján az irányok miatt a BC távolság kétszerese a BA távolságnak. Az ABC derékszögű háromszögben így az AB távolság $20\sqrt{5}$, így a szintén derékszögű ABD háromszögben a hajó által megtett BD út $20\sqrt{10}$ km, amit a hajó három óra alatt tesz meg. Így a sebessége $\frac{20\sqrt{10}}{3} \approx 21{,}08\frac{km}{h}$.



13. Térgeometria

13.1. Hasábok, hengerek

13.1.1 Megoldandó a $x^3-(x-3)^3=447{,}75$ egyenlet. Ennek megoldásai az x=8,5, illetve x=-5,5, természetesen csak az x=8,5 cm felel meg. Felszíneik különbsége 252 cm^2.

13.1.2 A fehér kocka éle legyen a, a fekete kockáé b. Ekkor $6a2=0{,}7\cdot 6b2$. Ebből $a=\sqrt{0.7}b$.

$\frac{V_{fekete}}{V_{fehér}}=\frac{b^3}{\left(\sqrt{0.7}b\right)^3}=\frac{1}{\sqrt{0.7}^3}\approx 1{,}7075$. Tehát 70,75%-kal nagyobb a fekete kocka felszíne.

13.1.3 Az előző feladathoz hasonlóan a felszínek aránya $\sqrt[3]{0.8}^2=0{,}8618$, így 13,82%-kal kisebb a fehér kocka felszíne, mint a fekete kockáé.

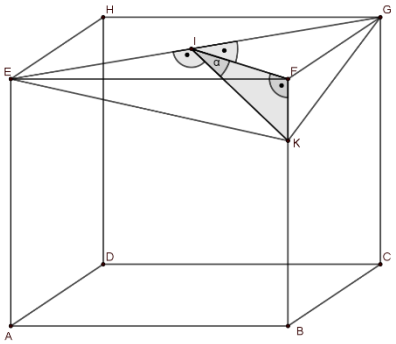
13.1.4 Az eredeti kocka éle legyen a. Mivel $a\in Z$, és 1 dm élű kockákat daraboltunk a fel az eredeti kockából, $b\in Z$ is teljesül. A térfogatra vonatkozó axióma szerint $a^3=485\cdot 1^3+b^3$. Ebből $a^3-b^3=485$, vagyis $(a-b)(a^2+ab+b^2)=485$. Tehát előállítottuk a 485-öt két egész szám szorzataként, ugyanis ha $a,b\in Z$, akkor a-b és $a^2+ab+b^2\in Z$. A $485=1\cdot 485$ vagy $485=5\cdot 97$, illetve ezek fordítottjai, de azok nem lehetségesek, hiszen a-b kisebb, mint a^2+ab+b^2. I. eset: a-b=1 és $a^2+ab+b^2=485$. Ez az egyenletrendszer nem ad megoldást az egész számok körében. II. eset: a-b=5 és $a^2+ab+b^2=97$. Ennek megoldásai b=-8 és b=3, nyilván csak ez utóbbi a megoldás. Így az eredeti kocka éle 8 dm, felszíne 384 dm^2, a 'b' élű kocka felszíne 54 dm^2, különbségük 330 dm^2.

13.1.5 A megoldás az előző feladathoz hasonlóan történik, most 3 lehetséges esetettel kell dolgozni, de csak egy ad megoldást, a b=2 cm, a=5 cm, Így a 'b' élű kocka térfogata 6,4%-a az eredeti kocka térfogatának.

13.1.6

a) Ha FG=a, akkor FK=a/3. A GKF háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tétel alapján a=12 cm, így a kocka térfogata a megfelelő kerekítéssel 1,7 dm^3.

b) A két háromszög síkjának a metszésvonala az EG szakasz. Erre merőleges szakaszok IF (a négyzet átlói merőlegesek egymásra) és IK (EGK háromszög egyenlő szárú, és IK ebben az EG alap felezőmerőlegese), ahol I az átlók metszéspontja. Ennek hossza $EG = a \cdot \sqrt{2}$, így $IF = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$. FK=a/3. Így a keresett szög kiszámolható az IFK derékszögű háromszögben:



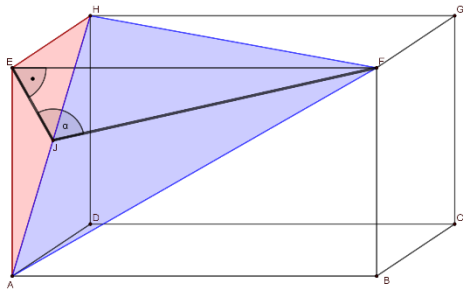
$tg\alpha = \frac{a/3}{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Tehát α=25,24°.

13.1.7 a) A kocka térfogata 0,51 m^3. b) A keresett szög 35,26°

13.1.8

a) Legyen az AB=a. Ekkor az ABF derékszögű háromszögben, $AF = 2a$, $AB = a \cdot \sqrt{3}$. Mivel a DAH∠=45°, az ADHE téglalap négyzet, így $AH = a \cdot \sqrt{2}$. A téglalap négyzetes oszlop, így EG=AF. Így az AFH egyenlő szárú háromszögben cosinus-tétellel, FAH∠=65.91°.

b) A keresett síkok metszésvonala, AH, erre merőleges szakaszok a két síkban JE és JF szakaszok. A $JE = \frac{\sqrt{2}a}{2}$, így $tg\alpha = \frac{EF}{EJ}$. Ebből α=67,79°.



13.1.9 Az előző feladat alapján:

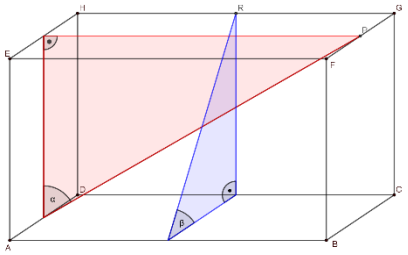
a) GBE∠=64,34°

b) Az ADB és az EDB síkok hajlásszöge 47,61°

13.1.10 A megfelelő szakaszok, háromszögek berajzolása után:

a) az ADHE lap és a DAP háromszög síkjának hajlásszöge: α=59,04°

b) az ABCD lap és a ABR háromszög síkjának a hajlásszöge: β=36,87°



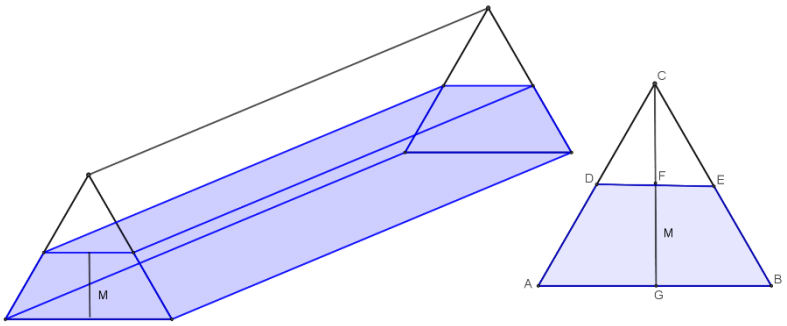
13.1.11 Jelöljük a téglatest éleit, a, 2a, és b-vel. Ekkor a keletkező kockák közül, amelyeknek egy lapja kék, azok lesznek, amelyek nem az éleken helyezkednek el. Ezek száma: (2a-2)(a-2)·2+(2a-2)(b-2)·2+(b-2)(a-2)·2=136. Felbontás és összevonás után $2a^2+3ab-12a-4b=56$. Ebből a b-t kifejezve $b=\frac{56+12a-2a^2}{3a-4}$. Mivel minden oldal 3-tól nagyobb centiméterben mérve egész szám, így: I. eset: a=4 cm. Ekkor b=9 cm, és a térfogat: $V=4\cdot 8\cdot 9=288$ cm^3. II. eset: a=5 cm. Ekkor b=6 cm, és a térfogat: $V=5\cdot 10\cdot 6=300$ cm^3. III. eset: a=6 cm. Ekkor b=4 cm és a térfogat: $V=6\cdot 12\cdot 4=288$ cm^3. IV. eset: a=7 cm. Ekkor $b=\frac{42}{17}\notin Z$, és 3-tól már kisebb, így ez nem lehetséges. És nincs több eset, mert látható, hogy ahogy a-t növeljük, b úgy csökken. Tehát a térfogat 288 vagy 300 cm^3 lehet.

13.1.12 A térfogat 300, 360, 392, vagy 384 cm^3 lehet.

13.1.13

a) Legyen az alapéle a. Ekkor a szabályos háromszög magassága Pitagorasz-tétel, vagy szögfüggvény segítségével $m=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}$, területe $\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$. Így a térfogat $500\cdot\sqrt{3}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot 20$. Ebből a=10 m. Így a felszíne $A=2\cdot\frac{10^2\cdot\sqrt{3}}{4}+3\cdot 10\cdot 20=50\sqrt{3}+600\,\text{m}^2\approx 686{,}6\,\text{m}^2$.

b) Egy húrtrapéz alakú egyenes hasábról van szó, melynek magassága 20 m. A folyadék M magasságához kiszámoljuk először a trapéz területét (alapterület) a térfogat segítségével.



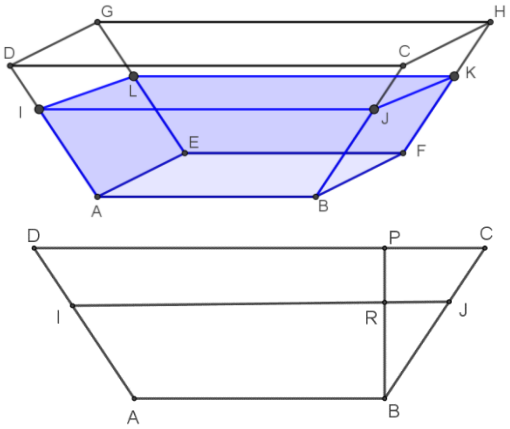
$V=6000-600\cdot\sqrt{3}$ hl = $600000-60000\cdot\sqrt{3}$ liter(dm^3)= $600-60\cdot\sqrt{3}$ m^3=T·20. Ebből a $T=30-3\cdot\sqrt{3}\,\text{m}^2$. A DEC háromszög is szabályos, így $FC=\frac{DE\cdot\sqrt{3}}{2}$. Így M=GC-FC= $=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{2}-\frac{DE\cdot\sqrt{3}}{2}$. Vagyis a trapéz területe alapján $30-3\cdot\sqrt{3}=\frac{10+DE}{2}\cdot\left(\frac{10\sqrt{3}}{2}-\frac{DE\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ebből $DE=\sqrt{112-40\sqrt{3}}$. $M=5\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{112-40\sqrt{3}}=3$, tehát 3 m magasan áll a fekvő tartályban a folyadék.

13.1.14 Egy konténer olyan 1,5 méter magas egyenes hasáb, melynek alaplapja egy szimmetrikus trapéz, melynek alapjai 1,6 és 4 méteresek, szárai 2 méteresek.

a) A megadott adatok alapján AB=1,6, DC=4, BC=2, BF=1,5. Az ABCD trapéz magassága $\sqrt{2^2-\left(\frac{4-1.6}{2}\right)^2}$=1,6. Területe $\frac{1.6+4}{2}\cdot 1{,}6=4{,}48$ Így akkor a konténer térfogata $V=T\cdot m=4{,}48\cdot 1{,}5=6{,}72$ m^3.

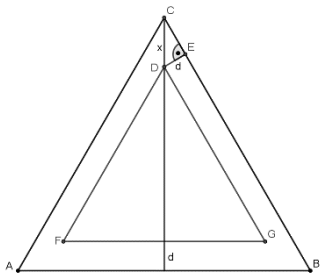
b) $V=4.5=T\cdot 1.5\Rightarrow$ (1) $T=3=\frac{AB+IJ}{2}\cdot BR$ = $\frac{1{,}6+IJ}{2}\cdot BR$. A BPC háromszög hasonló a BRJ háromszöghöz, így $\frac{BR}{BP}=\frac{RJ}{PC}$, azaz $\frac{BR}{1.6}=\frac{RJ}{1.2}$, ebből $RJ=\frac{3\cdot BR}{4}$. Mivel $IJ=AB+2\cdot RJ$, $IJ=1{,}6+1{,}5\cdot BR$. Ezt (1)-be behelyettesítve $3=\frac{1.6+1.6+1.5BR}{2}\cdot BR$. Ennek pozitív megoldása a BR=1,2. Tehát a folyadék a konténerben 1,2 méter magasan lesz.



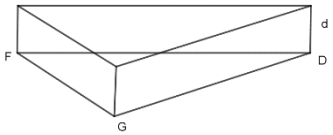
13.1.15 a) A vázlatrajz látható az előző feladat esetében. A trapéz magassága 0,6 méter, területe 1,56 m^2. Így a térfogat segítségével a hasáb magassága 2 m. b) A folyadék magassága megközelítőleg 0,4 méter.

13.1.16 a) A legrövidebb átló $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Ez a magasság 40%-a. Ebből a magasság $\frac{15\sqrt{3}}{8}$. Így a térfogat $\frac{1215}{256}\approx 4{,}77m^3$. A tartály felszíne 17,54 m^2 b) A folyadék magassága az előző feladatok alapján 0,4559, azaz megközelítőleg 0,46 méter.

13.1.17 Az ABC háromszög magassága $6\sqrt{3}$ cm. A DFG háromszög magassága $6\sqrt{3}-d-x$. Így az oldala FG = $\frac{2\cdot\left(6\sqrt{3}-d-x\right)}{\sqrt{3}}$. A CDE derékszögű háromszögben



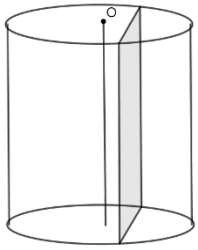
$\sin 30° = \frac{d}{x}$. Tehát x = 2d. Így akkor az FGD háromszög területe T = $\frac{\frac{2\cdot\left(6\sqrt{3}-3d\right)}{\sqrt{3}}\cdot\left(6\sqrt{3}-3d\right)}{2} = \frac{\left(6\sqrt{3}-3d\right)^2}{\sqrt{3}}$. A hasáb térfogata

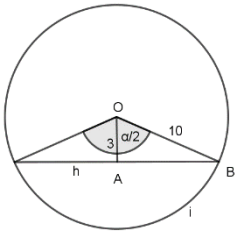


$V = T\cdot m = \frac{\left(6\sqrt{3}-3d\right)^2}{\sqrt{3}}\cdot d = \frac{108d-36\sqrt{3}d^2+9d^3}{\sqrt{3}}$. Ha ez maximális, annak szükséges feltétele V` = 0, azaz megoldandó $\frac{108-72\sqrt{3}d+27d^2}{\sqrt{3}}=0$ egyenlet. Ennek egyik megoldásai $d_1 = 2\sqrt{3}$ és $d_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, de csak ez utóbbi felel meg a feladat feltételének!

13.1.18 $x = \frac{10}{3}cm$

13.1.19 Az ábra alapján látható, hogy az alapkörből lemetszett körszelet területét kell elsősorban kiszámolni. Ehhez szükség van a körszeletet meghatározó sugarak által bezárt középponti szögre (α). Ez az OAB derékszögű háromszög segítségével α ≈ 145,08°. Így a

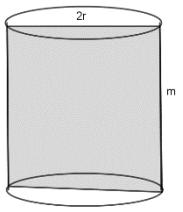




lemetszett körszelet területe $T = \frac{1}{2}r^2\left(\widehat{\alpha}-\sin\alpha\right) = \frac{1}{2}10^2\left(\frac{145{,}08\pi}{180}-\sin 145{,}08°\right) \approx$ 98 m². A térfogat V = T·m ≈ 3919,7 cm³. A felszínhez még szükséges a körszeletet határoló ív, ennek hossza $i = \frac{\alpha\cdot r\cdot\pi}{180} \approx 25{,}32$ cm, illetve húr $h = 2\sqrt{91}$. A felszín a két alapterület (körszelet) és a palástot alkotó két téglalap területének összege. Az egyik téglalap P_1 = h·m ≈ 763,15 cm², a másik P_2 = i·m ≈ 1012,85 cm², így a felszín A ≈ 1972 cm².

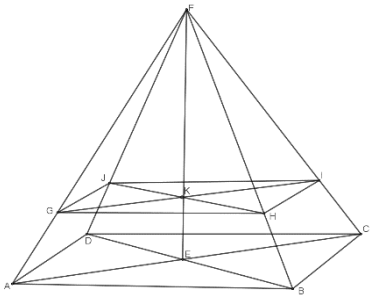
13.1.20 Az előző feladat alapján A ≈ 318,86 cm², V ≈ 100 cm³.

13.1.21 A tengelymetszet az a téglalap, melynek oldalai az alapkör átmérője, illetve a henger magassága. Megoldandó az $500\pi = 2r^2\,\pi + 2r\,\pi\,m$, $300 = 2r\,m$. egyenletrendszer. Ennek megoldásai r = 10 cm, m = 15 cm. Az előző feladatok alapján A ≈ 607,65 cm^2, V ≈ 670,94 cm^3.



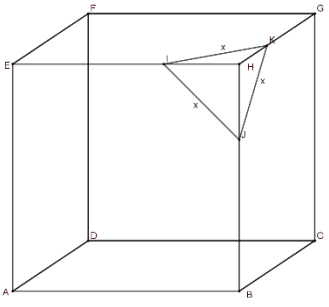
13.2. Gúlák, kúpok

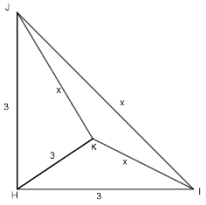
13.2.1. A feladat feltételei alapján AB=12 cm, BF=10 cm. EB=$\frac{\sqrt{2}\cdot 10}{2} = 5\sqrt{2}$. Így FE=$\sqrt{94}$. A GHIJF gúla térfogata V, ekkor az ABCDF gúla térfogata 2V. A két gúla hasonló egymáshoz, a hasonlóság aránya legyen λ, ekkor $\lambda^3 = \frac{V}{2V} = \frac{1}{2}$, így $\lambda = \frac{V}{2V} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. $\frac{HI}{BC} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, vagyis $HI = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot 12$. A GHIJ síkmetszet kerülete így $HI = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot 48 \approx 38{,}1$ cm. $\frac{FK}{FE} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, vagyis $FK = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{94}$, így az alaplap és a síkmetszet EK távolságára EK=FE-FK= $= \sqrt{94} - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{94} = \sqrt{94}\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \approx 2\,\text{cm}.$



13.2.2. A síkmetszet kerület 30 cm, az alaplap és a síkmetszet távolsága 6,25 cm.

13.2.3. A megmaradt test térfogatát megkapjuk, ha a kocka térfogatából kivonjuk a jobb oldali gúla térfogatának nyolcszorosát. Ennek a térfogatához használjuk a jobb oldali ábrát. Eszerint a csúcsoknál olyan egybevágó gúlák keletkeznek, melyeknek az alaplapja, és két oldallapja egybevágó derékszögű háromszög, és egy oldallapja szabályos háromszög. $x = 3\sqrt{2}$. Az alapterület $T = \frac{3\cdot 3}{2}$ =4,5 cm^2, a magasság pedig m=3 cm. Egy ilyen gúla térfogata: V=$\frac{T\cdot m}{3}$ = 4,5 cm^3. Így a megmaradt test térfogata V=123-8·4.5=1692 cm^3. Az x-el jelölt szakasz hossza $3\sqrt{2}$ A felszínt úgy kapjuk meg, hogy a kocka felszínéből elhagyjuk a



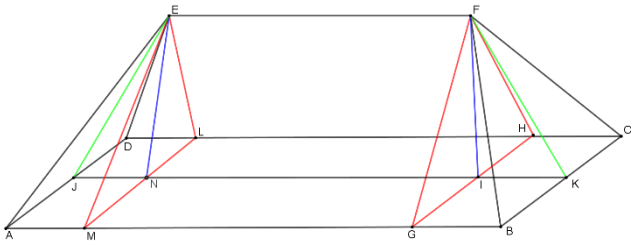


derékszögű lapok (ebből 8·3=24 db van) területét, és keletkezik 8 db szabályos háromszög, ezek területét pedig hozzáadjuk. Így a megmaradt test felszíne

$A = 6\cdot 12^2 - 24\cdot 4.5 + 8\cdot \frac{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot \sin 60°}{2} \approx 830{,}35 \text{ cm}^2$.

13.2.4. A kocka éle $a \approx 4{,}9671$ cm.

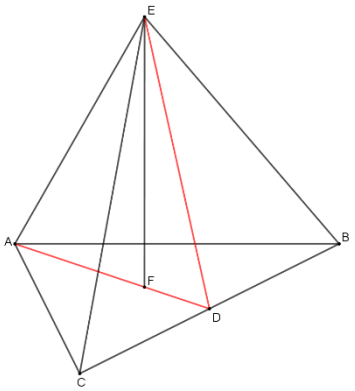
13.2.5. Az ábra és az adatok alapján a következő számításokat végezhetjük el: Az ABFE szimmetrikus trapézban GB=2 cm. A GFB derékszögű háromszögben GF= $\sqrt{21}$ cm. GI=2 cm. A GFI derékszögű háromszögben FI= $\sqrt{17}$ cm, a KFI derékszögű háromszögben FI= $\sqrt{21}$ cm. A test felszíne áll egyrészt az alaplapból, ennek területe 40 cm^2. A BCF háromszög területe $\frac{\sqrt{21}\cdot 4}{2} = 2\sqrt{21}$ cm^2, az ABFE trapéz területe $\frac{10+6}{2}\cdot\sqrt{21} = 8\cdot\sqrt{21}$ cm^2. Így a test felszíne: $40 + 4\sqrt{21} + 16\sqrt{21} = 40 + 20\sqrt{21}$ cm^2. A térfogat kiszámításához a testet három darabra bontjuk. Középen egy háromszög alapú hasáb szerepel (fektetve), a két szélen pedig egy-egy téglalap alapú gúla, melyek összességében egy négyzet alapú gúlát alkotnak. A hasáb térfogata $V_1 = \frac{\sqrt{17}\cdot 4}{2}\cdot 6$, a gúla térfogata $V_2 = \frac{\sqrt{17}\cdot 4^2}{3}$, így a térfogat összességében $V = \frac{\sqrt{17}\cdot 52}{3}$ cm^3.



13.2.6. A térfogat $108\sqrt{12}$ cm^3, a felszín pedig 616 cm^2.

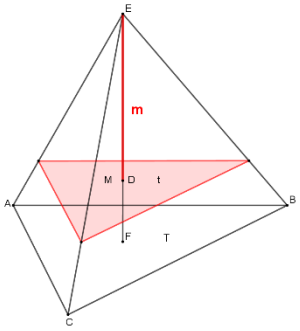
13.2.7. A hasáb térfogata 2308,26 m^3, a gúláé 512,95 m^3, így a teljes térfogat 2821,21 m^3, vagyis 19 fűtőtest kell az épület befűtéséhez. A festéshez a két palástra van szükség, a hasábé 300 m^2, a gúláé 775,89 m^2, ezek összege 1075,89 m^2, így 15 liter festékre van szükség, ezért: 45.000 Ft.

13.2.8. Az ABC szabályos háromszög oldalainak hossza legyen ’a’, ekkor az alaplap területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=72\sqrt{3}$. Így az alapél 12 cm. Az ABC háromszög AD magassága és egyben súlyvonala $6\sqrt{3}$, az F súlypontja is egyben, ez harmadolja a súlyvonalakat, így az FD hossza $2\sqrt{3}$. Az oldallap területe $24\sqrt{7}=\frac{12\cdot ED}{2}$, ebből az oldallap ED magassága $4\sqrt{7}$, így a gúla EF magassága 10 cm, térfogata $240\sqrt{3}$ cm^3.

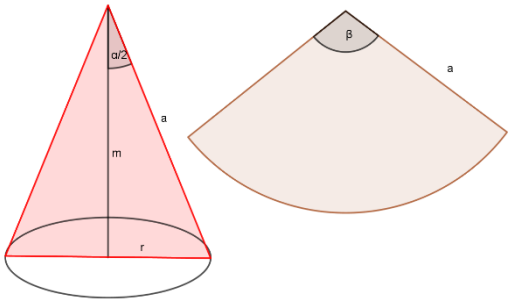


13.2.9. $V=\frac{100\sqrt{231}}{3}\approx 506{,}62$ cm^3.

13.2.10. ED = m = 20 – 5 = 15 cm. A lemetszett gúla hasonló az eredeti gúlához, a hasonlóság aránya $\lambda=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. Így az alapterületek aránya $\frac{t}{T}=\lambda^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Mivel t = 144 cm^2, ezért T = 256 cm^2, így a gúla térfogata $\frac{5120}{3}$ cm^3.



13.2.11. A tengelymetszetének területe $108=\frac{a^2\cdot\sin\alpha}{2}$, és a=15, így α=83,62°. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{m}{a}$, így m=12 cm, így r=9 cm. A kúp térfogata 324π cm^3, felszíne 216π cm^2. Kiterített palástjának középponti szöge a kiszámolható, ha a palástot felírjuk a körcikk területképletével: $r\cdot\pi\cdot a=\frac{a^2\cdot\pi\cdot\beta}{360}$, innen β=240°.



13.2.12. Az előző feladathoz hasonlóan a felszín A ≈ 4042 cm^2, a térfogat V ≈ 14100 cm^3, a kiterített palást középponti szöge β ≈ 231,41°

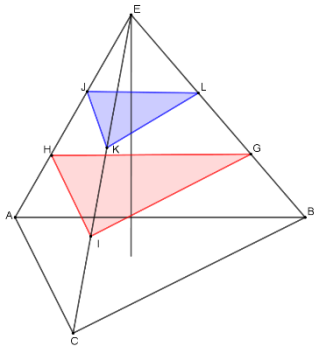
13.2.13. A 13.2.10-es feladathoz hasonlóan a kúp alaplapjának területe $T = \frac{100 \cdot 225}{49}$, ebből az alaplap sugara r ≈ 12,09 cm. Az alkotó a ≈ 19,266 cm. Így a kúp felszíne A ≈ 1190,96 cm^2, a térfogat V ≈ 21638,52 cm^3.

13.2.14. $r \cdot \pi \cdot a = \frac{a^2 \cdot \pi \cdot 150}{360}$, ebből $r = \frac{5}{12}a$, illetve. Mivel p=r·π·a, $a = \sqrt{\frac{12}{5\pi}p}$, illetve $r = \sqrt{\frac{5}{12\pi}p}$. Így a kúp magassága $m = \sqrt{\frac{119}{60\pi}p}$, $r = \sqrt{\frac{5}{12\pi}p}$, térfogata $V = \frac{\frac{5}{12\pi}p \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{119}{60\pi}p}}{3} = \frac{5p \cdot \sqrt{\frac{119}{60\pi}p}}{36}$.

13.2.15. A megadott adatok alapján a síkmetszett sugara 4cm. A tengelymetszetből $r = \frac{60}{m}$, illetve hasonlóság alapján $\frac{r}{4} = \frac{m}{m-3}$. Ennek az egyenletrendszernek két megoldása van, így a kúp lehetséges térfogatai V_1≈341,46 cm^3, illetve V_2≈909,07 cm^3.

13.3. Csonkagúla, csonkakúp

13.3.1. Az ABCE gúla magassága legyen 3x, ekkor az JKLE gúla magassága x. A két gúla hasonló egymáshoz a hasonlóság aránya $\lambda = \frac{1}{3}$, így térfogatuk aránya $\frac{1}{27}$. Tehát ha az JKL gúla térfogata y, akkor az ABCE gúla térfogata 27y. A HIGE gúla is hasonló a JKLE gúlához, ott a hasonlóság aránya $\lambda' = \frac{1}{2}$ (a HIGE gúla magassága 2x), így térfogatuk aránya $\frac{1}{8}$, tehát a HIGE gúla térfogata 8y, így a HIGJKL csonkagúla térfogata 7y. Az ABCHIG csonkagúla térfogat pedig 27y-8y = 19y. Így a keletkező JKLE gúla, HIGJKL csonkagúla és ABCHIG csonkagúla térfogatának aránya 1:7:19.



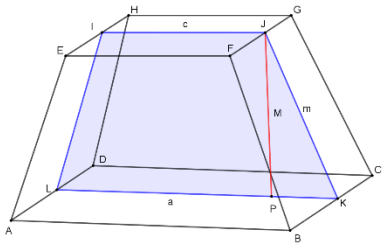
13.3.2. Az előző feladathoz hasonlóan a keletkező testek térfogatának aránya 1:7:19:37

13.3.3. A keletkező kúp és csonkakúp térfogata legyen V, ekkor az eredeti kúp térfogata 2V. Ez hasonló a lemetszett kúphoz, térfogatuk aránya $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V}{2V}=\frac{1}{2}=\lambda^3$. (A térfogatok aránya egyenlő a hasonlóság arányának köbével). Ebből $\lambda=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Így ha az eredeti kúp magassága M, akkor a lemetszett kúp magassága $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}M$, a csonkagúla magassága $M-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}M=M\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

Így a lemetszett kúp és csonkakúp magasságának aránya $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$.

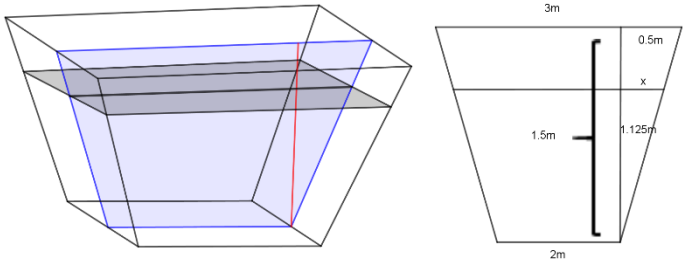
13.3.4. Egy kúp és 2 csonkakúp keletkezik, magasságuk aránya, az előző feladatok alapján, a lemetszett kúp, középső csonkakúp, és alsó csonkakúp magasságának aránya: $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}:\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right):\left(1-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$

13.3.5. A csonkagúla alapéle legyen a, fedőéle c, oldallap magassága m, testmagassága M. Ekkor a megadott arányok miatt $a^2=4c^2$, illetve $a^2=2\cdot\frac{a+c}{2}\cdot m$. Mindezekből következik, hogy $a=2c, m=\frac{4}{3}c$. A csonkagúla tengelymetszetében (LKJI trapéz) a Pitagorasz-tételt felhasználva $\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+M^2=m^2$. Az előzőket ebbe behelyettesítve $M=\frac{\sqrt{55}}{6}c$. A térfogatképlet alapján $360=\frac{\left(4c^2+2c^2+c^2\right)}{3}\cdot\frac{\sqrt{55}}{6}c$. Ebből $c=\sqrt[3]{\frac{6480}{7\sqrt{55}}}\approx 5cm.$ Így a csonkagúla felszíne:



$A=100+25+4\frac{5+10}{2}\cdot\frac{20}{3}=325\ \text{cm}^2$.

13.3.6. Mivel magasságának három negyed részéig ér a víz, a víz magassága 1,125 m. A nyugvó vízszint és az alaplap által meghatározott csonkagúla térfogatát kell kiszámolni, ehhez ennek a



fedőéle szükséges. Az ábra alapján $\frac{x}{0.5}=\frac{1.125}{1.5}$. Ebből x=0,375. Ebből a fedőél 2+2x=2,75 m.

Így a víz térfogata V=$\frac{819}{128}$ m^3 ≈ 6,4 m^3

13.3.7. Az előző feladat alapján a vízszint sugara 0,968 m, ebből a térfogat V ≈ 1,97 m^3

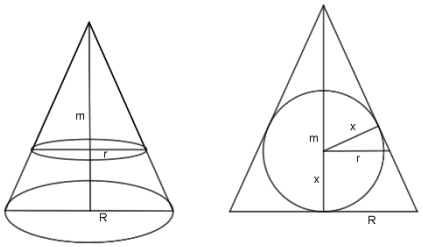
13.3.8. V = 5,26 m^3=52,6 hl

13.3.9. Az alaplap területe 4156,92 cm^2. A nyugvó folyadékszint által meghatározott hatszög éle 80 cm, így ennek a területe 16627,69 cm^2. A magasság 200 cm. Így a folyadék térfogata 1939896,83 cm3 ≈ 19,4 hl.

13.3.10. A gúla alapéle legyen a, magassága m. Ekkor az első területből $96=\frac{\sqrt{2}a\cdot m}{2}$. Ebből m = $\frac{96\sqrt{2}}{a}$. A csonkagúla fedőlapjának területéből a fedőéle c=$\sqrt{48}$ cm. Hasonlóság segítségével $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}c}{\frac{\sqrt{2}}{2}a}=\frac{6}{m}$. Mindezeket összevetve a=$8\sqrt[4]{6}$≈12,5207, m ≈ 10,8432 cm, Így a csonkagúla térfogata V ≈ 1053,65 cm^3, felszíne A ≈ 630,04 cm^2.

13.3.11. A megadott adatok alapján a síkmetszet, így a csonkakúp fedőkörének sugara 5 cm. A tengelymetszetből $r=\frac{90}{m}$, illetve hasonlóság alapján $\frac{r}{5}=\frac{m}{m-4}$. Ennek az egyenletrendszernek két megoldása van m_1=12 cm, m_2=6 cm, így a csonkakúp magassága 8 cm, vagy 4 cm, alapkörének sugara 7,5 cm, vagy 15 cm. A lehetséges térfogatok V_1≈994,84 cm^3, illetve V_2≈1361,36 cm^3.

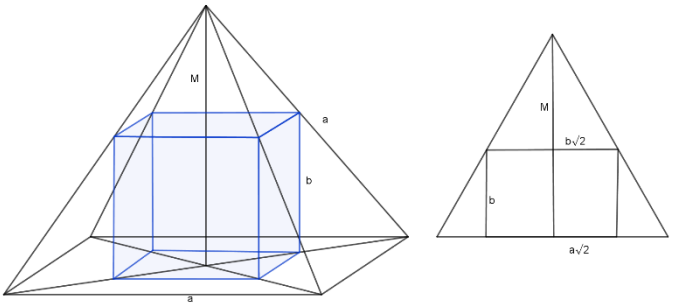
13.3.12. A kúp alapkörének sugarát R-el, a síkmetszet sugarát r-el, a tengelymetszet beírt körének sugarát x-el jelöljük. A kúp alkotója az adatok alapján 8 cm, így ki tudjuk számolni a tengelymetszet kerületét, ami 32 cm, területe 48 cm^2. Így a felkerület s = 16 cm. A háromszög



területe és beírt körének sugara (x) közötti összefüggés alapján T = x·s, így a beírt kör sugara x=3 cm. Hasonlóság segítségével kiszámolható a síkmetszet sugara $\frac{r}{R}=\frac{m-x}{m}$. Ebből r = 3,75 cm. A csonkakúp alkotója $a^2=(R-r)^2+x^2$ segítségével a = 3,75 cm. Így a csonkakúp felszíne: A = $\frac{693}{8}\pi$ cm^2≈272,14 cm^2.

13.4. Egymásba írt testek, gömbök

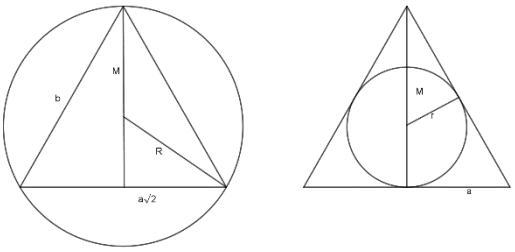
13.4.1. A szabályos négy oldalú gúla minden éle a = 10 cm. A beleírt kocka éleit jelöljük b-vel. A gúla magassága Pitagorasz-tétel segítségével $M=\sqrt{10^2-\left(\frac{\sqrt{2}\cdot 10}{2}\right)^2}=\sqrt{50}$. Az



alaplap átlójára illeszkedő síkmetszet és hasonlóság segítségével $\frac{b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=\frac{M-b}{M}$. Ebből $b=\frac{10\sqrt{50}}{10+\sqrt{50}}$, azaz a keresett felszín $A=6\cdot\left(\frac{10\sqrt{50}}{10+\sqrt{50}}\right)^2\approx 102{,}94cm^2$

13.4.2. Az előző feladat alapján a keresett térfogat $V\approx 293{,}15$ cm^3.

13.4.3. A köré írt gömb sugarának kiszámításához az alaplap átlójára illeszkedő tengelymetszetet használjuk. M=10 cm, b=12 cm. Ebből $a=2\sqrt{22}$ cm. Így a tengelymetszet területe $t=20\sqrt{11}$ cm^2. A köré írt kör sugara kiszámolható $t=\frac{abc}{4R}$ alapján, ami



ebben az esetben R ≈ 5,09 cm. Tehát a köré írt gömb térfogata V ≈ 552,77 cm^3. A bele írt gömb

sugarának kiszámításához az alaplap középvonalára illeszkedő tengelymetszetet használjuk. Ennek a tengelymetszet területe $t = 10\sqrt{22}$ cm^2, a kerület fele $s = 12 + \sqrt{22}$ A bele írt kör sugara kiszámolható $t = r \cdot s$ alapján, ami ebben az esetben r ≈ 2,81 cm. Tehát a beírt gömb térfogata V ≈ 92,97 cm^3.

13.4.4. Az előző feladat alapján a köré írható gömb sugara R = 5,7 cm, így ennek felszíne A ≈ 408,28 cm^2. A beírható gömb sugara r = 1,92 cm, így ennek felszíne A ≈ 46,45 cm^2.

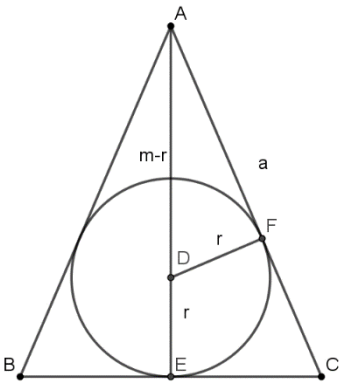
13.4.5. A kúp köré írható gömb sugara R = 6,53 cm, így ennek térfogata V ≈ 1164,76 cm^3. A beírható gömb sugara r = 3 cm, így ennek térfogata V ≈ 113,1 cm^3.

13.4.6. A köré írható gömb sugara R = 33,8 cm, így ennek felszíne A ≈ 14356,32 cm^2. A beírható gömb sugara r = 4,8 cm, így ennek felszíne A ≈ 46,45 cm^2.

13.4.7. A 13.3.12 feladat alapján a térfogat V ≈ 5997,11 cm^3.

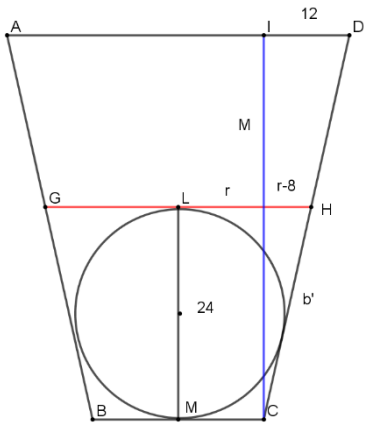
13.4.8. A téglalap lapátlója $2\sqrt{61}$, ennek a fele, a téglalap magassága és a félgömb sugara derékszögű háromszöget alkot. Így a téglalap magassága $2\sqrt{141}$, térfogata $240\sqrt{141}$ cm^3.

13.4.9. A fénysugarak, illetve az árnyékot alkotó kör egy egyenlő szárú háromszöget alkot, melynek alapja 24 cm. Az AEC háromszög derékszögű, így az a = AC = 20 cm. Az ábra alapján az ECA háromszög hasonló a DFA háromszöghöz. A hasonlóság alapján $\frac{m-r}{r} = \frac{a}{EC}$, ebből $\frac{16-r}{r} = \frac{20}{12}$, így r = $\frac{64}{9}$ cm. A golyó térfogata V ≈ 1.506,26 cm^3.



13.4.10. A csonkakúp és a beírható gömb tengelymetszete egy szimmetrikus trapéz, a beírható körrel, így a trapéz egyben érintőnégyszög is. Tehát a szárak összege egyenlő az alapok összegével, így a szára 26 cm. Ebből a trapéz magassága (amely megegyezik a kör (így a gömb átmérője is) $8\sqrt{10}$, tehát a beírható gömb térfogata V ≈ 8.477,52 cm^3.

13.4.11. Az ábrán látható a csonkakúp tengelymetszete. Legyen a HG szakasz 2r. A BCHG érintőtrapéz, így 2r + 16 =2b', aniből b'= r + 8. Pitagorasz-tétel alapján $24^2 + (r-8)^2 = b'^2$. Ezekből r = 18 cm. Hasonlóság segítségével pedig $\frac{M}{12} = \frac{24}{r-8}$. Így a csonkakúp magassága 28,8 cm, térfogata V ≈ 18.819,4 cm^3.



14. Sorozatok

14.1. Számsorozatok, rekurzív sorozatok

14.1.1. Képezzünk sorozatot aszerint, hogy mindegyik tag megegyezik a sorszámának megfelelő lépcsőfokra jutás lehetőségeinek számával. Ez alapján $a_1=1$, (hiszen az első lépcsőfokra csak egyféleképpen lehet fellépni), $a_2=2$, (hiszen a második lépcsőfokra kétféleképpen lehet fellépni – 1,1 vagy egyből 2). Folytatva a tagok felírását $a_3=3$ (1,1,1 – 1,2 – 2,1), $a_4=5$ (1,1,1,1 – 1,1,2 – 1,2,1, – 2,1,1- 2,2). Általánosítva: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. $a_5 = 8$, $a_6 =13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$, $a_{12} = 233$. Tehát 233 a megoldás.

14.1.2. Az előző feladat alapján: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}+ a_{n-3}$. Így $a_8 = 81$.

14.1.3. Felírva az első 24 tagot, láthatjuk, hogy 12-es ismétlődő csoportok vannak. 2019-nek a 12-vel való osztási maradéka 3, így mivel a harmadik tag 0, a 2019.-ik tag is nulla lesz. Az első 12 tag összege 0, így az első 2016 tag összege: 0, a következő három tag összege 2, így az első 2019 tag összege: 2.

14.1.4. Az előző feladathoz hasonlóan megfigyelhetjük, hogy hatos ismétlődő csoportok vannak (1,1,0,-1,-1,0), melyben a tagok összege 0. A 2018 hattal való osztási maradéka 2, így a 2018. tag 1, az első 2018 tag összege 2.

14.1.5. Megfigyelhető, hogy minden csoport utolsó eleme megegyezik a csoportok tagszámának összegével. Például a 4. csoport utolsó eleme a 10=1+2+3+4 (az első 4 csoport elemszámainak összege). Így az 50.-ik csoport utolsó eleme: $\frac{1+50}{2}\cdot 50 = 1275$. Mivel ez a csoport 50 elemű, a csoport első eleme: 1226. A b) rész megoldásához először az $\frac{n\cdot(n+1)}{2} \geq 2019$ egyenlőtlenséget kell megoldani. Ebből $n \geq 63.04$, vagyis $n = 64$. Tehát a 2019 a 64.-ik csoportban van. A 63. csoport utolsó eleme: 2016, így a 2019 a 64. csoport harmadik eleme.

14.1.6. Az előző feladathoz hasonlóan, azzal a különbséggel, hogy minden csoport első tagja egyenlő az addigi csoportok elemszámainak összegével. Így a 100. csoport első eleme

$\frac{1+99}{2}\cdot 99 = 4950$. Utolsó eleme 5049. Az 1789 a 60. csoportban van, annak első eleme 1770, így az 1789 a 20. eleme.

14.1.7. Megfigyelhető, hogy a harmadik perctől kezdve megduplázódik az addigi összes megfertőződött terület. S_2=5, S_3=10, S_4=20, és így tovább. Tehát megoldandó. $S_n=5\cdot 2^{n-2} \geq 10.000.000$ (mm^2). Logaritmizálás segítségével $n \geq 22.93$. Tehát a 23. percben emelkedik a terület 10 m^2 fölé.

14.1.8. Az előző feladat alapján a 16. órában emelkedik a nyulak száma 100.000 felé.

14.1.9. A feltételek alapján $a_3 = a_2 + 12a_1$. A számtani közép alapján $2a_2 = a_1 + 12a_3 - 9$. Ebből a két összefüggésből adódik, hogy $a_2 = 4a_1$. Így $a_3 = 16a_1$, $a_4 = 64a_1$, illetve $a_5 = 256a_1$. Az összeg segítségével pedig, $a_1 = 2$. Így a hatodik tag 2048.

14.2. Számtani és mértani sorozatok

14.2.1. A számjegyek: $a-d,\ a,a+d$. Összegük $3a$. A szám értéke $111a-99d$. Tehát az első feltétel alapján $(1)\frac{111a-99d}{3a}=20.5$. A felcserélt számban a számjegyek: $a,a-d,a+d$. Ennek értéke $111a-9d$. A második feltétel alapján $(2)111a-9d-270=111a-99d$. Ebből $d=3$. Ezt (1)-be visszahelyettesítve $a=6$. Tehát a keresett szám a 369.

14.2.2. Az előző feladat alapján a keresett szám a 864.

14.2.3. $\overline{ab}=10a+b$; $\overline{ba}=10b+a$; $\overline{a0b}=100a+b$. A számtani közép alapján $10b+a=\frac{10a+b+100a+b}{2}$. Ebből $b=6a$, így a keresett számok: 16, 61, 106.

14.2.4. Az előző feladat alapján 6,61, 116.

14.2.5. $(1)t=a_1+(r-1)\cdot d$, illetve $(2)r=a_1+(t-1)\cdot d$. (1)-(2)-ből következik, hogy $t-r=(r-t)\cdot d$, mivel $t\neq r$, $d=-1$. Ezt (1)-be visszahelyettesítve kapjuk, hogy $a_1=t+r-1$. Így $a_n=a_1+(n-1)\cdot d$ alapján $a_n=t+r-1+(n-1)\cdot(-1)=t+r-n$

14.2.6. A megadottak alapján $b_1 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3$, $b_2 = a_4 + a_5 + a_6 = \frac{a_4 + a_6}{2} \cdot 3$.

Általánosítva $b_n = a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{a_{3n-2} + a_{3n}}{2} \cdot 3 = \frac{a_1 + (3n-2-1)\cdot d + a_1 + (3n-1)\cdot d}{2} \cdot 3$.

Vagyis $b_n = \frac{2a_1 + (6n-4)\cdot d}{2} \cdot 3 = 3a_1 + (3n-2)\cdot 3d = 3a_1 + 9nd - 6d$.

$b_n = 3a_1 - 6d + (n-1)\cdot 9d + 9d = 3a_1 + 3d + (n-1)\cdot 9d$. Tehát a b_n olyan számtani sorozat, melynek első eleme $3a_1+3d$, differenciája pedig $9d$.

14.2.7. Az előző feladat alapján b_n olyan számtani sorozat, melynek első eleme $5a_1+10d$, differenciája pedig $25d$.

14.2.8. $a_{1011} = a_1 + 1010d = d \Rightarrow a_1 = -1009d$. $S_{2019} = \frac{2a_1 + 2018d}{2} \cdot 2019$. Ebbe az a_1-et behelyettesítve 0-t kapunk, ez a megoldás.

14.2.9. $S_{10} = \frac{2a_1 + 9d}{2} \cdot 10 = 10a_1 + 45d = 390$. Vagyis $(1)\ 2a_1 + 9d = 78$. A második 5 tag összegét megkapjuk, ha az első 10 tag összegéből kivonjuk a az első 5 tag összegét, és ez 200, azaz $S_{6-10} = S_{10} - S_5 = S_5 + 200$. Ebből $2 \cdot S_5 = S_{10} - 200$. Az összegképletet alkalmazva, majd rendezve $d = 8$. Ezt (1)-be behelyettesítve $a_1=3$.

14.2.10. Mivel 11 páratlan és 10 páros tag van, ezek külön-külön egy-egy újabb 2d differenciájú számtani sorozatot alkotnak, valamint az első feltétel alapján: $\frac{2a_1 + (11-1)\cdot 2d}{2} \cdot 11 = \frac{2(a_1 + d) + (10-1)\cdot 2d}{2} \cdot 10$, ebből $(1) 2a_1 + 20d = 30$. A második feltételt felírva az eredeti sorozatra, átrendezve $(2) 2a_1 + 5d = 0$. Ebből az egyenletrendszerből $d = 2$, illetve $a_1 = -5$. Az $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$ alapján $23 = -5 + (n-1)\cdot 2$, ebből következik, hogy a 15.-ik tag a 23. $2000 \le \frac{-10 + (n-1)\cdot 2}{2} \cdot n$-ből pedig egyrészt $n \le -41{,}82$, ami nem ad megoldást, másrészt pedig $n \ge 47{,}82$. Tehát legalább 48 tagot kell az elsőtől összeadni, hogy az összeg elérje a 2000-et. Ez könnyen le is ellenőrizhető, az első 47 tag összege 1927, az első 48 tag összege 2016.

14.2.11. Megoldandó az $(1): (a-d)^2 + a^2 = 208$, illetve $(2): (a+d)^2 + a^2 = 400$ egyenletekből álló egyenletrendszer. Zárójeleket felbontva, majd a két egyenletet egymásból kivonva kapjuk

$4ad = 192$, amiből $a = \frac{48}{d}$. Ezt (1)-be behelyettesítve másodfokúra vezető negyedfokú egyenletet kapunk, aminek megoldásai: $d_{1,2} = \pm\sqrt{288}$, $d_{3,4} = \pm 4$. Ezekből $a_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$, illetve $a_{3,4} = \pm 12$.

14.2.12. Az oldalak legyenek $a-d,\ a, a+d$. Pitagorasz-tétele alapján: $(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2$. Ebből $a^2 = 4ad$. Mivel $a \neq 0$, $a = 4d$. A szögekre $\sin\alpha = \frac{a-d}{a+d} = \frac{3d}{5d} = \frac{3}{5}$. Ebből pedig $\alpha = 36{,}87°$, illetve $\beta = 53{,}13°$.

14.2.13. Az előző feladat alapján a szögek függetlenek a differenciától, így

14.2.14. $\alpha = 36{,}87°$, illetve $\beta = 53{,}13°$.

14.2.15. Az előző feladat alapján $a = 4d$, $a + d = 5d = 20$, ebből $d = 4$, tehát az oldalak 12 cm, 16 cm, és 20 cm. Így a $T = s \cdot r$ alapján $r = 4cm$. Megjegyzés: derékszögű háromszög esetén dolgozhatunk a $c = a + b - 2r$ összefüggéssel is, a beírható kör sugara természetesen ez alapján is $r = 4cm$.

14.2.16. Az előzőek alapján $a = 4d$, így a terület felírható $T = \frac{(a-d)\cdot a}{2} = \frac{3d \cdot 4d}{2} = 6d^2$. Mivel a terület 24 cm^2, így $d = 2$, tehát az oldalak $6cm, 8cm, 10cm$. Így a Thalész-tétel alapján a derékszögű háromszög köré írható körének sugara: $R = \frac{c}{2} = 5cm$.

14.2.17. Az oldalak legyenek $a-d,\ a, a+d$, így a kerület alapján $a = 70cm$. A szorzat miatt pedig $(a-d)\cdot(a+d) = (70-d)\cdot(70+d) = 4836$. Ebből $d = 8$. Így az oldalak 62 *cm*, 70 *cm*, 78 *cm*. Területe $\left(s = \frac{K}{2} = 105\right)$ a Héron-képlet alapján

$T = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)} \approx 2065{,}6cm^2$.

14.2.18. Az előző feladat alapján az oldalak 5, 9 és 13 cm. T ≈ 16,07 cm^2.

14.2.19. Az oldalak legyenek $a-2,\ a, a+2$. A legkisebb szög miatt a legrövidebb oldalra felírva a cosinus tételt: $(a-2)^2 = (a+2)^2 + a^2 - 2(a+2)a\cdot\cos 44{,}415°$. Ebből $a \approx 12cm$.

A másik két oldal pedig 10 cm, illetve 14 cm. A háromszög területe $T = \frac{12 \cdot 14 \cdot \sin 44.415°}{2} \approx 58{,}79 cm^2$, ebből a beírt kör sugara $r = \frac{T}{s} \approx 3{,}27 cm$.

14.2.20. Az előző feladat alapján az oldalak 14 cm, 16 cm, 18 cm. A köré írt kör sugara a $T = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ alapján $R \approx 9{,}38 cm$.

14.2.21. Az oldalak legyenek $5{,}5+d$, $5+2d$. Ha van 60°-os szög, akkor az csak a középső oldallal szemközti lehet. Erre az oldalra felírva a cosinus-tételt: $(5+d)^2 = 5^2 + (5+2d)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (5+2d)\cos 60°$. Ebből $d^2 = 4d^2$, aminek csak a d=0 a megoldása, azaz a háromszögnek minden oldala ugyanakkora, ez ellentmond annak a feltételnek, hogy a háromszög nem szabályos.

14.2.22. Az előző feladat alapján, hasonlóan bizonyítható a megadott állítás.

14.2.23. A számtani sorozat összegképlete alapján a belső szögek összege: $S_n = \frac{135+177}{2} \cdot n$. Az *n* oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180$. Ezek egyenlőek egymással, ebből n=15.

14.2.24. Az előző feladat alapján n=16.

14.2.25. Az előző feladat alapján n=18, illetve n=20. Ellenőrizve a kapott eredményt, a 20 nem megoldás, mert a legnagyobb szög már nem konvex.

14.2.26. A szögek legyenek $\alpha - d, \alpha, \alpha + d, \alpha + 2d$, ezek összege 360°. Ebből $4\alpha + 2d = 360°$, vagyis $d = 180° - 2\alpha$. Ezt behelyettesítve a szögekbe, a szögek: $(I)\, 3\alpha - 180, (II)\, \alpha, (III)\, 180° - \alpha, (IV)\, 360° - 3\alpha$. Az (*I*)+(*IV*) =180°, (*II*)+(*III*) =180°. Mivel ezek a szögek vagy szomszédos szögek, ebben az esetben trapézról van szó, vagy szemközti szögek akkor pedig húrnégyszög.

14.2.27. A mérkőzések száma **n** csapat esetén $\frac{n(n-1)}{2}$. A kiosztott pontszámok összege ennek a kétszerese, mivel minden mérkőzésen két pont kerül valamilyen formában kiosztásra, tehát $n(n-1)$. Mivel a pontszámok számtani sorozatot alkotnak, az összegük felírható úgyis, hogy:

$\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n=\frac{4+(n-1)d}{2}\cdot n=n(n-1)$. Ebből $d=\frac{2n-6}{n-1}=2-\frac{4}{n-1}$. Mivel d az csak az 1 egész számú többszöröse lehet, ez csak n=5 pozitív egész esetén ad ilyen értéket. Tehát 5 csapat szerepelt a csoportban.

14.2.28. A feltételek alapján $(1):(a+d)^3+(a-d)^3=756$, illetve $(2):(a+d)^2-(a-d)^2=24d$. (2)-ből $4ad=24d$, mivel a szigorú növekedés miatt $d\neq 0$, így $a=6$. Ezt (1)-be behelyettesítve $d^2=9$. A szigorú növekedés miatt csak $d=3$ lehetséges. Így a sorozat első tagja 3, és a differenciája is 3.

14.2.29. Az előző feladat alapján a_1=7, d=1.

14.2.30. A feltételek alapján $a_1=224; q=0.5$. $a_n=a_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}; \frac{7}{64}=224\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Ebből logaritmizálás segítségével $n=12$, tehát a 12. tag a $\frac{7}{64}$. Az összeg esetén hasonlóan az első 10 tag összege lesz a megadott érték. Az 500-at nem érheti el a tagok összege.

14.2.31. Az első percben az autó 2 km-t tesz meg, a tagok olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek ez az első eleme és q = 0,99. Az előző feladathoz hasonlóan $n \approx 179{,}3$, tehát majdnem 180 perc, így 3 óra alatt jut el a megadott településre. 300 km-es távolságra nem fog ilyen feltételek mellett eljutni.

14.2.32. Az első és a harmadik szorzata $\frac{a_2}{q}\cdot a_2\cdot q=a_2{}^2=36$. Ebből $a_2=\pm 6$. Így az első esetben az első feltétel alapján $\frac{6}{q}+6+6q=26$. Ebből $a_2=-3$ vagy $a_2=-\frac{1}{3}$. A második esetben hasonlóan $a_2=3$ vagy $a_2=\frac{1}{3}$

14.2.33. A második tag a, az első tag $\frac{a}{q}$, a harmadik tag vagy aq. Legyen $\frac{a}{q}+aq=x$. Ekkor $x + a = 21$, illetve $x \cdot a = 80$. Ebből az egyenletrendszerből (1) $a = 6$, illetve $x = 15$, vagy (2) $a = 15$, illetve $x = 6$. Az (1) esetén $x=\frac{a}{q}+aq=15$, azaz $\frac{6}{q}+6q=15$. Ebből $q=\frac{1}{2}, q=2$.

(2) esetén $x = \frac{a}{q} + aq = 6$, azaz $\frac{15}{q} + 15q = 6$. Ennek az egyenletnek nincs megoldása. Így a sorozat első három tagja a (3, 6, 12) vagy (12, 6, 3).

14.2.34. Az előző feladathoz hasonlóan a sorozat első három tagja a (4, 8, 16) vagy (16, 8, 4).

14.2.35. A sorozat harmadik tagját jelöljük a-val. Ekkor $\frac{a}{q^2} + a + aq^2 = a\left(\frac{1}{q^2} + 1 + q^2\right) = \frac{133}{6}$, illetve $\frac{a}{q} + aq = a\left(\frac{1}{q} + q\right) = 13$. Mivel $\left(\frac{1}{q} + q\right)^2 = \frac{1}{q^2} + 2 + q^2 \Rightarrow \frac{1}{q^2} + q^2 = \left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 2$. Így a $\frac{1}{q} + q = y$ helyettesítést bevezetve (1) $a\left(\frac{1}{q^2} + 1 + q^2\right) = a\left(y^2 - 1\right) = \frac{133}{6}$, illetve (2) $a\left(\frac{1}{q} + q\right) = ay = 13$. (1)-et elosztva (2)-vel $\frac{y^2 - 1}{y} = \frac{133}{78}$. Ebből $y_1 = \frac{13}{6}$ és $y_2 = -\frac{6}{13}$. Az y_1-ből $q_1 = \frac{3}{2}$ illetve $q_2 = \frac{2}{3}$. Az y_2 nem ad megoldást. Mindkét esetben $a = 6$, $q_1 = \frac{3}{2}$ esetén $a_1 = \frac{8}{3}$, $q_2 = \frac{2}{3}$ esetén $a_1 = \frac{27}{2}$.

14.2.36. Az előző feladat alapján $q_1 = \frac{1}{2}$ esetén $a_1 = 48$, $q_2 = 2$ esetén $a_1 = 3$.

14.2.37. Az előző feladat alapján $q_1 = -\frac{1}{2}$ esetén $a_1 = 256$, $q_2 = -2$ esetén $a_1 = 1$.

14.2.38. Az induló pontszám legyen x, a hányadosok pedig q_1, illetve q_2. A feltételek alapján $(1)\, x(q_1 - q_2) = 16$, $(2)\, x\left(q_1^2 - q_2^2\right) = 56$, $(3)\, x\left(q_1^3 - q_2^3\right) = 148$. $(2)\, x(q_1 - q_2)(q_1 + q_2) = 56$, ebbe (1)-et behelyettesítve $(4)\, (q_1 + q_2) = \frac{7}{2}$. $(3)\, x(q_1 - q_2)\left(q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2\right) = 148$-ba behelyettesítve (1)-et, illetve (4)-ből a q_1-et, q_2=2 vagy q_2=1.5. Ebből csak a q_2=1.5 megoldás, ebből q_1=2. Így a kezdő pontszám 32.

14.2.39. Az előző feladat alapján a januári termelés 40 db volt mindkét brigádnál.

14.2.40. Az összegek alapján $a_1=64$, $q=2$. A kérdéshez az $10^9 \le a_n < 10^{10}$ megoldása szükséges. a_n helyébe az a_1q^{n-1}-t helyettesítve, logaritmizálás segítségével $24.89 \le n < 28.21$. Tehát a 25, 26, 27, és a 28.-ik, azaz négy tag lesz 10 jegyű.

14.2.41. $a_1=13$, $q=2$. Az előző feladat alapján 3 tagja lesz 13 jegyű.

14.2.42. $q=\frac{1}{128}, a_1=32$. Megoldandó az $S_n = 32\frac{\left(\frac{1}{128}\right)^n - 1}{\frac{1}{128}-1} > 32{,}5$. Egyszerűbb alakra hozva

$\frac{4096}{127}\left(1-\left(\frac{1}{128}\right)^n\right) > 32{,}5$, ebből $\frac{8255}{8192} < \left(\frac{1}{128}\right)^n$. Logaritmizálás segítségével $n < \frac{\lg\frac{8255}{8192}}{\lg\frac{1}{128}} < 0$

(Fordul a relációjel, mivel a $\lg\left(\frac{1}{128}\right)$ negatív. Tehát a fenti egyenlőtlenségnek nincs megoldása, így valóban nem érheti el az összeg a 32,5-et.

14.2.43. $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_1 \cdot q^2 \cdot \ldots\ldots a_1 \cdot q^{n-1} = a_1^{\,n} \cdot q^{1+2+\ldots+n-1} = a_1^{\,n} \cdot q^{\frac{1+n-1}{2}(n-1)} =$

$2^{-7n} \cdot \left(2^5\right)^{\frac{1+n-1}{2}(n-1)} = 2^{\frac{-14n+5n^2-5n}{2}} = 2^{33n}$. Ez n-re másodfokú egyenletet ad, melynek egyetlen pozitív gyöke a 6.

14.2.44. Az előző feladat alapján n legfeljebb 14. Tegyük fel, hogy van olyan n, amire $S_n \ge \frac{5}{24}$

. $S_n = \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{1}{25}\right)^n - 1}{\frac{1}{25}-1} = \frac{5}{24}\left(1-\left(\frac{1}{25}\right)^n\right) \ge \frac{5}{24}$. Ebből $\left(\frac{1}{25}\right)^n \le 0$, ami nem lehetséges, tehát valóban igaz az eredeti állítás.

14.2.45. $a_1 = 12$. $12 + 12q + 12q^2 + \frac{5}{3} \cdot 12q^2 = 102$. Ennek pozitív gyöke $\frac{3}{2}$. Így a harmadik csapatnak 18, a másodiknak 27, míg az első csapatnak 45 pontja van.

14.2.46. Az előző feladat alapján a férőhelyek: 54, 36, 24 és 18 fő.

14.3.Kamatos kamat, hiteltörlesztés, járadékszámítás

14.3.1. T_0=1M, q=1,05.

a) $1{,}7 = 1{,}05^n$. Ebből n > 10,88, tehát legalább 11 év kell.

b) $2 = q^{10}$. Ebből q = 1,0718, tehát 7.18%-os kamatláb esetén duplázódik meg a számlán lévő pénz 10 év alatt.

14.3.2. a) 678 789Ft b) p = 8,45%. c) 18 év alatt

14.3.3. a) 110 131Ft b) p = 0,94% c) 174 hónap alatt.

14.3.4. A „B" cég jelenlegi termelését x-el jelölve megoldandó a $0.8 \cdot x \cdot 1{,}1^n = x \cdot 1{,}06^n$ egyenlet. Ebből $0{,}8 = \left(\frac{1{,}06}{1{,}1}\right)^n$, vagyis $n = \frac{\lg 0{,}8}{\lg\left(\frac{1{,}06}{1{,}1}\right)} \approx 6{,}02$. Tehát 6 év elteltével lesz a két cég termelése közel egyforma.

14.3.5. Jelenleg az „A" cég termelése a „B" cég termelésének háromnegyede, azaz 75%-a. Így az előző feladat alapján $n = \frac{\lg 0{,}75}{\lg\left(\frac{1{,}1}{1{,}15}\right)} \approx 6{,}47$. Tehát 6 és fél év elteltével lesz a két cég termelése közel egyforma.

14.3.6. a) Évente 1 koca esetén átlagosan 5 malac született. Az 5%-os csökkenés esetén 950 kocával kell számolni, egy kocára akkor 10%-al több, azaz 5,5 malac esik. Így az évi átlagos malac születésszám 5225.

b) Megoldandó a $1000\left(1-\frac{p}{100}\right)5000\left(1+\frac{2p}{100}\right) = 1000 \cdot 5000 \cdot 1{,}1$ egyenlet. Ennek 25-től kisebb gyöke p ≈ 13,82%. .

14.3.7. a) 4 098 400. b) t ≈ 8,33%

14.3.8. a) Az első ajánlat esetén egy év múlva $2M \cdot 1{,}025^4$=2.207.626 Ft , a másik ajánlat esetén $2M/285 \cdot 1{,}01^6$=7.231 CHF. Ez az előző évi árfolyamon visszaszámolva 2.060.755 Ft -ot érne, így ebben az esetben az első ajánlat a kedvezőbb.

b) Legyen a 1CHF x Ft . Ekkor az átváltott egyenleg $7{,}231 \cdot x > 2.207.626$, ebből x = 305,3.

Tehát ha egy év elteltével legalább 305,3 HUF/CHF árfolyam esetén lesz a második ajánlat kedvezőbb.

14.3.9. a) Az előző feladat alapján az első esetben 3.402.828 Ft -ja lesz, a második ajánlat esetén 9776.42 euró lesz a számlán, ami változatlan euró árfolyam esetén 3.128.454 Ft , így az első ajánlat a kedvezőbb.
b) 348.06 HUF/EUR –tól nagyobb árfolyam esetén lesz a második verzió a kedvezőbb. Ez 8,78%-os árfolyamnövekedést jelent.

14.3.10.
a) A betett 1M Ft -ot jelöljük t-vel, a 0,5%-os kamatlábból adódó 1,005 kamatténye zőt pedig q-val, a havonta fizetett 20.000Ft -ot pedig h-val. Az első hónap elején t, a második hónap elején $t\cdot q+h$, a harmadik hónap elején $t\cdot q^2+ h\cdot q +h$ Ft lesz. Ez alapján a 60.-ik hónap elején $t\cdot q^{59}+ h\cdot q^{58} + h\cdot q^{57} +\ldots+ h\cdot q^2+ h\cdot q +h$, a hónap végére pedig
$t\cdot q^{60}+ h\cdot q^{59} + h\cdot q^{58} +\ldots+ h\cdot q^3+ h\cdot q^2 +h\cdot q$ Ft lesz. Ez a továbbiakban felírható úgyis, hogy $t\cdot q^{60}+ h\cdot q(q^{58} + q^{57} +\ldots+ q^2+ q +1)$. A zárójelben egy olyan mértani sorozat első 59 tagjának az összege van, amelynek első tagja 1, hányadosa q. Ez alapján a számlán lévő pénz:

$$1.000.000\cdot 1{,}005^{60} + 20.000\cdot 1{,}005\cdot\frac{1{,}005^{59}-1}{1{,}005-1}=2.724.251 \text{ Ft}$$

b) Megoldandó a $1.000.000\cdot 1{,}005^{n} + 20.000\cdot 1{,}005\cdot\frac{1{,}005^{n-1}-1}{1{,}005-1} = 3.000.000$ egyenlet.

$$1.000.000\cdot 1{,}005^{n} + 4.020.000\cdot\left(1{,}005^{n-1}-1\right) = 3.000.000$$

$$1.000.000\cdot 1{,}005^{n} + \frac{4.020.000\cdot 1{,}005^{n}}{1{,}005} - 4.020.000 = 3.000.000$$

$$1.000.000\cdot 1{,}005^{n} + \frac{4.020.000\cdot 1{,}005^{n}}{1{,}005} - 4.020.000 = 3.000.000$$

$$1{,}005^{n} = 1{,}404$$

$n=\frac{\lg 1{,}404}{\lg 1{,}005}\approx 68{,}03$, tehát 68 hónap elteltével már közel 3M Ft lesz a számlán.

14.3.11. a) Az előző feladat alapján a számlán lévő összeg 5 év elteltével

$$300.000\cdot 1{,}003^{24} + 10.000\cdot 1{,}003\cdot\frac{1{,}003^{23}-1}{1{,}003-1}\approx 560{,}827 \text{ Ft}.$$

b) Megoldandó a $300.000 \cdot 1{,}003^{36} + x \cdot 1{,}003 \cdot \frac{1{,}003^{35} - 1}{1{,}003 - 1} = 2.000.000$ egyenlet.

Ebből x ≈ 45076 Ft . Tehát ha minden hónap elején ennyit fizet be, akkor lesz 3 év múlva 3M Ft körüli összeg a számlán.

14.3.12. a) Az előző feladat alapján a számlán lévő összeg 10 év elteltével

$500.000 \cdot 1{,}08^{10} + 240.000 \cdot 1{,}08 \cdot \frac{1{,}08^{9} - 1}{1{,}08 - 1} \approx 4.316.237$ Ft .

b) Megoldandó a $x \cdot 1.08^{10} + 240.000 \cdot 1.08 \cdot \frac{1.08^{9} - 1}{1.08 - 1} = 6.000.000$ egyenlet.

Ebből x ≈ 45076 Ft . Tehát ha minden hónap elején ennyit fizet be, akkor lesz 3 év múlva 3M Ft körüli összeg a számlán.

14.3.13. Az évente félretett összegek: $365 \cdot 1.000 = 365.000$ Ft. A 15 alatt a számlán lévő összeg:

$365.000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{15} - 1}{1{,}05 - 1} \approx 8.269.984$ Ft

14.3.14. Megoldandó a $438.000 \cdot 1{,}06 \frac{1{,}06^{n} - 1}{1{,}06 - 1} = 20.000.000$ egyenlet. Ebből n ≈ 22. Tehát 22 év elteltével lesz 20 MFt a számlán.

14.3.15. A betett 10M Ft -ot jelöljük t-vel, a 0,4%-os kamatlábból adódó 1.004 kamattényezőt pedig q-val, a havonta fizetett összeget pedig h-val. Az első hónap elején t-h, végén $t \cdot q - h \cdot q$, a második hónap elején $t \cdot q - h \cdot q - h$, a harmadik hónap elején $t \cdot q^2 - h \cdot q^2 - h \cdot q$ Ft lesz. Ez alapján a 96.-ik hónap elején $t \cdot q^{95} - h \cdot q^{95} - h \cdot q^{94} - \ldots - h \cdot q^2 - h \cdot q - h$ összeg lesz a számlán. A 96. hónap elején történik az utolsó pénzfelvétel, akkor kiürül a számla, tehát 0 Ft lesz rajta.

Így $t \cdot q^{95} - h \cdot q^{95} - h \cdot q^{94} - \ldots - h \cdot q^2 - h \cdot q - h = 0$. $t \cdot q^{95} = h \cdot q^{95} + h \cdot q^{94} + \ldots + h \cdot q^2 + h \cdot q + h$

$$t \cdot q^{95} = h \cdot \frac{q^{96} - 1}{q - 1}$$

$10M \cdot 1{,}004^{95} = h \cdot \frac{1{,}004^{96} - 1}{1{,}004 - 1}$. Ebből h ≈ 125.149 Ft, ennyit tud 8 éven keresztül havonta felvenni.

14.3.16. $5\text{M}\cdot 1{,}0035^{119} = \text{x}\cdot\dfrac{1{,}0035^{120}-1}{1{,}0035-1}$. Ebből x ≈ 50.921 Ft, ennyit tud 10 éven keresztül havonta felvenni.

14.3.17. $1\text{M}\cdot 1{,}003^{\text{n-1}} = 20.000\cdot\dfrac{1{,}003^{n}-1}{1{,}003-1}$. Ebből n ≈ 54(hónap), tehát 4 és fél éven keresztül tud havi 20.000 Ft-ot felvenni.

14.3.18. $3\text{M}\cdot 1{,}005^{59} = \text{x}\cdot\dfrac{1{,}005^{60}-1}{1{,}005-1}$. Ebből az x-el jelölt törlesztőrészlet 57.710 Ft.

14.3.19. $8\text{M}\cdot 1.006^{179} = \text{x}\cdot\dfrac{1{,}006^{180}-1}{1{,}006-1}$. Ebből az x-el jelölt törlesztőrészlet 72.370 Ft.

14.3.20. $12\text{M}\cdot 1{,}005^{\text{n-1}} = 75.000\cdot\dfrac{1{,}005^{n}-1}{1{,}005-1}$. Ebből n ≈ 319(hónap), tehát 26 év és 7 hónapig törlesztenek ilyen feltételek mellett.

14.4. Vegyes feladatok

14.4.1. Megoldandó a $\begin{cases}5q^2 = 5+3d\\ 5q^4 = 5+15d\end{cases}$ egyenletrendszer. Ebből d = 0, vagy d = 5. Első esetben q = ±1, második esetben q = ±2.

14.4.2. A számtani sorozat első három tagja legyen a-d, a, a+d. Ekkor a=16. A mértani sorozat tagjai 16-d, 18, 16+d+7. A mértani közép alapján $(16-\text{d})\cdot(23+\text{d})=18^2$. Ebből d = 4, vagy d = -11. Az első esetben a számtani sorozat tagjai 12, 16, 20, a mértani sorozat tagjai 12, 18, 27, így a hányados $\text{q}=\dfrac{3}{2}$. Az második esetben a számtani sorozat tagjai 27, 16, 5, a mértani sorozat tagjai 27, 18, 12, így a hányados $\text{q}=\dfrac{2}{3}$.

14.4.3. A növekvő számtani sorozat tagjai: -60, 20 és 100, a mértani sorozat tagjai: 4, 20, 100.

14.4.4. A számtani sorozat második tagja 8, differenciája 7 vagy -41

14.4.5. A számtani sorozat tagjai, 5, 10, 15. A mértanié 5, 10, 20. Legalább 11 tagot kell összeadni.

14.4.6. A hányados 2 vagy 0,5.

14.4.7. Két megoldás van, I. eset d = 3, a_1=4. II. eset: d = -27, a_1=34.

14.4.8. A hányados 1 vagy 2,5.

14.4.9. Megoldandó a $\begin{cases}(a-d+5)(a+d+9)=(a+6)^2\\(a+6)(a+2d+15)=(a+d+9)^2\end{cases}$ egyenletrendszer. Ebből d = 3 (ekkor a=6), vagy d = -3 (ekkor a = -6). Első esetben q=1,5, a második eset nem ad mértani sorozatot, így az nem megoldás.

14.4.10. Két megoldás van, I. eset d = 0, q = 1, a_1=5. II. eset: d = 2, q = 3, a_1=1.

14.4.11. Két megoldás van, I. eset d = 0, q = 1. II. eset: d = 2, q = 2.

14.4.12. Legyen az első tag x, a hányados q. Ekkor $x + x\cdot q + x\cdot q^2 = 104$. Ebből (1) $x\cdot(1 + q + q^2) = 112$. A számtani sorozat tagjai x, $x\cdot q$, $x\cdot q^2$-16. A számtani közép alapján $x\cdot q = \frac{x + x\cdot q^2 - 16}{2}$. Azaz $2x\cdot q = x + x\cdot q^2 - 16$. Ebből (2) $x\cdot(1 - 2q + q^2) = 16$. Mivel mértani sorozatból indultunk ki, egyik tag sem lehet nulla, a (1)-et osztva (2)-vel a következőt kapjuk:

$\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2} = 7$. Ebből q = 2 vagy q = 0,5. Visszahelyettesítve az első esetben a_1 = 16, ekkor a számtani sorozatban d = 16, második esetben a_1 = 64, ekkor a számtani sorozatban d = -32.

14.4.13. A számtani sorozat tagjai: 3, 12, 21 vagy 19, 12, 5.

14.4.14. a_1 = 4 és q = 3, vagy a_1 = 36 és q = 1/3.

14.4.15. a_1 = 2 és q = 7, vagy a_1 = 98 és q = 1/7.

14.4.16. a_1 = 3 és q = 4, vagy a_1 = 48 és q = 1/4.

14.4.17. a_1 = 2 és q = 3, vagy a_1 = 18 és q = 1/3.

14.4.18. $\frac{x}{q}\cdot x\cdot xq=216$ alapján x, azaz a mértani sorozat második tagja 6. A $\frac{6}{q},6,6q-3$ számok pedig számtani sorozatot alkotnak, ezután a számtani közép segítségével q = 2 vagy q = 0,5. Így a mértani sorozat tagjai: 3, 6, 12, vagy 12, 6, 3.

14.4.19. 3 megoldás van: I: 5, 5, 5 II. $5-5\sqrt{2},5,5+5\sqrt{2}$ III. $5+5\sqrt{2},5,5-5\sqrt{2}$

14.4.20. A négy szám: 1, 4, 16, 64.

14.4.21. Az öt szám legyen, x, y - d, y, y + d, y + 2d. Az összeg alapján, 4y + d=20. A szorzat alapján pedig $(y-d)\cdot(y+2d)=16$. Ebből az egyenletrendszerből y = 4, d = 2 vagy y = 6, d = -2. A mértani sorozat első tagja így az első esetben 1, a másodikban $\frac{32}{3}$, tehát az 5 szám az 1, 2, 4, 6, 8 vagy $\frac{32}{3}$, 8, 6, 4, 2.

14.4.22. A négy szám sorrendben legyen a, b-d, b, b+d. A feltételek alapján (1) a + b + d = 14, vagyis a = 14 – b – d, (2) b – d + b = 12. Vagyis (2) d = 2b – 12. (1)-be behelyettesítve a + b + 2b – 12 = 14, ebből a = 26 – 3b. Az első három számra vonatkozó mértani közép alapján $(b-d)^2=(26-3d)\cdot b$. Ebbe (2)-t behelyettesítve b = 8, vagy b = 4,5. Így a szóban forgó 4 szám: 2, 4, 8, 12 vagy 12,5; 7,5; 4,5; 1,5.

14.4.23. Az előző feladathoz hasonlóan a négy szám 0, 6, 12, 24, vagy -9, -3, 3, -3

14.4.24. A három szám 2, 8, 32.

14.4.25. A feltételek alapján a mértani sorozatban q = -1, illetve a számtani sorozatban d = -2/5. A mértani sorozat összege $S_n=1\cdot\frac{(-1)^n-1}{-1-1}$. Ez páros n esetén 0, páratlan n esetén 1. A számtani sorozat összege $S_n=\frac{2+(n-1)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)}{2}\cdot n=\frac{6}{5}n-\frac{1}{5}n^2$. Páros n esetén $\frac{6}{5}n-\frac{1}{5}n^2=0$, ekkor n = 0 (ez nem ad megoldást, mert nem pozitív), vagy n = 6. Páratlan n esetén $\frac{6}{5}n-\frac{1}{5}n^2=1$, ekkor n = 1, vagy n = 5. Tehát 3 db ilyen n van, 1 vagy 5 vagy a 6.

14.4.26. (1) $b_1 = 2a_1$, $c_1 = 4a_1$, (2) $q_b = q_a + 1$, $q_c = q_a + 2$. (3) $a_1 \cdot q_a + 2a_1 \cdot (q_a + 1) + 4a_1 \cdot (q_a + 2) = 24$. (4) $4a_1 + 4a_1 \cdot (q_a + 2) + 4a_1 \cdot (q_a + 2)^2 = 24$ (3) és (4) egyenletrendszerekből $q_a = 2$ vagy $q_a = -7/8$. Ez utóbbi nem megoldás, mert nem egészek a tagok ebben az esetben. $q_a = 2$-t behelyettesítve $a_1 = 1$. Így $b_1 = 2$, $c_1 = 4$.

15. Kombinatorika

15.1. Permutációk, variációk

15.1.1.

a. Ismétléses permutáció: 924

b. Fiúk, illetve lányok sorrendje 6!-6!, minden sorban két lehetőség van, FL, vagy LF, így a megoldás $(6!)^2 \cdot 2^6 = 33.177.600$

c. Fiúk, illetve lányok sorrendje 6!-6!, kezdődhet fiúval, vagy lánnyal, utána felváltva következnek, így a megoldás $(6!)^2 \cdot 2 = 1.036.800$

15.1.2.

a. Ismétléses permutáció. I. eset: 0-ra végződő: 210 db, 2-re végződő összesen 630, ebből elhagyjuk a 0-val kezdődőket – 90, így 540 db. A 4-re végződő hasonlóképpen 420 – 60 =360 db, tehát a megoldás: 1.110.

b. Csak 3-ra végződhet, összesen 420, 0-val kezdődő 60, így a megoldás 360 db.

15.1.3. 0-ra végződő 2.520, 5-re végződő összesen 2.520, de ebből 0-val kezdődik 280, így 2.240, így a megoldás 4.760

15.1.4.

a) 0-ra végződő $5! = 120$, 5-re végződő $4 \cdot 4! = 96$, így a megoldás: 216

b) Ha a végződés 04,20,40, akkor $4! = 24$, ha a végződés 12,24,32,52, akkor $3 \cdot 3! = 18$, így a megoldás $3 \cdot 24 + 4 \cdot 18 = 144$

15.1.5.

a) $5 \cdot 6^4 \cdot 2 = 12\,960$

b) A lehetséges végződések, 00,04,12,20,24,32,40,44,52. Minden esetben az első 3 szám $5 \cdot 6^2 = 180$ féleképpen lehet, így a megoldás 1 620.

15.1.6. A 3-mal oszthatóság miatt csak a hármas szerepelhet kétszer, a többi egyszer, így a megoldás ekkor ismétléses permutációval: 360.

15.1.7. A 3-mal oszthatóság miatt a nulla, vagy a hármas szerepelhet kétszer, a többi egyszer. I. eset: A 0 szerepel kétszer. Mivel párosnak is kell lennie, ezért 0,2,4-re végződhet. Ha 0-ra végződik, abból $5 \cdot 5! = 600$ van, ha 2 vagy 4-re végződik, akkor 6!/2! lenne, de ebből kivonjuk, amikor 0-val kezdődik (5!). Így az első eset lehetőségeinek a száma: $600 + 2 \cdot (6!/2! - 5!) = 1\,080$. II. eset: A 3-as szerepel kétszer. Ezen esetek száma 960. Így a megoldás: 2.040.

15.1.8.

a. I. eset: 6 db 6-os, egy ilyen szám van. II. eset: 5 db 5-ös és 1 db 1-es, 6 ilyen szám van. III. eset: 4 db 4-es, és 2 db 2-es, ebből $\binom{6}{4}$=15 db van. IV. eset: 3 db 3-as, 2 db 2-es, 1 db 1-es. Ebből $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2}$=60 db van, így a megoldás: 82.

b. Az előző feladathoz hasonló a megoldás, a helyes végeredmény: 169.

15.1.9. I. eset: 5 lány, vagy 5 fiú születik, ezen lehetőségek száma 2·5!=240. II. eset: 4 lány - 1 fiú itt 5 féleképpen lehet, hogy hányadik gyerek a fiú, $\binom{5}{4}$ féleképpen lehet a 4 lánynév, majd ezek sorrendje 4!, 5 féleképpen lehet a fiú neve, így ezen lehetőségek száma: 3.000. A 4 fiú – 1 lány ugyanennyi. 3 fiú és két lány 12.000, 3 lány két fiú ugyanennyi, így a megoldás: 30.240

15.1.10. 840

15.1.11.

a. 206

b. 212

c. 212

d. 191

15.1.12. k=0 vagy k=1, n eleme N

15.1.13. szürke

a. 6.666.600

b. 173.609.375

15.1.14.

a. 879.960

b. 36.110.000

15.1.15.

a. 24.917.760

b. 49.495.500

15.1.16. 792

15.1.17. 44

15.1.18. 4.096

15.1.19. 3.136

15.1.20. 4

15.1.21.

a. 11

b. 9

c. 4

15.1.22.

a. 4320

b. 720

c. 6720

15.1.23.

a. $k!\cdot(n-k+1)!$

b. $(n-k+1)!$

c. $n!:k!$

15.1.24.

a. 360

b. 2520

15.1.25.

a. 120

b. 23520

15.1.26. n=11

15.1.27. n=16

15.2. Kombinációk

15.2.1.

a. 2 vagy 10

b. 9 vagy 3

15.2.2.

a. 2 vagy 8

b. 7 vagy 3

15.2.3.

a. 8

b. 10

15.2.4.

a. 8

b. 7

15.2.5. 655

15.2.6. 32802

15.2.7. 18 csapat

15.2.8. I. Mind a 6 krémes 1 gyereké: 3 eset. II. Csak két gyerek kap krémest (ezt a két gyereket 3 féle képpen választhatjuk ki, a 6 krémes megoszlása lehet: 1,5 és 2,4 (és fordítva) illetve 3,3. Így ezen esetek száma 3*5=15 eset. III. Minden gyereknek jut a sütiből. A lehetséges eloszlások: 4,1,1 (3 eset), 3,2,1 (6 eset), 2,2,2 (1 eset). Ez összesen 10 eset. I+II+III=28.

15.2.9. A lehetséges megoszlások: I: 5+1+1+1. Ez 4 féleképpen lehet. II: 4+2+1+1. Ez 4!/2!=12 féleképpen lehet. III: 3+3+1+1. Ez 6 féleképpen lehet. IV. 3+2+2+1. Ez 12 esetben valósulhat meg. V. 2+2+2+2 egyféleképpen lehetséges. Így a megoldás: 35

15.2.10. Összesen $\binom{22}{11}$ =705.432 féleképpen választhatunk egy csapatot. Mivel a csapatok sorrendje lényegtelen, ennek a fele 352.716 az összes lehetőség két csapat kialakítására. Komplementer esemény: Ha az egyik csapatban csak felnőttek vannak, $\binom{14}{11}$ =364. Ezeket az eseteket elhagyva a lehetőségek száma: 352.352

15.2.11. Összesen $\binom{14}{7}$ =3432 féleképpen választhatunk egy csapatot. Mivel a csapatok sorrendje lényegtelen, ennek a fele, 1.716 az összes lehetőség két csapat kialakítására. Komplementer esemény: Ha az egyik csapatban csak felnőttek vannak, $\binom{10}{7}$ =120. Ezeket az eseteket elhagyva a lehetőségek száma: 1.596

15.2.12. 2 fehér

15.2.13. 3 makk

15.2.14. Komplementer esemény: egyik lány sem szerepel a vezetőségben: $\binom{10}{3}$. Összes lehetőség $\binom{12}{3}$. Így a megoldás: 100

15.2.15. Először rögzítjük az 5 sárga golyót. Ezután a 2 pirosat. I. eset: a 2 piros egymás mellett van, ez 6 lehetőség. Például: s s p p s s s. Minden ilyen esetben 5 pozícióban lehetséges fekete golyó, ezeket x jelöli: x s x s p p s x s x s x. Mivel a 4 fekete közül bármennyi lehet bármelyik x-el jelölt helyen, ezen lehetőségek száma $\binom{5+4-1}{4} = 70$. Így az I. eset 420 féleképpen valósulhat meg. II. eset: a 2 piros nincs egymás mellett, ekkor az 5 sárga által meghatározott6 lehetséges pozícióból kettőt kell kiválasztani a pirosoknak, ez $\binom{6}{2} = 15$ féleképpen valósulhat meg. Pl.: s p s s p s s. Ekkor 4 lehetséges helyen szerepelhet fekete, megint x-el jelölve pl.: x s p s x s p s x s x. Az I.-hez hasonlóan : $\binom{4+4-1}{4} = 35$. Így a II. eset 525 féleképpen lehetséges. Kizáró eseményekről van szó, így a megoldás 420 + 525 = 945.

15.2.16. 4410. A megoldás menete hasonló az előző feladathoz.

15.2.17.

a) 4 féleképpen lehetséges a 3 gyerek kiválasztása. Minden gyerek esetében 3 lehetőség van: csak kéket, csak pirosat, vagy mindkettőt felemeli. Így a lehetőségek száma 108.

b) Egy gyerek sem emel fel zászlót ez egyféleképpen történhet, 1 gyerek emel fel, ez 4*3=12 esetben lehetséges, Így ekkor 13 a megoldás.

c) Összes lehetőség: 256, mert minden gyerek esetében 4 lehetséges állapot van azzal együtt, hogy nem emel fel zászlót. Komplementer: egy gyerek sem emel fel zászlót, ez 1 eset. Így a megoldások száma: 255.

15.2.18.

a) Összes lehetőség: $\binom{32}{6} = 906192$. Komplementer: nincs piros: $\binom{24}{6} = 134596$. Így a megoldás: 771596

b) I. eset a kihúzottak között ott van a piros felső, ekkor a maradék lapok közül kell még 1 piros, 1 felső, és 3 egyéb lap: $\binom{7}{1}\binom{3}{1}\binom{21}{3} = 27\,930$. II. eset: a kihúzottak között nincs ott a piros felső: ekkor a maradék lapok közül kell még 2 piros, 2 felső, és 2 egyéb lap: $\binom{7}{2}\binom{3}{2}\binom{21}{2} =$ 13 230.. A megoldás: 41 160.

c) Az előzőhöz hasonlóan: 15 435

15.2.19. A megoldások menete hasonló az előző feladathoz.

a) 68 211

b) 1 552 320

c) 433 620

15.2.20.

a) Póker 13 féleképpen lehetséges: Négy kettes, négy 3-as,…., 4 ász. Az ötödik lap 48 féleképpen lehet. Így egy játékos kezében 624 féleképpen lehet póker.

b) 13 féleképpen lehet azt kiválasztani, hogy melyik lapból van 3 egyforma, utána a kiválasztott típusú lapból $\binom{4}{3}$ féleképpen azt, hogy melyik 3 szerepel a kézben. Utána 12 féleképpen lehet a két egyformát kiválasztani, itt ekkor $\binom{4}{2}$ féleképpen azt, hogy melyik 2 szerepel ezek közül a kézben. Így a lehetőségek száma: 3 744.

c) 4 féleképpen lehet kiválasztani azt, hogy melyik színből szerepel a színsor. Utána a sor kezdődhet 2-el (2,3,4,5,6), vagy 3-al, … vagy 9 –el (9,10,B,D,K,Á), ez 8 lehetőség. (10-el nem kezdődhet, mert az már royal flush). Így a lehetőségek száma: 32.

d) $\binom{13}{2}$ féleképpen tudjuk kiválasztani, hogy melyik kettő típusú lapból szerepelnek a párok. Mindkét pár esetében $\binom{4}{2}$ féleképpen lehetséges, hogy melyik két lap szerepel a párban. Az ötödik lap 52-8=44 féleképpen fordulhat elő. Így a megoldás: 1 584.

15.3. Binomiális-tétel, Pascal-háromszög

15.3.1.

a) p=7

b) p=11 vagy p=12

15.3.2.

7. sor: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

8. sor: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

9. sor: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1

15.3.3.

a) $625x^4+3000x^3y+5400x^2y^2+4320xy^3+1296y^4$

b) $243x^5-1620x^4y+4320x^3y^2-5760x^2y^3+3840xy^4-1024y^5$

15.3.4.

a) $4096x^{12}+12288x^{11}+15360x^{10}+10240x^9+3840x^8+768x^7+64x^6$

b) $243x^{15}-2430x^{14}+9720x^{13}-19440x^{12}+19440x^{11}-7776x^{10}$

15.3.5.

a) $x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 7x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 21x^3 + 35x^3 \cdot \sqrt[3]{x} + 35x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 21x^4 + 7x^4 \cdot \sqrt[3]{x} + x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$

b) $x^2 - 4x^3 + 6x^4 - 4x^5 + x^6$

15.3.6.

$\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} = \frac{(n-1)!}{m!\cdot(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!\cdot(n-1-m+1)!} = \frac{(n-1)!\cdot m+(n-1)!\cdot(n-m)}{m!\cdot(n-m)!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{m!\cdot(n-m)!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!} = \binom{n}{m}$

15.3.7. $S=\sum_{i=1}^{n} i\cdot\binom{n}{i}=1\cdot\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} + 3\cdot\binom{n}{3} + \cdots + (n-2)\cdot\binom{n}{n-2} + (n-1)\cdot\binom{n}{n-1} + n\cdot\binom{n}{n}$.

A binomiális együtthatók szimmetriája miatt:

$S=1\cdot\binom{n}{n-1} + 2\cdot\binom{n}{n-2} + 3\cdot\binom{n}{n-3} + \cdots + (n-1)\cdot\binom{n}{1} + n\cdot\binom{n}{0}$.

Összeadva: $2S=n\cdot\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right)=n\cdot 2^n$. Ebből pedig következik, hogy $S=n\cdot 2^{n-1}$

15.4. Skatulya-elv

15.4.1. A lehetséges kézfogásszámok:

I. eset, ha van olyan ember, aki senkivel sem fogott kezet: 0,1,2,…8. Olyan ember nem lehet, akinek kilenc kézfogása van, hiszen ő mindenkivel kezet fog akkor. II. eset: ha van olyan ember, aki mindenkivel kezet fogott, ilyenkor nincs olyan, aki senkivel: 1,2,…,9. Mindkét esetben kilenc lehetséges különböző kézfogásszám létezik. A 10 embert a 9 skatulyába csak úgy tudjuk elhelyezni, hogy legalább egy skatulyába, minimum 2 fő tartozik, tehát igaz az az állítás, biztosan van legalább két olyan ember, akinek ugyanannyi kézfogása volt.

15.4.2. Igaz. Indoklás az előző feladat alapján.

15.4.3. Az egyenletrendszer megoldása után: piros golyók száma 3, kékeké 4, zöldeké 5.

a) 11, mert legrosszabb esetben kivesszük a kilenc nem pirosat, az utána lévő kettő már csak piros lehet.

b) 6, mert legrosszabb esetben kivesszük az 5 zöldet, ekkor még nincs két különböző, de a hatodik golyó után már biztosan lesz.

c) 4, legrosszabb esetben kiveszünk 1-1 pirosat, kéket, zöldet, ekkor még nincs két egyforma, de a 4. golyó után már biztosan lesz.

d) 10, mert legrosszabb esetben kivesszük a kilenc nem pirosat, ekkor még nincs mindhárom színből, de a 10. golyó kihúzása után már biztosan meglesz.

15.4.4. Összesen 34 darab zokni van. Az egyenletrendszer megoldása után: a fehérek száma 8, a feketéké 14, zöldeké 12.

a) 29

b) 15

c) 10

d) 27.

15.4.5. $366 \cdot 7+1=2563$

15.4.6. Az éttermek száma 12, a cukrászdáké 7.

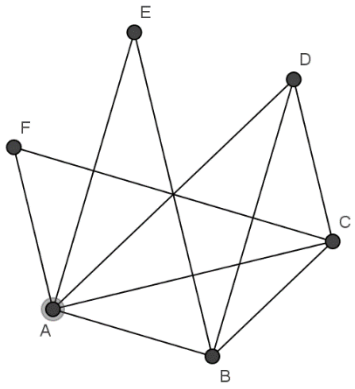
a) 13

b) 29

15.5. Gráfok

15.5.1.

a)



b) Összes lehetséges kézfogás 15, ebből megvalósult 10, így 5 van hátra

c) 66,67%

d) Nem, mert Andrásnak mindenkivel kezet kell fognia, így Bélának ha nem fog kezet Csabával, akkor még Danival, Endrével és Ferivel kell kezet fognia. Így Ferinek és Endrének az Andráséval együtt megvan a két kézfogása, Csaba már csak Danival tud kezet fogni, nem lehet meg a 4 kézfogása.

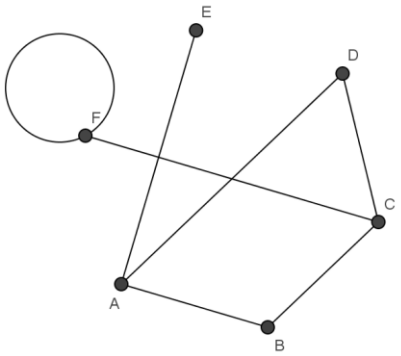
e) Nem, mert ha Andrással és egymással kezet fognak, akkor a többieknek már nem lehet meg az adott számú kézfogása.

15.5.2. Az egyes asztaloknál 5, 7 és 10 fő volt, így összesen 22 vendég volt az ünnepségen.

15.5.3. Az n csúcsú teljes gráf éleinek a száma $(n\cdot(n-1))/2$. Ha ebből 45 élt elhagyunk, n-1 – et kapunk (n csúcsú fagráf éleinek a száma). A megoldás: 11 csúcsa van a teljes gráfnak.

15.5.4. 35 csúcsa van a teljes gráfnak.

15.5.5. Összesen 8 lehetőség van. Például: Összefüggő és tartalmaz kört, de nem egyszerű:



15.5.6. I. eset: ha két csúcs van összekötve 3 éllel, és két izolált pont van. Ez esetben lehetséges. II. eset: két csúcs van összekötve két éllel, és van egy hurokél. Ez lehet a többszörös él egyik csúcsában, vagy a két másik csúcs (amelyeket nem köti össze a többszörös él) valamelyikében. Ez két eset így. III. eset: Van egy többszörös él, amelyik összeköt két csúcsot, és a másik két csúcs köti össze egy él, vagy ezek valamelyikét köti össze él egy a többszörös élhez kapcsolódó csúcsok valamelyikével. Ez így két lehetőség szintén. Így a megoldás 5.

15.5.7. 9

15.5.8. A fokszámok összege 30. Ha minden csúcsnak legfeljebb 4 a fokszáma, akkor a fokszámok összege legfeljebb 28 lehetne, így biztosan van olyan csúcs, melynek a fokszáma legalább 5.

15.5.9. A fokszámok összege 22. Ha minden csúcsnak legfeljebb 2 a fokszáma, akkor a fokszámok összege legfeljebb 20 lehetne, így biztosan van olyan csúcs, melynek a fokszáma legalább 3.

15.5.10. A kilenc pontú fa gráfban az élek száma 8, így a fokszámok összege 16. A megadott 8 csúcs fokszámainak összege 15, tehát a 9. csúcs fokszáma 1.

15.5.11. 1 és 2

15.5.12. Mivel a gráf egyszerű, a lehetséges fokszámok: I. esetben 1,2,…,8, mivel van 8 fokszámú csúcs, nem lehet 0 fokszámú. II. eset: 0,….,7, mivel van 0 fokszámú csúcs, nem lehet 8 fokszámú. Mindkét esetben a lehetséges fokszámok darabszáma 8, így nem lehet mind a 9 csúcs fokszáma különböző!

15.5.13. Mivel a gráf egyszerű, a lehetséges fokszámok: I. esetben 1,2,…,11, mivel van 11 fokszámú csúcs, nem lehet 0 fokszámú. II. eset: 0,….,10, mivel van 0 fokszámú csúcs, nem lehet 11 fokszámú. Mindkét esetben a lehetséges fokszámok darabszáma 11, így nem lehet mind a 12 csúcs fokszáma különböző!

15.5.14. Ha minden oktató 5 hallgatót ismer, az 50 ismeretség. Ha mind a 11 hallgató különböző számú oktatót ismer, az úgy lehetséges csak, hogy az 0,1,2,…,10 oktatót ismernek, ez 11 különböző ismeretségszám. Ezek összege 55, nem pedig 50. Így nem lehetséges, hogy minden oktató 5 hallgatót ismer!

15.6. Vegyes feladatok

15.6.1. Fekete ajtón 2 férfi+2 nő: $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 4!$ és a fehér ajtón a maradék 5 ember: 5!. Ez is összesen: 172 800. Így ez a megoldás is.

15.6.2.

a) A 8 oroszlán 9 lehetséges pozíciót határoz meg a tigrisek számára, ebből kell 4 et kiválasztani, majd az állatokat sorba rendezni: $\binom{9}{4} \cdot 8! \cdot 4!$=121 927 680.

b) A 8 oroszlán most 7 lehetséges pozíciót határoz meg a tigrisek számára, ebből kell 4 et kiválasztani, majd az állatokat sorba rendezni: $\binom{7}{4} \cdot 8! \cdot 4!$=33 868 800

15.6.3.

a) 8 467 200

b) 1 814 400

15.6.4. I. eset: 3 páratlan számjegy és egy páros. Ha a párossal kezdődik, akkor $4 \cdot 5^3$=500. Ha páratlannal kezdődik, akkor $5^4 \cdot \binom{3}{1} \cdot$=1 875, mert a maradék 3 helyből bármelyiken lehet páros, és minden helyre ekkor 5 számjegy jöhet szóba.. Az első esetben így 2 500 lehetőség van.

II. eset: 1 páratlan és 3 páros, ez az előzőhöz hasonlóan: $4 \cdot 5^3 \cdot \binom{3}{1} + 5^4 \cdot \binom{3}{1} = 3\,375$. Így összesen 5 875 a megoldás.

15.6.5. I. eset: 5 páros szám: 4·4!=96. II. eset: 3 páros és két páratlan. Ha a párossal kezdődik, akkor $4 \cdot \binom{4}{2}$ ·4. ·3·5·4. Ha páratlannal kezdődik, akkor $5 \cdot \binom{4}{1} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, így a II. eset 6 960 féleképpen valósulhat meg. A III.eset: 1 páros és 4 páratlan. Ha a párossal kezdődik, akkor 4··5·4·3·2. Ha páratlannal kezdődik, akkor $5 \cdot \binom{4}{1} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, így a III. eset 2 880 féleképpen valósulhat meg. Több eset nincs, így a megoldás: 9 936

15.6.6. Mivel 57el kezdődik, 5 szabad hely marad, ebből pontosan kettőben van 4-es, ez $\binom{5}{2}$-féleképpen lehetséges. 3 szabad hely marad ezután, melyek mindegyikére igaz, hogy 0, és több 4-es már nem lehet, így 8 szám marad, ezekre már nincs semmilyen megkötés, így a lehetőségek száma: $10 \cdot 8^3 = 5\,120$.

15.6.7.

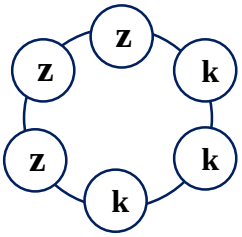
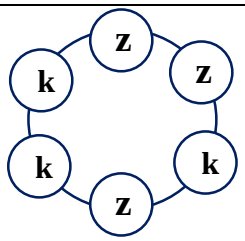
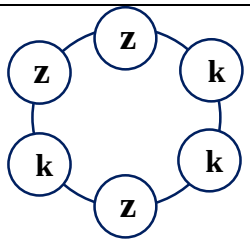
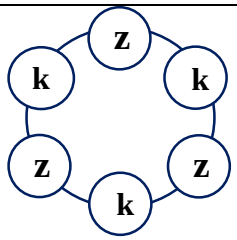
a) $8^{18} = 1{,}8 \cdot 10^{16}$, mert a 11 kezdőjátékos közül 3-an nem rúghattak, így mind a 18 rúgásra 8 ember jöhetett szóba,

b) $\binom{8 + 18 - 1}{18} = 480\,700$

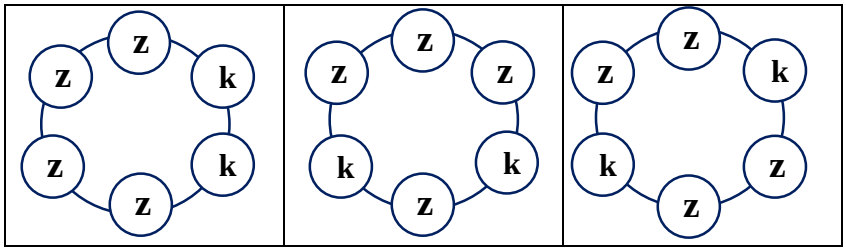
15.6.8. I. eset: 5 győzelem 2 vereség, ez $\binom{7}{2} = 21$ féleképpen valósulhat meg. II. eset: 4 győzelem, 2 döntetlen, 1 vereség, ez $\binom{7}{4}\binom{3}{2} = 105$ esetben lehet. III. eset: 3 győzelem 4 döntetlen, ekkor a lehetséges esetek száma: $\binom{7}{3} = 35$. Így a megoldás: 161.

15.6.9. Az előző feladathoz hasonló módon: 70+560+28=658 féleképpen.

15.6.10. Ciklikus permutációról van szó, különböző esetekkel. 4 különböző elrendezés lehet:

I. eset	II. eset	III. eset	IV. eset
			

15.6.11.



I. eset: 6 zöld pólós vagy 6 kék pólós gyerek, két lehetőség.

II. eset: 5 zöld és egy kék, illetve 5 kék és egy zöld, szintén 1-1 lehetőség.

III. eset: 4 zöld és 2 kék, illetve 2 zöld és 4 kék, 3-3 lehetőség

IV. eset: 3 zöld és 3 kék, az előző feladat alapján 4 lehetőség.

Így a szóba jöhető esetek száma: 14

15.6.12. Egy szín felhasználása esetén 4 lehetőségünk van. Két szín felhasználása esetén: Először válasszuk ki, melyik ez a két szín. Ez $\binom{4}{2}$=6 féleképpen lehet. Legyen például kék és zöld. Ezután tekintsük az oldallapokat:I. eset: 5 kék, illetve 5 zöld lap: 1-1 eset. II. eset: 4 kék, 1 zöld, illetve 4 zöld 1 kék, ezek a ciklikusság miatt szintén 1-1 lehetőség. III. eset: 3 kék, 2 zöld, illetve 3 zöld és 2 kék, ebből 2-2 lehetőség van. Így az oldallapokat tekintve 8 lehetőség van a két szín felhasználásával. Az alaplap kétféle színű lehet, így ha két színt használunk, abból 6 2 8=96 különböző lehetőség van. Így a megoldás az egyszínűekkel együtt összesen 100.

15.6.13. Az összes lehetséges különböző szelvények száma: 8·7·6 = 336 db. A versenyen indulókat jelöljük, A,B,C,D,E,F,G,H-val. Legyen a befutó A,B,C, ezt biztosan tudjuk. Telitalálatos, azaz az első 3 helyezettet eltaláló szelvény egy darab. (ABC) Pontosan két találatos szelvények számát a következő módon határozhatjuk meg: Három féleképpen választható ki az, hogy melyik kettő dobogóst találjuk el. Legyen pl. AB*, ahol a * nem lehet C, csak D,E,F,G,H. Így a pontosan két találatos szelvények száma: 3·5=15 darab. Az egytalálatos szelvények közül, háromféleképpen választhatjuk ki, hogy melyiket találjuk el. Legyen például az A. Mivel a második helyezett nem lehet B, és a harmadik nem lehet C, így

ezt az eshetőséget tovább kell bontanunk. Legyen az I. esetben az, amikor C a 2. helyezett. Ekkor a 3. helyen szóba jöhet, B, D,E,F,G,H, azaz 6 ilyen eset van. A II. eset ekkor, hogy a 2. helyezett nem C, ekkor lehet: D,E,F,G,H , legyen ezek közül pl, a D. Ekkor a harmadik lehet: B,E,F,G,H. Így ezen esetek száma: 25. Így, a pontosan egytalálatosak száma: 3·(6+25)=93. Tehát a legalább egytalálatosak száma: 1+15+93=109.

15.6.14. A hat főből 15 féleképpen tudjuk a páros játszma 4 résztvevőjét kiválasztani. Ezután az egyiket bárhol rögzíthetjük, hiszen a térfelek, és azok részei sincsenek megkülönböztetve. A rögzített játékos párját a maradék 3 emberből háromféleképpen tudjuk kiválasztani, ezek után az ellenfélpár már adott, így a megoldás: 45.

15.6.15. 420

15.6.16.

a) $3^4=81$

b) I. eset 2 db 1-est, és 2 db 2-est dobunk, ez $\binom{4}{2}=6$ féleképpen lehet. II. eset: 1 db 3-ast, és 3 db 1-est dobunk, ez $\binom{4}{1}=4$ féleképpen lehet. Így a megoldás 10.

15.6.17. a) $4^4=256$

b) I. eset 2 db 6-ost, és 2 db 0-t dobunk, ez $\binom{4}{2}=6$ féleképpen lehet. II. eset: 1-1 db 6-ost, 4-est, 2-est és 0-t dobunk, ez 4!=24 féleképpen lehet. III: eset: 1 db 6-ost, és 3 db 2-est dobunk, ez $\binom{4}{1}=4$ féleképpen lehet. IV. eset 2 db 4-est, és 2 db 2-est dobunk, ez $\binom{4}{2}=6$ féleképpen lehet. V: eset: 1 db 0-t, és 3 db 4-est dobunk, ez $\binom{4}{1}=4$ féleképpen lehet. Így a megoldás 44.

15.6.18. A dolgozatok őszpontszáma: 600 pont. Először kiválasztjuk a maximális pontszámúakat, ezt $\binom{12}{4}$ féleképpen tehetjük. Ekkor a maradék összpont 400. Ezután kiválasztjuk a 30, illetve 32 pontosakat: ezt $\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}$ féleképpen tehetjük. Marad két diák, az ő pontszámuk összege: 70. Ez úgy valósulhat meg, hogy 31+39, 33+37, 34+36 (ezek 2-2 esetben lehetnek), és 35-35, ez egy eset, így az pontszámeloszlásuk 7 –féle lehet. Így a megoldás: 1 940 400.

15.6.19.

a) Ismétléses permutáció vagy kiválasztás: 60 lehetőség.

b) I. eset: 3 egyforma golyó, ez három féleképpen lehet. II. eset: Egyikből kettő van, egy másikból egy, ez 6 féleképpen lehet, a golyókat sorba rendezve 18 lehetőség van ebben az esetben. III. eset. 3 különböző golyó, ez hat féleképpen lehetséges. Így a megoldás: 27.

15.6.20.

a) A 3 lány mindegyike 7 hely közül, a 4 fiú mindegyike 6 hely közül választhat, így a lehetőségek száma: $7^3 \cdot 6^4 = 444\,528$.

b) A három lány: $\binom{3}{2} \cdot 7^2$, a 4 fiú : $\binom{4}{2} \cdot 6^3$-féleképpen helyezkedhet el a feltételeknek megfelelően, így a megoldás: 190 512

15.6.21.

a) Például: I. csoport: ide csak az 1. II. csoport: 2,3 III. csoport: 4,5,6,7

b) A hat számot 6! féleképpen tudjuk sorba rendezni, ebből az első 3 szám az egyik, a második három szám a másik számhármas. Mivel a két számhármas sorrendje nem lényeges, a megoldás: 360.

15.6.22.

a) Például: I. csoport: ide csak az 1. II. csoport: 2,3, III. csoport: 4,5,6,7, IV. csoport: 8,9,10

b) A nyolc számot 8! féleképpen tudjuk sorba rendezni, ebből az első 4 szám az egyik, a második négy szám a másik számnégyes. Mivel a két számhármas sorrendje nem lényeges, a megoldás: 20 160.

15.6.23.

a) Háromszögek száma: Először az első egyenesen választunk ki kettő t, majd a másodikon 1 pontot, ez

$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1}$lehetőség, majd fordítva, ez $\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2}$esetben lehet, így ekkor a lehetséges háromszögek száma: 115. A négyszögek száma $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{2} = 150$.

b) Ha a két egyenesnek van metszéspontja, és ez a háromszög egyik csúcsa, akkor mindkét egyenesről már csak 1-1 pont kell, ilyen háromszögből $4 \cdot 5 = 20$ db van. Ha a metszéspont nem csúcs, akkor $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2} = 70$ lehetőség van, tehát a b) esetben a háromszögek száma: 90. Négyszög ebben az esetben pedig nem lehetséges!

15.6.24.

a) Összes lehetőség: mivel minden oldal háromféle színű lehet: 3^5. Kedvezőtlen, ha minden oldal zöld, ez egy esetben lehetséges. Így a megoldás 242.

b) Az előző rész tartalmazza azokat az eseteket, amikor szerepel piros és kék, piros – de kék nem, kék – de piros nem, Így ha az utóbbiakat kivonjuk belőle, megkapjuk az eredményt. Ha piros szerepel, de kék nem: I. eset: pontosan 1 piros van: Az 5 oldal közül bármelyik lehet, de a maradék 4 oldal már csak zöld, így ez 5 esetben lehetséges. II. eset: pontosan 2 oldal piros, ez 10 féleképpen lehetséges, a maradék két oldal megint csak zöld lehet. III. eset: pontosan 3 oldal piros, ez megint 10 féleképen lehet. IV. eset: pontosan 4 oldal piros, ez 5 féleképpen lehet. V. eset: minden oldal piros, ez egyféleképpen lehet. Így, amikor van piros, de kék nincs, 31 esetben lehetséges. Amikor kék van, de piros nincs, szintén ugyanennyi. Így a megoldás: $242-2\cdot31=180$.

15.6.25.

a) Összes lehetőség: $6\cdot5\cdot4\cdot3$. Kedvezőtlen, amikor csak 4 szín szerepel: $4\cdot3\cdot2\cdot1$. Így a megoldás: 336.

b) Van piros, de nincs kék eseteinek a száma: $4\cdot4\cdot3\cdot2$, mert a piros 4 helyen szerepelhet, utána a következő oldalra 4 szín marad, majd 3 és 2. A van kék, de nincs piros ugyanennyi, így ekkor a megoldás: $336-2\cdot.4\cdot4\cdot3\cdot2=144$

16.Valószínűségszámítás

16.1. Klasszikus modell

Ebben a részfejezetben minden elemei esemény előfordulásának valószínűsége megegyezik, így alkalmazhatjuk a valószínűségszámítás klasszikus modelljét, azaz:

$P(A)=\frac{\textit{kedvező esetekszáma}}{\textit{összes}\text{ eset száma}}$, a továbbiakban $P(A)=\frac{k}{\ddot{o}}$

16.1.1. Kedvező esetek száma 5, (2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4). Az összes lehetőség 62=36, így a keresett valószínűség:

$$P(A)=\frac{k}{\ddot{o}}=\frac{5}{36}$$

16.1.2. Az előzőhöz hasonlóan,

$$P(A)=\frac{k}{\ddot{o}}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

16.1.3. A komplementer esemény, a dobott számok összege legalább 11, ennek valószínűsége az előzőkhez hasonlóan,

$P(\overline{A})=\frac{k}{\ddot{o}}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$, így $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{11}{12}$

16.1.4. Az előzőhöz hasonlóan,

$$P(A)=\frac{k}{\ddot{o}}=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$$

16.1.5. A komplementer esemény, a dobott számok összege legfeljebb 5, ennek valószínűsége az előzőkhez hasonlóan,

$P(\overline{A})=\frac{k}{\ddot{o}}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$, így $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{103}{108}$

16.1.6.

a) Ez úgy következhet be, hogy az első két dobás nem 6-s (5·5=25 féleképpen), és a 3. dobás 6-os (egy féleképpen), tehát a kedvező esetek száma 25·1=25, az összes lehetőség pedig 6^3=216. Így a keresett valószínűség: $P(A)=\frac{k}{\ddot{o}}=\frac{25}{216}$

b) A komplementer esemény, hogy egyszer vagy kétszer dobunk. Az első dobás csak 6-os lehet, ennek valószínűsége $\frac{1}{6}$, vagy kétszer dobunk azaz első dobás nem hatos, és a 2. dobás hatos. Ennek valószínűsége $\frac{5}{36}$. Mivel ezek kizáró események, ezért a komplementer esemény valószínűsége $\frac{11}{36}$. Így a keresett esemény valószínűsége: $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{25}{36}$

c) Egyszer, vagy kétszer, vagy háromszor dobunk. Kizáró események, így a valószínűség: $P(A)=\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{91}{216}$

16.1.7. :,

a) $P(A)=\frac{5^4\cdot 1}{6^5}=\frac{625}{7776}$

b) $P(A)=\frac{5^4\cdot 1}{6^5}=\frac{625}{7776}$

16.1.8. Egy kettesnek vagy négyesnek vagy hatosnak, és egy ötösnek lenni kell a dobott számok között, így a kedvező lehetőségek száma $3\cdot 2!=6$. Az összes lehetőség pedig $6^2=36$

Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

16.1.9. Egy kettesnek vagy négyesnek vagy hatosnak, és egy ötösnek lenni kell a dobott számok között. Ha a harmadik szám nem ezek közül kerül ki, akkor az 2 féle lehet, így ezt a három számot sorba is kell rendezni, ebből így van $2\cdot 3!\cdot 3=36$ lehetőség. Azért vesszük a háromszorosát, hogy az ötös mellett melyik szám van a 2,4,6 közül. Ha a harmadik szám a kettes, akkor 3 féleképpen lehet őket sorba rendezni (2-2-5, 2-5-2, 5-2-2), ugyanígy három lehetőség van, ha a harmadik szám az ötös, négyes, vagy hatos. A kedvező esetek száma ezek alapján $36+3\cdot 4=48$. Az összes lehetőség pedig $6^3=216$.

Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{48}{216}=\frac{2}{9}$

16.1.10. A kedvező esetek száma 1, Az összes lehetőség pedig az A betük ismétlődése miatt $\frac{7!}{2!}=2520$. Így a keresett valószínűség: $P(A)=\frac{1}{2520}$

16.1.11.

a) A második húzás 4 féle lehet, mivel 4 király van. A másik három húzás már 31·30·29 féleképpen lehetséges. Az összes lehetőség: 32·31·30·29. Így a keresett valószínűség:

$$P(A)=\frac{4\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}=\frac{1}{8}$$

b) Az előzőhöz hasonlóan, $P(A)=\frac{4\cdot 30\cdot 29\cdot 3}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}=\frac{3}{248}$

16.1.12. a) Az előzőhöz hasonlóan $P(A)=\frac{8\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}=\frac{1}{4}$

b) Az előzőhöz hasonlóan, $P(A)=\frac{8\cdot 7\cdot 30\cdot 29\cdot 28}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28}=\frac{7}{124}$

16.1.13. Két eset lehetséges: Egy színből 3 db, és a maradék három színből 1 – 1 db, vagy két színből 2 – 2 db, és a maradék két színből 1 – 1 db.

Így a kedvező lehetőségek száma: $\binom{4}{1}\binom{8}{3}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}+\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1}=415744$.

$$P=\frac{\binom{4}{1}\binom{8}{3}\binom{8}{1}\binom{8}{1}\binom{8}{1}+\binom{4}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{2}\binom{8}{1}\binom{8}{1}}{\binom{32}{6}}=\frac{415744}{906192}=\underline{\underline{0,4588}}.$$

16.1.14. $P=\frac{4!\cdot 29!}{32!}=0,0008.$

16.1.15. P(legfeljebb 3 ász lesz) = 1 – P(4 ász lesz) = $1-\frac{\binom{4}{4}\cdot\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}=0,9974$.

16.1.16. Az összes kimenetelek száma : 6^7, kedvező kimenetelek száma: 3 helyen lehet 1-es, a maradék négy hely mindegyikére 5-féle szám jöhet, 5^4, ezt még meg kell szorozni annyival ahány féleképpen előfordulhat 3 helyen az 1 szám, azaz hányféleképpen tudunk 7

helyből 3-at kiválasztani? $\Rightarrow \binom{7}{3}$.

$$P(A)=\frac{5^4\cdot\binom{7}{3}}{6^7}=0{,}078$$

16.1.17. $P(A)=\dfrac{4^3\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}}{6^6}=0{,}0823$

16.1.18. P(van két azonos betű) = 1 – P(nincs két azonos betű) = $1-\frac{2}{2^{10}}=0{,}998.$

16.1.19. A lehetséges összegek: 15, ennek valószínűsége $P(A_1)=\frac{1}{8}$, 14, ennek valószínűsége, $P(A_2)=\frac{3}{8}$, 13, ennek valószínűsége, $P(A_3)=\frac{3}{8}$, 12, ennek valószínűsége, $P(A_4)=\frac{1}{8}$.

16.1.20. A lehetséges összegek: 24, ennek valószínűsége $P(A_1)=\frac{1}{16}$, 23, ennek valószínűsége, $P(A_2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, 22, ennek valószínűsége, $P(A_3)=\frac{\binom{4}{2}}{16}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$, 21, ennek valószínűsége, $P(A_4)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$, 20, ennek valószínűsége, $P(A_5)=\frac{1}{16}$

16.1.21. Legyen a fehér golyók száma: x, a zöldeké: y.

A piros vagy fehér golyó választásának valószínűsége: $\mathrm{P(pvf)}=\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\frac{12+\mathrm{x}}{12+\mathrm{x}+\mathrm{y}}=\frac{2}{3}$

A fehér vagy zöld golyó választásának valószínűsége: $\mathrm{P(pvz)}=\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}=\frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{12+\mathrm{x}+\mathrm{y}}=\frac{3}{5}$

Ilye módon egy két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszerhez jutunk, annak a megoldását keressük. Az elsőből kifejezzük x-t:

$$\frac{12+x}{12+x+y}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3\cdot(12+x)=2\cdot(12+x+y)\Rightarrow 36+3x=24+2x+2y$$
$$\Rightarrow x=2y-12$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítjük:

$$\frac{x+y}{12+x+y}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{2y-12+y}{12+2y-12+y}=\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{3y-12}{3y}=\frac{3}{5}\Rightarrow 5\cdot(3y-12)=9y$$

$$\Rightarrow 15y-60=9y\Rightarrow 6y=60\Rightarrow y=10 \quad \text{és} \quad x=2\cdot 10-12=8$$

Tehát 8 fehér és 10 zöld golyó van a dobozban.

16.1.22. Az előző alapján 9 fehér és 6 zöld golyó van a dobozban.

16.1.23. Az előző alapján 5 fehér és 4 fekete golyó van a dobozban.

16.1.24. Komplementer esemény, n-szer feldobva a két kockát, nincs közöttük 6-os: 5^{2n}. Az összes lehetőség 6^{2n}. A kedvező esetek száma: 6^{2n}-5^{2n}.

$$P(A)=\frac{kedvező}{összes}=\frac{36^n-25^n}{36^n}=1-\left(\frac{25}{36}\right)^n>0{,}9$$

$$\Rightarrow 0{,}1>\left(\frac{25}{36}\right)^n\Rightarrow \ln 0{,}1>n\cdot\ln\frac{25}{36}\Rightarrow\frac{\ln 0{,}1}{\ln\frac{25}{36}}<n\Rightarrow 6{,}3<n$$

Azaz 7 vagy annál több dobás esetén lesz a két kockán 0,9-nél nagyobb valószínűséggel 6-os.

16.1.25. Az előző feladat alapján: n > 4,82. Azaz 5 vagy annál több dobás esetén lesz a két kockán 0,98-nál nagyobb valószínűséggel 5 vagy 6-os.

16.1.26. a) I. megoldás: A többi 25 embert berendezzük 25! féleképpen, és utána beszúrjuk a két testvért közéjük, a két testvér lehetséges pozíciói: 1 és 12, 2 és 13, ..., 16 és 27. Ez 16 lehetőség. Így a 25!·16-ot megszorozzuk még kettővel, mert a két testvér lehetséges sorrendjei. Tehát szerintem a kedvező lehetőségek száma 25!·2·16, így a keresett valószínűség: 0,04558

II. megoldás: Kiválasztjuk azt a 10-et, aki a két testvér között áll, és sorba rendezzük. Ezután ezt megszorozzuk kettővel, hogy melyik testvér melyik szélén áll. Ezt a 12 embert "összeragasztva" egy sorba rendezendő a maradék 15 ember mellé, azaz 16 elemet kell még sorba rendezni. Így ekkor a kedvező esetek száma $\binom{25}{10}\cdot 10!\cdot 2\cdot 16!$. Ezt ha elosztom az összes lehetőséggel, ugyanúgy 0,04558 a keresett valószínűség.

b) Mivel egy embert rögzíteni kell a ciklikusság miatt, mind az összes, mind a kedvező esetnél, így 27-ed részét vesszük mindkettőnek, a keresett valószínűség nem változik. P(B) = 0,04558

16.1.27. Két eset lehetséges: A piros ász vagy a 4 választott között van, vagy nincs közöttük.

Így $$P=\frac{\binom{1}{1}\binom{21}{3}+\binom{3}{1}\binom{7}{1}\binom{21}{2}}{\binom{32}{4}}=0{,}1596.$$

16.2. Mintavétel visszatevéssel és visszatevés nélkül

16.2.1. A dominókészlet 55 db-os, ebből 10 db van, aminek mindkét térfelén ugyanannyi pöttyszám van, illetve $\binom{10}{2}=45$ db olyan van, amelynek a térfelein különböző a pöttyszám. Az összeilleszthetőség kétféleképpen valósulhat meg. I. amikor az egyik dominó ugyanolyan pöttyszámú mindkét térfélen, például (0,0), és ehhez 9 másik dominó illeszthető (0,1)….(0,9), ez 9 db. Így ezen lehetőségek száma: 10 ·9=90. II. Amikor mindkét dominó mindkét térfelén különbözőek a pöttyszámok. Az első kiválasztott dominó bármelyik lehet a 45 ilyen dominóból, legyen például a (0,1). Kizárva most az egyenlő pöttyszámú dominókat az illeszthető dominón vagy 0 kell, hogy legyen (0,2)….(0,9), vagy 1-es: (1,2)…..(1,9). Ez 45·16 lehetőség, de minden esetet kétszer tartalmaz, mert ha elsőre az (1,2)-t választjuk, akkor másodjára lehet a (0,1). Így a kedvező esetek száma 90 + $\frac{45\cdot 16}{2}$= 450. Az összes lehetőség $\binom{55}{2}$=1485. Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{450}{1485}=\frac{10}{33}$

16.2.2. A keresett valószínűség:

$$P(A)=\frac{9\cdot 8+\frac{36\cdot 14}{2}}{\binom{45}{2}}=\frac{18}{55}$$

16.2.3. a) Az összes lehetőség 2^8=256. Ebből $\binom{8}{4}$=70 esetben lesz 4 fej, és 4 írás. Marad 186 eset, amikor különböző a fejek és írások száma. Szimmetria miatt 93 esetben lesz több írás. Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{93}{256}$.

b) A fejek és írások számának különbsége nagyobb, mint kettő, ha 8 fej, vagy 7 fej és 1 írás, vagy 6 fej és 2 írás. Ezek száma sorrendben $\binom{8}{8}$, $\binom{8}{7}$, $\binom{8}{6}$. Ezek összege 37. Szimmetria miatt az is jó, ha az írások száma nagyobb legalább hárommal, mint a fejek száma, ezért a kedvező lehetőségek száma: 74. Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{74}{256}$.

16.2.4. a) Mivel 7 érmét dobunk fel, ugyanakkora annak a valószínűsége, hogy több fej van, mint annak, hogy több írás. Így a keresett valószínűség P(A)=0.5.

b) $P(A)=\frac{\binom{7}{7}+\binom{7}{6}+\binom{7}{5}}{128}=\frac{29}{128}$

16.2.5.

A: lesz férges a választottak között, $\overline{A}$: nem lesz férges a választottak között.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}}=0{,}4162.$$

16.2.6. a) Az összes lehetőség $\binom{7}{3}$=35. Kedvező ha fehér marad utoljára, tehát 3 fehér és a három fekete lett kihúzva az első hat húzás alkalmával, ez $\binom{6}{3}$ féleképpen valósulhat meg. Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{\binom{6}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{7}$. b) A feltételeknek az felel meg, ha egyszer sem (I), vagy egyszer húzunk fehéret (II). Az összes lehetőség 7^7, mert mind a hét húzás alkalmával a visszatevés miatt mind a hét golyót kihúzhatjuk. Kedvező, (I): 3^7, (II), $4\cdot 3^6$, de ez utóbbit még 7-el meg kell szorozni, aszerint, hogy hányadik dobás a fehér. Így a keresett valószínűség

$$P(A)=\frac{3^7+4\cdot 3^6\cdot 7}{7^7}=0{,}0274$$

16.2.7. a) P(A)=0,5. b) $P(A)=\frac{3^6+3\cdot 3^5\cdot\binom{6}{1}+3^2\cdot 3^4\cdot\binom{6}{2}}{6^6}=0{,}34375$

16.2.8.

a) $P(A)=\dfrac{\binom{8}{6}}{\binom{20}{6}}=\dfrac{7}{9690}\approx 0{,}00072$

b) $P(B)=\dfrac{\binom{8}{3}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{20}{6}}=\dfrac{308}{969}\approx 0{,}3179$

c) $P(C)=\dfrac{\binom{8}{1}\cdot\binom{12}{5}+\binom{12}{6}}{\binom{20}{6}}=\dfrac{121}{646}\approx 0{,}1873$

d) $P(D)=1-\dfrac{\binom{8}{5}\cdot\binom{12}{1}+\binom{8}{6}}{\binom{20}{6}}=\dfrac{1902}{1938}\approx 0{,}9819$

16.2.9. a) A szorzat osztható hárommal, ha a kihúzott számok között legalább 1 osztható hárommal, azaz a 3,6,9,12 szerepel a kihúzott számok között. Így komplementer eseménnyel érdemes dolgozni: a kihúzott három szám között egyik sincs a fentiek közül. Így a keresett valószínűség: $P(A)=1-\dfrac{\binom{10}{3}}{\binom{14}{3}}\approx 0{,}6703$

b) Az összeg osztható hárommal, ha I. mindhárom szám ugyanazt az osztási maradékot adja hárommal, vagy II. mindhárom kiválasztott szám különböző osztási maradékot ad. Osztási maradékok szerint csoportosítva a számokat: 0 maradék - 3,6,9,12 – 4db, 1 maradék – 1,4,7,10,13 - 5db, 2 maradék – 2,5,8,11,14 – 5db. Így a kedvező esetek száma az I. esetben $\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{5}{3}$, a II. esetben $4\cdot 5\cdot 5$, Így a keresett valószínűség: $P(B)=\dfrac{\binom{4}{3}+2\cdot\binom{5}{3}+4\cdot 5^2}{\binom{14}{3}}$

$\approx 0{,}3407$

16.2.10. Az előző feladat alapján a) P(A) ≈ 0,6765 b) P(B) ≈ 0,338

16.2.11.

a) $P(A)=\dfrac{\binom{6}{3}\cdot\binom{14}{4}}{\binom{20}{7}}\approx 0{,}2583$

b) $P(B)=\dfrac{\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{20}{7}}\approx 0{,}1219$

c) $P(C)=\dfrac{\binom{5}{1}\cdot\binom{15}{6}+\binom{15}{7}}{\binom{20}{7}}\approx 0{,}4058$

d) $P(D)=1-\dfrac{\binom{14}{7}}{\binom{20}{7}}\approx 0{,}9557$

16.2.12. Egy üzemben naponta 120 terméket állítanak elő, amiből átlagosan 5% selejt. Egyik nap kiválasztunk 8-at az aznap legyártott termékek közül, úgy hogy a kiválasztottakat nem tesszük vissza. Adjuk meg a következő események valószínűségét! A kiválasztottak között:

a) $P(A)=\dfrac{\binom{114}{8}}{\binom{120}{8}}\approx 0{,}655$

b) $P(B)=1-\dfrac{\binom{114}{8}+\binom{114}{7}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{120}{8}}\approx 0{,}0512$

16.2.13.

a) $P(A)=\binom{10}{3}\cdot 0.02^3\cdot 0.98^7\approx 0{,}00083$

b) $P(B)=0{,}98^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}02^1\cdot 0{,}98^9+\binom{10}{2}\cdot 0{,}02^2\cdot 0{,}98^8\approx 0{,}9991$

C) $P(C)=1-\left(0{,}98^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}02^1\cdot 0{,}98^9\right)\approx 0{,}0162$

16.2.14. A komplementer esemény az, hogy nincs selejtes termék, azaz mind jó. Ennek valószínűsége: 0,59874. $P(\overline{A})=x^{10}$=0,59874. Ebből x=0,95. Tehát 95%-a valószínűsége, hogy egy kiválasztott termék jó, így a selejtes termék kiválasztásának valószínűsége 5%.

16.2.15. Az előző feladat alapján a selejtes termék kiválasztásának valószínűsége 3%.

16.2.16. Annak a valószínűsége, hogy egy terméket kiválasztunk, és az jó: 0,96. Annak a valószínűsége, hogy minden kiválasztott termék jó: 0,7214. $0{,}96^x$=0,7214. Ebből $x=\frac{\lg 0{,}7214}{\lg 0{,}96}$

Így a kiválasztott termékek száma 8.

16.2.17. Az előző feladat alapján a kiválasztott termékek száma 12.

16.2.18. a) Komplementer eseménnyel dolgozunk, amely szerint mind a 3 golyó piros, vagy mind a 3 kék. Így a keresett valószínűség: $P(A)=1-\frac{\binom{6}{4}+\binom{5}{4}}{\binom{11}{4}}\approx 0{,}0606$

b) Binomiális eloszlással dolgozunk. A piros húzásának valószínűsége $p=\frac{6}{11}$, a kék húzásának valószínűsége $1-p=\frac{5}{11}$, így a keresett valószínűség $P(B)=\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{6}{11}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{11}\right)^2\approx 0{,}3688$?

16.3.Geometriai valószínűség

16.3.1. $P(A)=\frac{t}{T}=\frac{400-25\pi}{400}\approx 0{,}0837$

16.3.2.

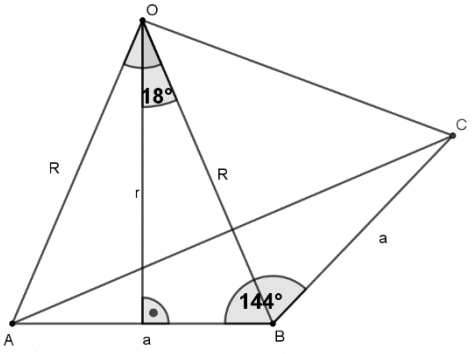
a) $P(A)=\frac{t}{T}=\frac{9\pi}{625}\approx 0{,}04524$

b) $P(A)=\frac{t}{T}=\frac{36\pi-25\pi}{625}\approx 0{,}05529$

c) $P(A)=\frac{t}{T}=\frac{625-100\pi}{625}\approx 0{,}04524$

16.3.3. A sugarak: $\sqrt{0{,}1}$; $\sqrt{0{,}2}$; $\cdots$; $\sqrt{0{,}9}$; 1

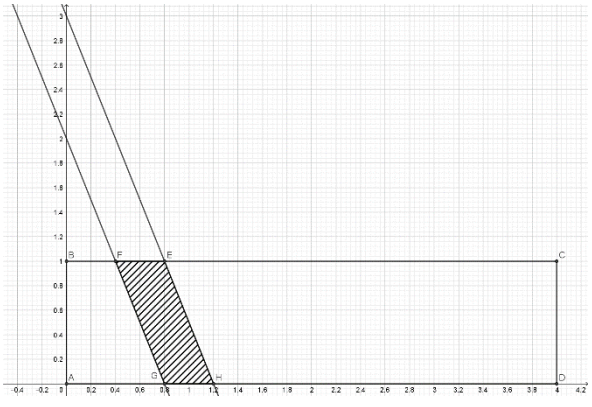
16.3.4. Az ábrán a sokszög főátlói által meghatározott egyenlő szárú háromszögek közül látható két szomszédos. Legyen a sokszög középpontja O. Ekkor a beírt kör sugarából, és az AOB $\angle$ =36° segítségével a köré írt kör sugara $R=\frac{5}{\cos 18°}$, így a sokszög területe



$T=10\cdot\frac{R^2\sin 36°}{2}=\frac{125\cdot\sin 36°}{\cos^2 18°}$. A sokszög oldala $a=2\cdot r\cdot tg18°=10\cdot tg18°$, egy belső szöge 144°, így az ABC háromszög területe $t=\frac{a^2\sin 144°}{2}=50\cdot tg^2 18°\cdot\sin 144°$. Így a keresett valószínűség $P(A)=\frac{t}{T}=\frac{50\cdot tg^2 18°\cdot\sin 144°}{\frac{125\cdot\sin 36°}{\cos^2 18°}}\approx 0{,}0382$

16.3.5. Az előző feladat alapján a megoldás P(A) ≈ 0,0586

16.3.6. Ábrázoljuk a téglalap csúcsait, illetve az egyeneseket, $y=2-\frac{5}{2}x$ és $y=3-\frac{5}{2}x$. A téglalap oldalegyenesei az x=0, x=4, y=0, y=1 egyenesek. Ezekből a metszéspontok: $E\left(\frac{4}{5},1\right)$, $F\left(\frac{2}{5},1\right)$, $E\left(\frac{4}{5},0\right)$, $G\left(\frac{4}{5},1\right)$, $H\left(\frac{6}{5},1\right)$. A téglalap területe 4 területegység, az ABFG trapéz területe $t_1=\frac{\frac{4}{5}+\frac{2}{5}}{2}\cdot 1=\frac{3}{5}$, az EHDC trapéz területe $t_1=\frac{\frac{16}{5}+\frac{14}{5}}{2}\cdot 1=\frac{15}{5}=3$.



Így az FGHE négyszög területe: $T = 4 - \left(\frac{3}{5} + 3\right) = \frac{2}{5}$. Így a keresett valószínűség

$$P(A) = \frac{T_{FGHE}}{T_{ABCD}} = \frac{\frac{2}{5}}{4} = \frac{1}{10}$$

16.3.7. Az előző feladat alapján:

a) $P(A) = \frac{\frac{1}{5}}{2} = \frac{1}{10}$

b) $P(A) = \frac{\frac{6}{5}}{2} = \frac{3}{5}$

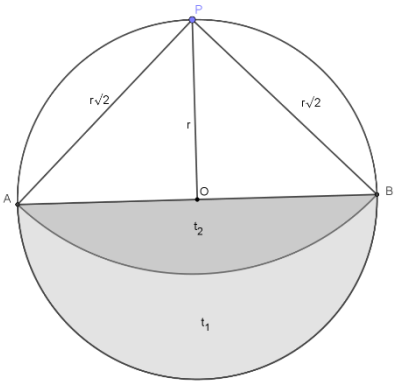
c) $P(A) = 1 - \frac{\frac{1}{5} + \frac{6}{5}}{2} = \frac{3}{10}$

16.3.8. $P(A) = \frac{t}{T} = \frac{2^2\pi - 1^2\pi}{2^2\pi} = 0{,}75$

16.3.9. $P(A) = \frac{t}{T} = \frac{3^2\pi}{4^2\pi} = 0{,}5625$

16.3.10. A 3-nak r sugarú környezete $2r$ hosszú. Annak valószínűsége, hogy ebbe a környezetbe esik a P pont: $P(A) = \frac{2r}{7}$ A feltétel szerint: $\frac{2r}{7} = \frac{1}{5}$. Ebből: $r = \frac{7}{10}$.

16.3.11. A mellékelt ábra alapján a P ponttól $r\sqrt{2}$ távolságra lévő pontok a P középpontú $r\sqrt{2}$ sugarú köríven helyezkednek el. Így a kedvező terület a világosszürkével jelölt „holdacska” melynek területét (t_2) megkapjuk, ha az O középpontú r sugarú félkör területéből kivonjuk a sötétszürkével jelölt körszelet (t_1) területét. Ez utóbbi pedig megvan, ha a P középpontú $r\sqrt{2}$ sugarú negyed körcikk területéből kivonjuk az ABP háromszög területét.



$$t_2 = \frac{\left(r\sqrt{2}\right)^2\pi}{4} - \frac{\left(r\sqrt{2}\right)^2}{2} = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right),\ t_1 = \frac{r^2\pi}{2} - r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = r^2.$$

Így $P(A)=\frac{t_1}{T}=\frac{r^2}{r^2\pi}=\frac{1}{\pi}$

16.3.12. Az egységnyi szakaszon kijelölt pontok távolsága az egyik végponttól legyen x és y. A két pont jelölése az egységnyi négyzet (x,y) pontjának véletlenszerű kiválasztásával ekvivalens. A négyzet területe: $T = 1$.

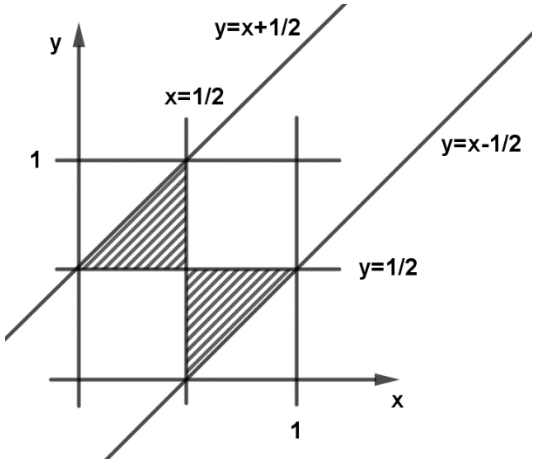
A három szakaszból akkor szerkeszthető háromszög, ha bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál. Két eset lehetséges:

1. Ha $x < y$, akkor a három szakasz: $x, y - x, 1 - y$. Ezekre kell, hogy teljesüljön a háromszög egyenlőtlenség:

$$1 - x > x, vagyis\ x < \frac{1}{2}$$

$$x + 1 - y > y - x, vagyis\ y < x + \frac{1}{2}$$

$$y > 1 - y, vagyis\ y > \frac{1}{2}$$



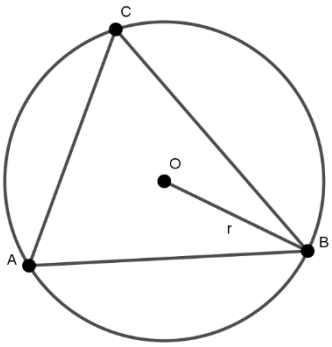
2. Ha $y < x$, akkor az előző esethez hasonló egyenlőtlenségeket kapunk, csak az x és y felcserélődnek. Tehát:

$y < \frac{1}{2}, y > x - \frac{1}{2}, x > \frac{1}{2}$

A feltételeknek megfelelő pontok a vonalkázott területre esnek, melynek a területe: $t = \frac{1}{4}$. Vagyis: $P = \frac{t}{T} = \frac{1}{4}$ a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen választott szakaszokból háromszög szerkeszthető.

16.3.13. Az *AB* ív hossza legyen *x*, az *AC* ív pedig *y*. Az *x* és *y* a $(0, 2r\pi)$ intervallumba eső számok. Ezeknek feleltessük meg a sík $2r\pi$ oldalú négyzetének *(x, y)* koordinátájú pontjait.

A háromszög akkor hegyesszögű, ha a háromszög szögeihez tartozó kerületi szögek körívei a félkörtől kisebbek. Két eset lehetséges:



1. Ha $x < y$, akkor az alábbi egyenlőtlenségeknek kell teljesülni:

A *C* csúcshoz tartozó *x* körívre: $x < r\pi$

Az *A* csúcshoz tartozó $y - x$ körívre: $y - x < r\pi$, azaz : $y < x + r\pi$

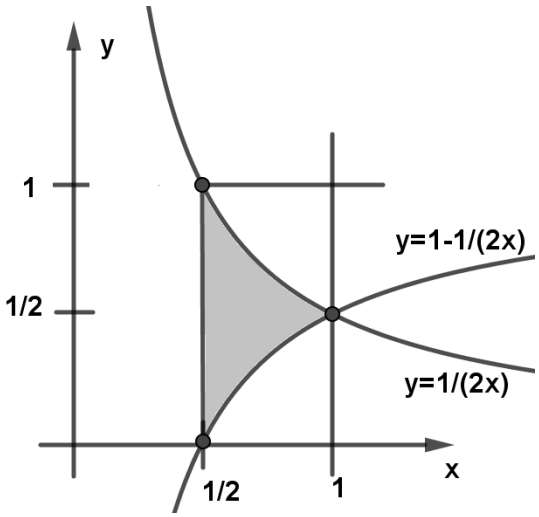
A *B* csúcshoz tartozó $2r\pi - y$ körívre: $2r\pi - y < r\pi$, azaz: $y > r\pi$

2. Ha $y < x$, akkor az előző esethez hasonló egyenlőtlenségeket kapunk, csak az x és y felcserélődnek.

A két esetnek megfelelő pontok a $2r\pi$ oldalú négyzetben vannak. Hasonlósági transzformációval ezt átvihetjük az egységnyi négyzetbe. Az előző feladat megoldása alapján:

$t = \frac{1}{4}$ és $T = 1$ miatt: $P = \frac{t}{T} = \frac{1}{4}$.

16.3.14. Legyen az első pont után létrejövő nagyobbik szakasz *x* hosszúságú. Ekkor $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ teljesül. A második pont felvétele után az egyik végponttól mért távolság legyen *xy*. Ekkor $0 \leq y \leq 1$ teljesül. A kapott *x* és *y* értékeknek feleltessük meg a sík (*x*,*y*) koordinátájú pontjait. Ezek a pontok egy téglalapra esnek, melynek területe: $T = \frac{1}{2}$. A három szakaszból akkor szerkeszthető háromszög, ha a hosszabb szakasz részei sem nagyobbak $\frac{1}{2}$-nél. Ekkor:$x - \frac{1}{2} \leq xy \leq \frac{1}{2}$



Ezt *x*-szel osztva:

$$1 - \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{2x}$$

Az egyenlőtlenségeknek megfelelő pontok a vonalkázott területre esnek, amelynek a területe:

$$t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = [lnx - x] = 0 - 1 - ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = ln2 - \frac{1}{2}$$

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{ln2 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2ln2 - 1$$

16.3.15. Legyen a három szakasz *x*,*y*,*z*. Ennek a számhármasnak megfeleltethető a térben egy *d* élű kocka egy (*x*,*y*,*z*) pontja. Ennek a kockának a térfogat: $V = d^3$. A kérdezett valószínűség akkor nem következik be, ha a koordináták között az alábbi összefüggések valamelyike teljesül:

$$x + y < z;\ \ y + z < x;\ \ x + z < y$$

Ezek egy-egy tetraéder pontjait adják, amelyek a d élű kocka egy-egy síkkal történő metszésével keletkeznek. A tetraéderek három, egy csúcsból induló, egymásra merőleges éle d hosszúságú. Ezért a térfogatuk egyenként: $V = \frac{d^3}{6}$. Ha a három tetraédert a kockából elvesszük, akkor a megmaradó test pontjaiban teljesülnek a feladat feltételei. A maradék test térfogata:

$$v = d^3 - 3 \cdot \frac{d^3}{6} = \frac{d^3}{2}$$

Ezért a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{v}{V} = \frac{\frac{d^3}{2}}{d^3} = \frac{1}{2}$$

16.3.16.

Legyenek a téglatest élei *x,y,z*. A szakaszok véletlenszerű kiválasztásának a (0,1) intervallumban megfeleltethető az egységnyi kocka (*x,y,z*) pontjának véletlen választása. A kockának a kérdésnek megfelelő pontjaira az alábbi összefüggésnek kell teljesülnie:

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

Tehát a kockának az origó középpontú, egységnyi sugarú gömbbe eső pontjai felelnek meg a feltételnek. Ezek egy nyolcad gömbben helyezkednek el, melynek a térfogata:

$$v = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Tehát a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{v}{V} = \frac{\frac{\pi}{6}}{1} = \frac{\pi}{6}$$

16.3.17.

Legyen C a vizsgált esemény! A meghibásodás valószínűsége arányos a szakasz hosszával, vagyis:

$$\frac{P(C)}{P(\bar{C})} = \frac{450 - 180}{180}$$

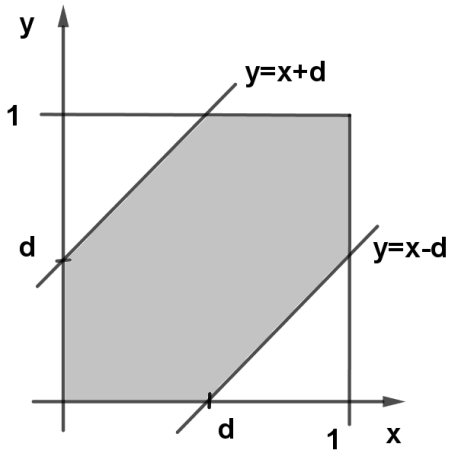
A $P(C) + P(\bar{C}) = 1$ miatt:

$$P(C) = \big(1 - P(C)\big) \cdot \frac{270}{180} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot P(C)$$

$\frac{5}{2} \cdot P(C) = \frac{3}{2}$, azaz $P(C) = \frac{3}{5}$.

16.3.18.

A pontok távolsága a szakasz egyik végpontjától legyen *x* és *y*. A két pont felvétele ekvivalens azzal, hogy a sík egységnégyzetének egyik (*x*,*y*) pontját választjuk.



A négyzet területe: $T = 1$. A kérdésben szereplő esemény akkor teljesül, ha $|y - x| < d$. Ennek az egyenlőtlenségnek megfelelnek az egységnégyzetnek az $y = x + d$ *és* $y = x - d$ egyenesek közötti vonalkázott rész pontjai. A vonalkázott rész területe:

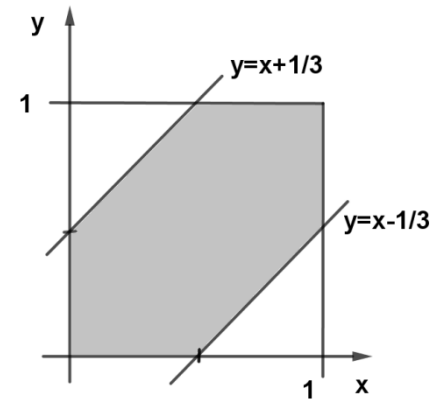
$$t = 1 - (1 - d)^2 = d(2 - d)$$

Ezért a kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = d(2 - d)$$

16.3.19.

Érkezzen az első személy *x*, a második *y* perccel 9 óra után. Ezeknek feleljen meg a sík egységnégyzetének (*x*,*y*) koordinátájú pontja.



A négyzet területe: $T = 1$. A kérdésben szereplő esemény akkor teljesül, ha $|y - x| \leq \frac{1}{3}$. Ebből két összefüggésnek kell teljesülnie:

$$y \geq x - \frac{1}{3} \text{ és } y \leq x + \frac{1}{3}$$

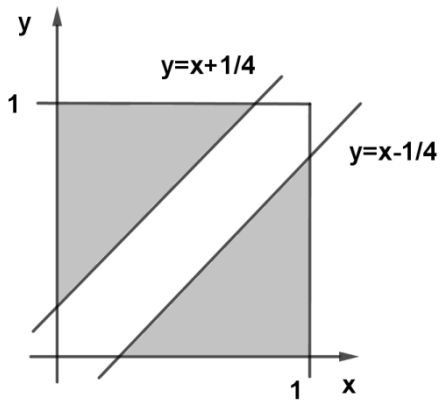
Az egyenlőtlenségeknek megfelelő pontok a vonalkázott területre esnek, melynek a területe:

$$t = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{5}{9}$$

16.3.20. Érkezzen az első személy *x*, a második *y* perccel 9 óra után. Ezeknek feleljen meg a sík egységnégyzetének (*x*,*y*) koordinátájú pontja.



A négyzet területe: $T = 1$. A kérdésben szereplő esemény akkor teljesül, ha: $|y - x| > \frac{1}{4}$

Ebből két összefüggésnek kell teljesülnie:

$$y > x + \frac{1}{4} \text{ és } y < x - \frac{1}{4}$$

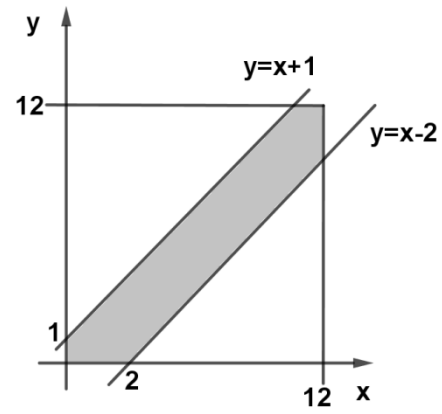
Az egyenlőtlenségeknek megfelelő pontok a vonalkázott területre esnek, melynek a területe:

$$t = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{9}{16}$$

16.3.21. A 12 órás időtartam kezdetétől az 1 órás rakodási idejű hajó érkezéséig eltelt idő legyen *x*, a 2 órásé *y*. Ezeknek feleljen meg a sík 12 egységnyi négyzetének (*x*,*y*) koordinátájú pontjai.



A négyzet területe: $T = 12^2 = 144$ egység. Két eset lehetséges:

1. Ha $x < y$, akkor $y - x < 1$, azaz $y < x + 1$.

2. Ha $x > y$, akkor $x - y < 2$, azaz $y > x - 2$.

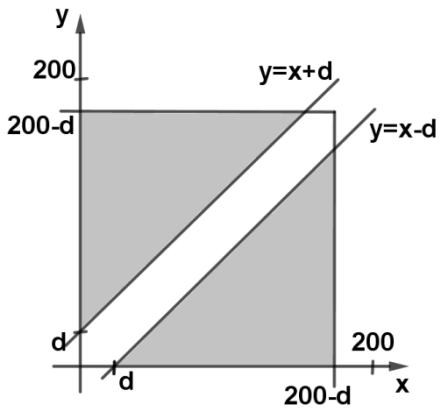
A két esetnek megfelelő pontok a vonalkázott területre esnek. Ez a terület:

$$t = 144 - \left(\frac{10^2}{2} + \frac{11^2}{2}\right) = 33{,}5$$

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{33{,}5}{144} = 0{,}23$$

16.3.22. A keresett hosszúság legyen *d*. A *d* hosszúságú szakasz kezdőpontja a kábel elejétől legyen *x* méter, a másikon *y* méter. E két szakasznak megfeleltethetjük a (*200-d*) oldalú négyzet (*x*,*y*) koordinátájú pontjait.



Ekkor a négyzet területe: $T = (200 - d)^2$. A kívánt esemény csak akkor teljesül, ha: $d < 100$, illetve $|x - y| > d$. Ez két esetben lehetséges:

1. $x - y > d$, vagyis $y < x - d$.

2. $x - y < -d$, vagyis $y > x + d$.

Ezen feltételnek megfelelő pontok a vonalkázott részben vannak, melynek területe:

$t = (200 - 2d)^2$. A keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{(200 - 2d)^2}{(200 - d)^2} = \frac{1}{2}$$

Mindkét oldalból vonjunk négyzetgyököt:

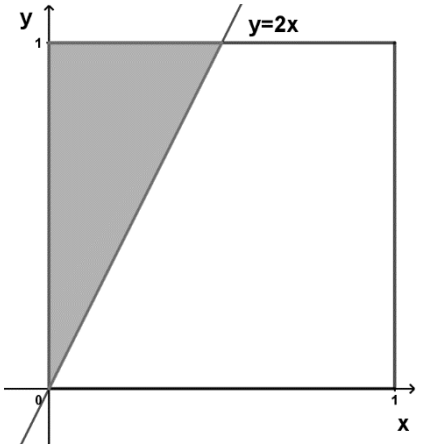
$$\frac{200 - 2d}{200 - d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Rendezzük és oldjuk meg az egyenletet. Ekkor:

$$d = 200 \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2} - 1} \approx 45$$

Tehát közelítőleg 45 méteres szakaszokat kell kijelölni.

16.3.23. Az *n* hosszúságú szakasznak feleljen meg a (0,1) intervallum, a *P* végpontnak pedig az origó. A *Q* és *R* pontnak a (0,1) intervallum *x* és *y* koordinátájú pontja úgy, hogy a távolságok aránya nem változik. Mivel az *x* és *y* megválasztása véletlenszerű, ezért a sík egységnégyzetének egy (*x*,*y*) pontját adják.



A négyzet területe: $T = 1$. A kérdésben szereplő esemény akkor teljesül, ha:

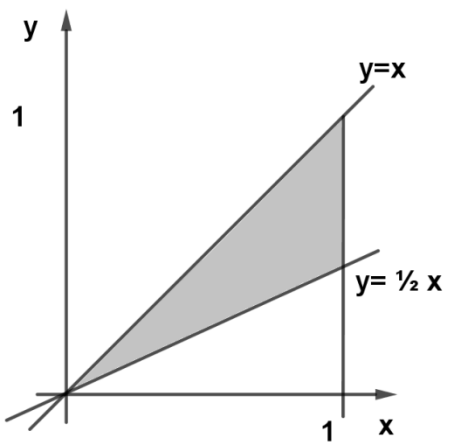
$x < y - x$, vagyis $2x < y$. Ennek az egyenlőtlenségnek megfelel az ábrán látható vonalkázott rész területe, vagyis $t = \frac{1}{4}$.

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{1}{4}$$

16.3.24. Jelöljük *y*-nal a 0 ponthoz közelebb eső pont koordinátáját, és *x*-szel a távolabbiét. Ekkor teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$0 \leq y \leq x \leq 1 \qquad (1)$$



A két pont közelebb van egymáshoz, mint a 0-hoz az *y* koordinátájú pont, ha $x - y < y$, vagyis $x < 2y$. Ha az (*x*,*y*) számpárnak megfeleltetjük a sík pontjait, akkor az (1) egyenlőtlenségek egy háromszöget határoznak meg.

Ebben a kedvező eseteket azok a pontok adják, melyekre $x < 2y$. Ezeknek az ábrán látható vonalkázott rész felel meg. Ezért a keresett valószínűség: $P = \frac{t}{T} = \frac{1}{2}$

16.3.25. A pontoknak az egyik végponttól mért távolsága legyen *x* és *y*. Ha az (*x*,*y*) számpárnak megfeleltetjük a sík pontjait, akkor az egységnégyzet pontjait kapjuk, melynek területe: $T = 1$. Az esemény két esetben teljesül:

1. Ha $x < y$, akkor:

$y - x < x$, vagyis $y < 2x$

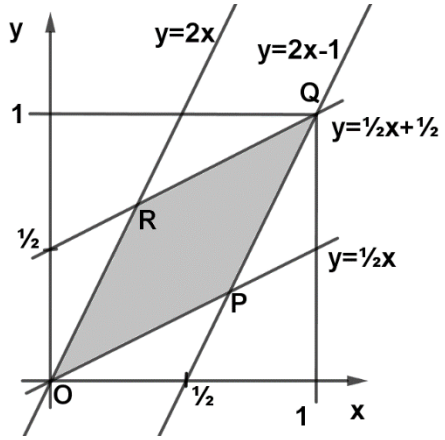
$y - x < 1 - y$, vagyis $y < \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

2. Ha $x > y$, akkor:

$y - x < y$, vagyis $y > \frac{x}{2}$

$y - x < 1 - x$, vagyis $y > 2x - 1$

A kedvező eseteknek az alábbi ábrán látható vonalkázott rész területe felel meg:



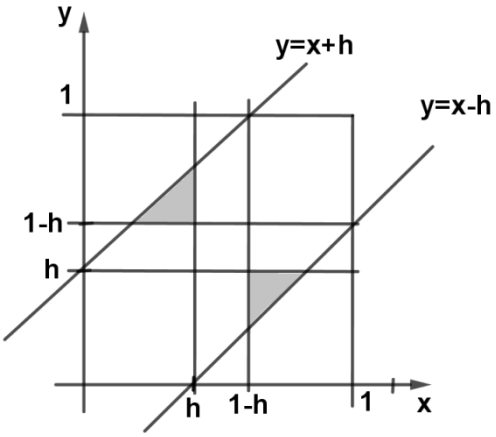
Számítsuk ki az *OPQR* rombusz területét! Ez az átlók szorzatának a felével egyenlő, vagyis:

$$t = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \frac{1}{3}$$

16.3.26. A pontoknak az egyik végponttól mért távolsága legyen *x* és *y*. Ha az (*x*,*y*) számpárnak megfeleltetjük a sík pontjait, akkor az egységnégyzet pontjait kapjuk, melynek területe: $T = 1$. Az esemény két esetben teljesül:



1. Ha $x < y$, akkor:

$x < h$ *és* $y - x < h$, vagyis $y < x + h$

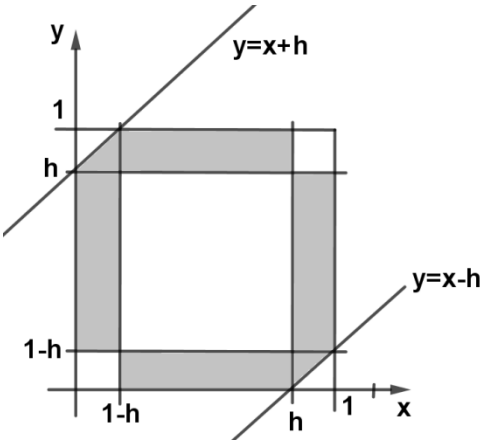
$1 - y < h$, vagyis $y > 1 - h$

2. Ha $x > y$, akkor:

$y < h$ *és* $x - y < h$, vagyis $y > x - h$

$1 - x < h$, vagyis $x > 1 - h$

Mindkét esetben további két részt különböztethetünk meg a *h* értéke alapján:



a, Ha $\frac{1}{3} \le h \le \frac{1}{2}$, akkor az alábbi ábrán látható vonalkázott rész a kedvező eset Ennek területe:

$$t = (3h - 1)^2$$

b, Ha $\frac{1}{2} \le h \le 1$, akkor az alábbi ábrán látható vonalkázott rész a kedvező eset Ennek területe:

$$t = 1 - 3(1 - h)^2$$

Ezért a keresett valószínűség:

$$P = \frac{t}{T} = \begin{cases} (3h-1)^2, & ha\ \frac{1}{3} \le h \le \frac{1}{2} \\ 1 - 3(1-h)^2, & ha\ \frac{1}{2} \le h \le 1 \end{cases}$$

16.4. Feltételes valószínűség

16.4.1. A: Van hatos dobás. B: Nincs két egyforma dobás.

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}, \qquad P(AB) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}.$$

Így $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 0{,}5.$

16.4.2. A lehetséges esetek: ll, lf, fl, ff .

A: Van lány a családban. B: Fiú is van a családban.

$$P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

16.4.3. A: az egyik kockán 6-os van. B: a dobott számok összege 12.

Az összes esetek száma: 6^3.

A B esemény a következő esetekben következik be:

A dobások eredménye:		darabszám:	
	1, 5, 6		3! = 6
	2, 4, 6		3! = 6
	2, 5, 5		$\frac{3!}{2!}=3$
	3, 3, 6		$\frac{3!}{2!}=3$
	3, 4, 5		3! = 6
	4, 4, 4		1

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{15}{6^3}}{\frac{25}{6^3}}=\frac{15}{25}=0{,}6$$

.

16.4.4. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$. Mivel $P(A+B)\le 1$, ezért

$P(A)+P(B)-P(A\cdot B)\le 1$, vagyis $P(A\cdot B)\ge P(A)+P(B)-1=0{,}7+0{,}8-1=0{,}5$. Így

$$P(A|B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}\ge\frac{0{,}5}{0{,}8}=0{,}625.$$

16.4.5. Először vizsgáljuk meg a fehér golyó húzásának valószínűségét!

$$P(B)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{33}{60}=\frac{11}{20}.$$

A hatodik dobozból való fehér golyó húzásának valószínűsége: $P(A\cdot B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$.

Így a keresett valószínűség: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{11}{20}}=\frac{40}{165}=\frac{8}{33}$

16.4.6. a) Először vizsgáljuk meg a fehér golyó húzásának valószínűségét!

$P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{71}{100}$. Az ötödik dobozból való fehér golyó húzásának valószínűsége: $P(A\cdot B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$. Így a keresett valószínűség:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{71}{100}}=\frac{50}{213}$$

b) Először vizsgáljuk meg a fekete golyó húzásának valószínűségét!

$P(B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}=\frac{29}{100}$. Az első dobozból való fekete golyó húzásának valószínűsége: $P(A\cdot B)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$. Így a keresett valószínűség:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{29}{100}}=\frac{10}{29}$$

16.4.7. a) Először vizsgáljuk meg a beteg kiválasztásának valószínűségét!

$P(B)=0{,}2\cdot0{,}85+0{,}8\cdot0{,}04=0{,}202$. Annak valószínűsége, hogy dohányos beteget választunk ki: $P(A\cdot B)=0{,}2\cdot0{,}85=0{,}17$. Így a keresett valószínűség: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0{,}17}{0{,}202}=0{,}8416$

b) Először vizsgáljuk meg az egészséges ember kiválasztásának valószínűségét! $P(B)=0{,}2\cdot0{,}15+0{,}8\cdot0{,}96=0{,}798$. Annak valószínűsége, hogy egészséges nem dohányzót választunk ki: $P(A\cdot B)=0{,}8\cdot0{,}96=0{,}768$. Így a keresett valószínűség: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0{,}768}{0{,}798}=0{,}9624$

16.4.8.

a) Az előző feladat alapján a keresett valószínűség: 0,00476

b) Az előző feladat alapján a keresett valószínűség: 0,9

16.4.9. A keresett valószínűség: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}}=\frac{9}{11}$

16.4.10. A keresett valószínűség: $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

16.5. Valószínűségi változó, eloszlás, várható érték

16.5.1. Az eloszlás:

$P(\xi=1)=\frac{1}{6};P(\xi=2)=\frac{1}{6};P(\xi=3)=\frac{1}{6};P(\xi=4)=\frac{1}{6};P(\xi=5)=\frac{1}{6};P(\xi=6)=\frac{1}{6};$ A várható érték: $M(\xi)=\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{6}\cdot2+\frac{1}{6}\cdot3+\frac{1}{6}\cdot4+\frac{1}{6}\cdot5+\frac{1}{6}\cdot6=\frac{7}{2}$.

16.5.2. Az eloszlás:

$P(\xi=2)=\frac{1}{36};P(\xi=3)=\frac{2}{36};P(\xi=4)=\frac{3}{36};P(\xi=5)=\frac{4}{36};P(\xi=6)=\frac{5}{36};$

$P(\xi=7)=\frac{6}{36};P(\xi=8)=\frac{5}{36};P(\xi=9)=\frac{4}{36};P(\xi=10)=\frac{3}{36};P(\xi=11)=\frac{2}{36};P(\xi=12)=\frac{1}{36};$

A várható érték:

$M(\xi)=\frac{1}{36}\cdot2+\frac{2}{36}\cdot3+\frac{3}{36}\cdot4+\frac{4}{36}\cdot5+\frac{5}{36}\cdot6+\frac{6}{36}\cdot7+\frac{5}{36}\cdot8+\frac{4}{36}\cdot9+\frac{3}{36}\cdot10+\frac{2}{36}\cdot11+\frac{2}{36}\cdot12=\frac{22}{3}$

16.5.3. Az eloszlás: $P(\xi=1)=\frac{1}{6};P(\xi=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};P(\xi=3)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};$ A várható érték:

$M(\xi)=\frac{1}{6}\cdot1+\frac{1}{3}\cdot2+\frac{1}{2}\cdot3=\frac{7}{3}$

16.5.4. Az eloszlás:

$$P(\xi=0)=\frac{\binom{12}{0}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{20}{4}}=\frac{14}{969};P(\xi=1)=\frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{8}{3}}{\binom{20}{4}}=\frac{224}{1615};P(\xi=2)=\frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{20}{4}}=\frac{616}{1615};$$

$P(\xi=3)=\frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{20}{4}}=\frac{352}{969}$; $P(\xi=4)=\frac{\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{0}}{\binom{20}{4}}=\frac{33}{323}$. A várható érték:

$$M(\xi)=\frac{14}{969}\cdot 0+\frac{224}{1615}\cdot 1+\frac{616}{1615}\cdot 2+\frac{352}{969}\cdot 3+\frac{33}{323}\cdot 4=2{,}4.$$

16.5.5. Az eloszlás:

$$P(\xi=0)=\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{6};P(\xi=1)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{2};P(\xi=2)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{10};$$

$P(\xi=3)=\frac{\binom{4}{3}\cdot\binom{6}{0}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{30}$;. A várható érték: $M(\xi)=\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{3}{10}\cdot 2+\frac{1}{30}\cdot 3=1{,}2$.

16.5.6. Az eloszlás:

$$P(\xi=0)=\binom{3}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^3=\frac{64}{125};P(\xi=1)=\binom{3}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^2=\frac{48}{125};P(\xi=2)=\binom{3}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^1=\frac{12}{125};$$

$P(\xi=3)=\binom{3}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^0=\frac{1}{125}$;. A várható érték:

$$M(\xi)=\frac{64}{125}\cdot 0+\frac{48}{125}\cdot 1+\frac{12}{125}\cdot 2+\frac{1}{125}\cdot 3=0{,}6.$$

16.5.7. $P(\xi=0)=\binom{2}{0}\cdot 0{,}1^0\cdot 0{,}9^2=\frac{81}{100};P(\xi=1)=\binom{2}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^1=\frac{18}{100};$

$P(\xi=2)=\binom{2}{2}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^0=\frac{1}{100}$; A várható érték: $M(\xi)=\frac{81}{100}\cdot 0+\frac{18}{100}\cdot 1+\frac{1}{100}\cdot 2=0{,}2$.

16.5.8. $P(\xi=0)=\binom{4}{0}\cdot 0{,}85^0\cdot 0{,}15^4; P(\xi=1)=\binom{4}{1}\cdot 0{,}85^1\cdot 0{,}15^3; P(\xi=2)=\binom{4}{2}\cdot 0{,}85^2\cdot 0{,}15^2;$

$P(\xi=3)=\binom{4}{3}\cdot 0{,}85^3\cdot 0{,}15^1; P(\xi=4)=\binom{4}{4}\cdot 0{,}85^4\cdot 0{,}15^0;\ M(\xi)=3{,}4$

16.6. Vegyes feladatok

16.6.1. a) A legalább egy találat értelmében a következő lehetőségekkel számolni: I: mindkét húzásnál nyer, ennek valószínűsége: k^2. II. Az első húzásnál nyer, a másodiknál nem: $k\cdot(1-k)=k-k^2$. III. A másodiknál nyer, az elsőnél nem, ez szintén $k-k^2$. Mivel ezek kizáró események, a keresett valószínűség ezek összege: $P(A)=2k-k^2$.

b) Ha a két szelvény egyformán van kitöltve a telitalálat valószínűsége k. Ha különböző módon, akkor 2k.

c) Az összehasonlításhoz mindkét b) –beli lehetőséget meg kell vizsgálni. Ha egyformán van kitöltve a két szelvény, akkor az a) szabály a kedvezőbb, mivel $2k-k^2>k$, mert átrendezve $k-k^2=k\cdot(1-k)>0$, mert $k>0$, és $1-k>0$. Ha különbözőképpen van a két szelvény kitöltve, akkor a b)-beli szabály a kedvezőbb, $2k>2k-k^2$, mert átrendezve $k^2>0$.

16.6.2. Egy rendezvényen lottóhúzást szerveznek. Egy szelvényen 20 szám (az első 20 pozitív egész) található, ebből kell 4-et megjelölni. Csak a telitalálat, vagy a három találat nyer. Egy szelvény ára 500 Ft. A telitalálat értéke 10.000 Ft, a három találaté 2.000 Ft. Határozzuk meg a következő események valószínűségét!

a) 4 vagy 3 találattal lehet nyerni, $P(A)=\dfrac{\binom{4}{4}+\binom{4}{3}\binom{16}{1}}{\binom{20}{4}}=0{,}1342.$

b) $P(B_1)=\dfrac{\binom{14}{3}}{\binom{20}{4}}=0{,}075.,\ P(B_2)=\dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}}=0{,}009288.$

c) A sorrendre vonatkozó feltétel független a kihúzott számoktól, A kihúzott számok a húzás sorrendjében csökkenő, vagy növekvő sorrendben követik egymást így a keresett valószínűség:

$P(C)=\dfrac{2}{4!}=\dfrac{1}{12}.$

d) Egy szabályosan kitöltött szelvény telitalálatának valószínűsége $p=\frac{1}{\binom{20}{4}}=\frac{1}{4845}$.

Binomiális eloszlással dolgozunk. A legfeljebb 1 telitalálat 0 vagy 1 telitalálatot jelent, ami kizáró események így

$$P(D)=\left(\frac{4844}{4845}\right)^{10}+\binom{10}{1}\left(\frac{1}{4845}\right)^{1}\left(\frac{4844}{4845}\right)^{.9}\approx 0{,}8775$$

e) 1000 eladott szelvény esetén mekkora lesz a szervezők lottóhúzásból származó haszna? A bevétel: 500·1000=500.000 Ft. Egy szelvény esetén a kiadás várható értéke: $M(\zeta)=\frac{1}{4845}\cdot 10.000+\frac{\binom{4}{3}\binom{16}{1}}{4845}\cdot 2.000\approx 28.48$. 1000 eladott szelvény esetén a kiadás várható értéke: 28.483 Ft. Így a várható haszon: 471.517 Ft.

16.6.3.

a) Annak a valószínűsége, hogy egy ajtó nem nyílik ki: 1-k. Annak, hogy egyik sem nyílik ki $(1-k)^{10}$. Ez a komplementer esemény valószínűsége, így a keresett valószínűség: $P(A)=1-(1-k)^{10}$.

b) $P(A)=(1-k)^{10}+\binom{10}{1}\cdot k\cdot(1-k)^{9}+\binom{10}{2}\cdot k^{2}\cdot(1-k)^{8}$

c) k ≥ 0,9895

16.6.4.

a) Komplementer esemény: András egyszer sem nyer, ez alapján $P(A)=1-(1-k)^{5}$

b) $P(B)=k^{2}+\binom{2}{1}\cdot k\cdot(1-k)=2k-k^{2}\geq 0{,}8$. Ebből $k\geq 0{,}5528$

c) A ζ valószínűségi változó jelentse András győzelmeinek a számát három mérkőzésből.

$$P(\zeta=0)=(1-k)^{3};\qquad P(\zeta=1)=\binom{3}{1}\cdot k^{1}\cdot(1-k)^{2}=3k-6k^{2}+3k^{3};$$

$$P(\zeta=2)=\binom{3}{2}\cdot k^{2}\cdot(1-k)=3k^{2}-3k^{3};\qquad P(\zeta=3)=k^{3};$$

András győzelmeinek várható értéke a három mérkőzésből:

$$0\cdot P(\zeta=0)+1\cdot P(\zeta=1)+2P(\zeta=2)+3P(\zeta=3)=3k-6k^{2}+3k^{3}+6k^{2}-6k^{3}+3k^{3}=3k=2$$

Ebből $k=\frac{2}{3}$

16.6.5.

a) $P(A)=\frac{2\cdot 4!\cdot 4!}{8!}=\frac{1}{35}$

b) $P(B) = \dfrac{\binom{4}{2}^2}{\binom{8}{4}} = \dfrac{18}{35}$

c) $P(c) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3 = 0{,}1047$

17. Analízis

17.1. Sorozatok tulajdonságai, mértani sor.

17.1.1. $a_{n+1} = \frac{3n+4}{n+3}$.

$a_{n+1} - a_n = \frac{3n+4}{n+3} - \frac{3n+1}{n+2} = \frac{(3n+4)\cdot(n+2)-(3n+1)(n+3)}{(n+2)\cdot(n+3)} = \frac{4}{(n+2)\cdot(n+3)} > 0$. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő.

17.1.2. $a_{n+1} - a_n = \frac{-13}{(3n+4)\cdot(3n+1)} < 0$. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

17.1.3. $a_{n+1} - a_n = \frac{-9}{(n-2)\cdot(n-3)} < 0$. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

17.1.4. $a_{n+1} - a_n = \frac{-27}{(2n-3)\cdot(2n-5)} < 0$, mert az első két tagtól eltekintve a nevező pozitív. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha n > 2.

17.1.5. $a_{n+1} - a_n = \frac{49}{(5n+9)\cdot(5n+4)} > 0$. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

17.1.6. $a_{n+1} - a_n = \frac{-17}{(n-3)\cdot(n-4)} < 0$ mert az első négy tagtól eltekintve a nevező pozitív. Tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő, ha n > 4.

17.1.7. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{n^2\cdot\left(5+\frac{9}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(7-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{5}{7}$

17.1.8. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

17.1.9. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

17.1.10. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

17.1.11. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{8}{7}$

17.1.12. $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$

17.1.13. Először vizsgáljuk meg a sorozatot monotonitás szempontjából.

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+8}{2n+6} - \frac{n+7}{2n+4} = \frac{-10}{(2n+6)\cdot(2n+4)} < 0$, tehát a sorozat monoton csökkenő. Utána vizsgáljuk meg a határértéket: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. A sorozat korlátos, felső korlátja $a_1 = \frac{4}{3}$, alsó korlátja $\frac{1}{2}$.

17.1.14. . A sorozat korlátos, felső korlátja $a_1 = \frac{11}{8}$, alsó korlátja $\frac{2}{3}$.

17.1.15. A sorozat monoton csökkenő, ha n > 1. $a_1 = -3$, $a_2 = 4$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. A sorozat korlátos, felső korlátja 4, alsó korlátja -3.

17.1.16. A sorozat monoton növekvő, ha n > 2. $a_1 = 5$, a_2 nem értelmezett, $a_3 = -11$ $\lim_{n\to\infty} a_n =$ -3. A sorozat korlátos, felső korlátja 5, alsó korlátja -11.

17.1.17. A sorozat monoton csökkenő, ha n > 2. $a_1 = -\frac{7}{4}$, $a_2 = -9$, $a_3 = \frac{11}{2}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3}$. A sorozat korlátos, felső korlátja $\frac{11}{2}$, alsó korlátja -9.

17.1.18. A sorozat monoton növekvő, ha n > 1. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -5$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{4}{3}$. A sorozat korlátos, felső korlátja $\frac{1}{2}$, alsó korlátja -5.

17.1.19. Használjuk az $|a_n - A| < \varepsilon$ összefüggést. $A = \frac{3}{2}; \varepsilon = \frac{1}{100}$, így megoldandó a $\left|\frac{3n+2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{100}$ egyenlőtlenség. $\left|\frac{7}{4n-2}\right| < \frac{1}{100}$. Mivel a számláló és a nevező is minden esetben pozitív 700 < 4n - -2. Ebből n > 175,5. Tehát a 175. tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 176. már igen.

17.1.20. A 2996. tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 2997. már igen.

17.1.21. A 175. tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 176. már igen.

17.1.22. Az 1111. tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de az 1112. már igen.

17.1.23. A 628. tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 629. már igen.

17.1.24. A 401. tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 402. már igen.

17.1.25. Szigorúan monoton növekvő sorozat, határértéke 3, így alsó korlátja $a_1 = -\frac{1}{5}$, felső korlátja 3, tehát korlátos. A 15.996.-ik tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 15.597.-ik már igen.

17.1.26. Szigorúan monoton csökkenő sorozat, határértéke $\frac{2}{7}$, így alsó korlátja $\frac{2}{7}$, felső korlátja $a_1 = \frac{5}{11}$, tehát korlátos. A 16.-ik tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 17.-ik már igen.

17.1.27. Az első három tagtól eltekintve, a negyedik tagtól kezdve szigorúan monoton csökkenő. $a_1 = -2$, $a_2 = -9$, $a_4 = 19$. Határérték 5. Így alsó korlát -9, felső korlát 19. A 14.003.-ik tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 14.004.-ik már igen.

17.1.28. Az első három tagtól eltekintve, a negyedik tagtól kezdve szigorúan monoton növekvő. $a_1 = -\frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{3}{2}$, A harmadik tag nem értelmezett, $a_4 = -\frac{11}{4}$. Határérték -2. Így alsó korlát $a_4 = -\frac{11}{4}$, felső korlát $a_2 = \frac{3}{2}$. Az 35.003.-ik tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 35.004.-ik már igen.

17.1.29. Az első két tagtól eltekintve, a harmadik tagtól kezdve szigorúan monoton növekvő. $a_1 = \frac{8}{3}$, $a_2 = 5$, $a_3 = -2$. Határérték $\frac{3}{2}$. Így alsó korlát -2, felső korlát $a_2 = 5$. A 3.502.-ik tag még nincs a határérték ε sugarú környezetében, de a 3.503.-ik már igen.

17.1.30. A kialakuló négyzetek kerületei olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme 8cm, hányadosa 0.5. Mivel végtelenségig folytatjuk az eljárást, és a hányados abszolútértéke 0 és 1 közé esik, a kerületek összegére alkalmazhatjuk a mértani sorra vonatkozó összefüggést:

$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{8}{1-\frac{1}{2}}=16$. A területek olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme 4 cm^2, hányadosa 0,25. A területek összege $S=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}$.

17.1.31. A kerületek összege:36 cm , a területek összege 40,5 cm^2.

17.1.32. A hányados $\frac{\sqrt{2}}{2}$, így a kerületek összege: $S=\frac{4\cdot 3\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=12+12\sqrt{2}\approx 28{,}97\,\text{cm}$, a területek összege $S=\frac{4.5}{1-\frac{1}{2}}=9\,\text{cm}^2$.

17.1.33. A kerületek összege: 24 cm , a területek összege $\frac{16\sqrt{3}}{3}\approx 9{,}24\,\text{cm}^2$

17.1.34. A hányados $\frac{\sqrt{2}}{2}$, így a kerületek összege: $S=\frac{10\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\approx 82{,}43\,\text{cm}$, a területek összege $S=\frac{25}{1-\frac{1}{2}}=50\,\text{cm}^2$.

17.1.35. A harmadik oldal hossza $\sqrt{3}$, így a kiindulási háromszög kerülete $3+\sqrt{3}$. A második háromszögben A_2B oldal hossza $\frac{\sqrt{3}}{2}$, így a hasonlóság aránya $\frac{\sqrt{3}}{4}$, ez lesz a mértani sor hányadosa is egyben. Tehát a kerületek összege: $S=\frac{3+\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{4}}=8{,}35\,\text{cm}$. A területek összege:

$S=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{16}}=\frac{16\sqrt{3}}{13}\approx 1{,}07\,\text{cm}^2$.

17.1.36. A töröttvonal hossza $S=\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}\approx 2{,}37$, a területek összege:

$S=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\approx 1{,}3\,\text{cm}^2$.

17.1.37. A keletkező négyzetek hasonlóak, az arány $\frac{\sqrt{74}}{12}$, így a kerületek összege:

$S=\frac{48}{1-\frac{\sqrt{74}}{12}}\approx 169{,}53\,\text{cm}$, a területek összege $S=\frac{25}{1-\frac{1}{2}}=50\,\text{cm}^2$.

17.1.38. A keletkező négyzetek hasonlóak, az arány $\frac{5}{7}$, így a kerületek összege: $S=\frac{4}{1-\frac{5}{7}}=14$

cm, a területek összege $S=\frac{1}{1-\frac{25}{49}}=\frac{49}{24}\approx 2{,}04\,\text{cm}^2$.

17.1.39. $\lim_{n\to\infty}\left(k_1+k_2+k_3+....k_n+....\right)=\frac{k_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}k_1$. A keresett százalékláb: $\frac{k_1}{\frac{3}{2}k_1}\cdot 100=66{,}67\%$

illetve $\lim_{n\to\infty}\left(t_1+t_2+t_3+...t_n+....\right)=\frac{t_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}t_1$. A keresett százalékláb: $\frac{t_1}{\frac{9}{8}t_1}\cdot 100=88{,}89\%$

17.1.40. Az eljárással hasonló háromszögeket kapunk. A második hatszög oldalának hossza $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, így a hasonlóság aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az első hatszög kerülete 18cm, így a kerületek összege

$S=\frac{18}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=72+36\sqrt{3}\approx 134.35\,\text{cm}$. Az első hatszög területe $\frac{27\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$, így a területek

összege $S=\frac{27\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{3}{4}}=54\sqrt{3}\approx 93{,}53\,\text{cm}^2$.

17.2. Függvények határértéke

17.2.1. a) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}2-x=4$ b) 0 c) $-\infty$

17.2.2. a) $\dfrac{1}{3}$ b) 3 c) 1

17.2.3. a) 0 b) 0 c) 0

17.2.4. a) 2 b) nincs határérték c) 1

17.2.5. a) $\dfrac{1}{10}$ b) nincs határérték c) 0

17.2.6. a) $-\dfrac{2}{3}$ b)0 c) nincs határérték

17.2.7. a) nincs határérték b) 3 c) 0

17.2.8. a)-3 b) nincs határérték c) $\dfrac{2}{3}$

17.2.9. a) nincs határérték b) $\dfrac{3}{4}$ c) 0

17.2.10. a)0 b) $\dfrac{20}{3}$ c) ∞

17.2.11. a)12 b) ∞ c) ∞

17.2.12. a) $\dfrac{1}{9}$ b) $\dfrac{1}{27}$ c) 0

17.3. Függvények deriválása, a derivált függvény alkalmazásai

17.3.1. a) $f'(x)=3x^2+\dfrac{2}{x^3}+1$ b) $f'(x)=5x^4+\dfrac{4}{x^5}-1$ c) $f(x)=7x^6+\dfrac{6}{x^7}$

17.3.2. a) $f'(x)=20x^3+\dfrac{7}{x^2}+6$ b) $f'(x)=6x^2+\dfrac{30}{x^6}-9$ c) $f'(x)=12x^2+\dfrac{24}{x^3}$

17.3.3. a) $f'(x)=\frac{3}{4\cdot\sqrt[4]{x}}+\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x^5}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ b) $f'(x)=\frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{x^5}}+\frac{24}{5\cdot\sqrt[5]{x^9}}+\frac{3}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=\frac{10}{3\cdot\sqrt[3]{x}}+\frac{15}{4\cdot\sqrt[4]{x^7}}$

17.3.4. a) $f(x)=x-\frac{3}{x}$, így a) $f'(x)=1+\frac{3}{x^2}$ b) $f'(x)=\frac{15}{2}x^2-5$ c) $f(x)=x^{\frac{1}{12}}$ így

$f'(x)=\frac{1}{12\cdot\sqrt[12]{x^{11}}}$

17.3.5. a) $f(x)=\frac{(1-x)\cdot(1+x)}{x+1}=1-x$, így $f'(x)=-1$ b) $f'(x)=2x-2$

c) $f'(x)=2x-3$

17.3.6. a) $f(x)=\frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4$, így $f'(x)=2x+2$ b) $f(x)=x+5$, így

$f'(x)=1$ c) $f(x)=\frac{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)}{x-2}=x^3+2x^2+4x+8$, így

$f'(x)=3x^2+4x+4$

17.3.7. a) $f'(x)=\frac{\cos x}{x}-\ln x\cdot\sin x$ b) $f'(x)=(12x^2-3)\cdot(x^2+12)+(4x^3-3x+2)\cdot 2x$

c) $f'(x)=(-4x^3+10x)\cdot\sin x+(-x^4+5x^2-3)\cdot\cos x$

17.3.8. $f'(x)=\frac{2}{x}\cdot e^x+2\ln x\cdot e^x$ b) $f'(x)=\frac{3}{x}\cdot(2x-e)+3\ln x\cdot 2$

c) $f'(x)=-5\sin x\cdot(x^5-7x+1)+5\cos x\cdot(5x^4-7)$

17.3.9. a) $f'(x)=\frac{(6x^2+5)\cdot(x^2-2x)-(2x^3+5x-6)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2}=\frac{2x^4-8x^3-5x^2-12x-12}{(x^2-2x)^2}$

b) $f'(x)=\frac{1\cdot(x^2-15x+23)-(x+12)\cdot(2x-15)}{(x^2-15x+23)^2}=\frac{-x^2-24x+203}{(x^2-15x+23)^2}$

c) $f'(x)=\frac{(3x^2+2)\cdot(x-2)-(x^3+2x-15)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-2x^2+11}{(x-2)^2}$

17.3.10. a) $f'(x)=\dfrac{\cos x\cdot(3x-2)-3\sin x}{(3x-2)^2}$ b) $f'(x)=\dfrac{3\sin x\cdot(3x^2-5x+2)+3\cos x\cdot(6x-5)}{(3x^2-5x+2)^2}$

c) $f(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\cdot(x^4-2x+1)-2\ln x\cdot(4x^3-2)}{(x^4-2x+1)^2}$

17.3.11. a) $f'(x)=2e^{2x-3}$ b) $f'(x)=\dfrac{1}{5x^2-3x+1}\cdot(10x-3)$

c) $f(x)=-\sin(7x-x^2)\cdot(7-2x)$

17.3.12. a) $f'(x)=\dfrac{1}{3x^2-2x+5}\cdot(6x-2)$ b) $f'(x)=5\cos(5x-6)$

c) $f'(x)=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin(2x)$

17.3.13. a) $f'(x)=\dfrac{12\ln^3 x}{x}$ b) $f'(x)=e^{5\sin x}\cdot 5\cos x$

c) $f'(x)=-\sin(\sin x)\cdot\cos x$

17.3.14. a) Az érintő egyenletének felírásához az $y=m(x-x_0)+y_0$ képletet használjuk, ahol $m=f'(x_0)$, illetve $P(x_0,y_0)$. $f'(x)=2x-1$, így $m=f'(1)=1$, tehát az érintő egyenlete $y=(x-1)+2=x+1$. b) Az érintő egyenlete $y=3x-5$

17.3.15. a) $y=15x+9$ b) $y=-22x+16$

17.3.16. a) $y=-10x+6$ b) $y=-8x+3$

17.3.17. a) Az érintő egyenletének felírásához ugyanúgy az $y=m(x-x_0)+y_0$ képletet használjuk, ahol $m=f'(x_0)$, illetve $y_0=f(x_0)$. $f'(x)=2x-5$, így $m=f'(2)=-1$, $y_0=f(2)=0$, tehát az érintő egyenlete $y=-(x-2)=-x+2$. b) Az érintő egyenlete $y=13(x+1)-16=13x-3$

17.3.18. a) $y=43x+46$ b) $y=-2x-1$

17.3.19. a) $y=-10x+6$ b) $y=228x-516$

17.3.20. a) Ahol $f'(x)<0$ teljesül, ott lesz a függvény szigorúan monoton csökkenő, egyébként növekvő. Mivel $f'(x)=-6x+12$, így $x\in\left]-\infty,2\right[$ esetén lesz a függvény szigorúan monoton növekvő, $x\in\left]2,\infty,\right[$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő. Mivel a 2 helyen értelmezett a függvény, már ebből is következik, hogy $x=2$ esetén van szélsőérték, mégpedig maximum. Maximum érték $f(2)=19$. Ahol $f''(x)<0$ teljesül, ott lesz a függvény konkáv, egyébként konvex. Mivel $f''(x)=-6$, így a teljes értelmezési tartományon (**R**) lesz a függvény konkáv. Így inflexiós pont sincs. b) $x\in\left]-\infty,3\right[$ esetén lesz a függvény szigorúan monoton csökkenő, $x\in\left]3,\infty,\right[$ esetén pedig szigorúan monoton növekvő. $x=3$ esetén van szélsőérték, mégpedig minimum. Minimum érték $f(3)=-23$. A függvény végig konvex, nincs inflexiós pontja.

17.3.21. a) $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]4,\infty\right[$ esetén lesz a függvény szigorúan monoton növekvő, $x\in\left]0,4,\right[$ esetén pedig szigorúan monoton csökkenő. $x=0$ esetén van maximum. Maximum érték $f(0)=-10$. $x=4$ esetén van minimum, értéke $f(4)=-74$. A függvény $x\in\left]-\infty,2\right[$ esetén konvex, $x\in\left]2,\infty\right[$ esetén pedig konkáv. Inflexiós pontja $P_{\text{inf}}(2,-42)$. b) Szigorúan monoton növekvő, ha $x\in\left]-10,\frac{6-2\sqrt{6}}{3}\right[\cup\left]\frac{6+2\sqrt{6}}{3},10\right[$ szigorúan monoton csökkenő, ha $x\in\left]\frac{6-2\sqrt{6}}{3},\frac{6+2\sqrt{6}}{3}\right[$. $P_{\max}\left(\frac{6-2\sqrt{6}}{3},\frac{-81+32\sqrt{6}}{9}\right)$, $P_{\min}\left(\frac{6+2\sqrt{6}}{3},\frac{-81-32\sqrt{6}}{9}\right)$. A korlátozás miatt szükség van az intervallumhatárokban lévő pontokra is! $P_{\max 2}(10{,}439)$, $P_{\min 2}(-10,-1641)$. Konvex, ha $x\in\left]2{,}10\right[$ esetén, $x\in\left]-10,2\right[$ esetén pedig konkáv. Inflexiós pontja $P_{\text{inf}}(2,-9)$.

17.3.22. a) Szigorúan monoton növekvő, ha $x\in\left]-2,0\right[\cup\left]2,\infty\right[$ szigorúan monoton csökkenő, ha $x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]0,2\right[$. $P_{\max}(0{,}0)$, $P_{\min 1}(-2,-48)$, $P_{\min 2}(2,-48)$. Konvex, ha $x\in\left]-\infty,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]\frac{2\sqrt{3}}{3},\infty\right[$, $x\in\left]-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ esetén pedig konkáv. Inflexiós pontjai $P_{\text{inf }1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{80}{3}\right)$, $P_{\text{inf }2}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{80}{3}\right)$. b) Szigorúan monoton növekvő, ha $x\in\left]-6,-2\right[$

szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-2,6[$, $P_{\max}(-2,16)$. Konkáv, ha $x \in \left]-6,-\frac{4}{3}\right[\cup]0,6[$, $x \in \left]-\frac{4}{3},0\right[$ esetén pedig konvex. Inflexiós pontjai $P_{\inf 1}\left(-\frac{4}{3},\frac{256}{27}\right)$, $P_{\inf 2}(0,0)$.

17.3.23. a) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty,-0[\cup]0,\infty[$, szélsőértéke nincs, inflexiós pontja nincs. Konkáv, ha $x \in]-\infty,0[$, konvex, ha $x \in]0,\infty[$. b) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty,0[\cup]0,\infty[$, szélsőértéke nincs, inflexiós pontja nincs. Konvex, ha $x \in]-\infty,0[$, konkáv, ha $x \in]0,\infty[$.

17.3.24. a) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty,-1[\cup]1,\infty[$, szigorúan monoton növekvő, ha $x \in]-1,1[$, szélsőértékei $P_{\max}\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $P_{\min}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$. Konvex, ha $x \in \left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},\infty\right[$, konkáv, ha $x \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0,\sqrt{3}\right[$ Inflexiós pontjai $P_{\inf 1}\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$, $P_{\inf 1}\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$. b) Szigorúan monoton csökkenő, ha $x \in]-\infty,-2[\cup]0,\infty[$, szigorúan monoton növekvő, ha $x \in]-2,0[$, szélsőértékei $P_{\max}\left(1,\frac{1}{2}\right)$, $P_{\min}\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$. Konvex, ha $x \in \left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},\infty\right[$, konkáv, ha $x \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0,\sqrt{3}\right[$ Inflexiós pontjai $P_{\inf 1}\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$, $P_{\inf 1}\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{10}\right)$.

17.3.25. a) p = 5, és maximum van az x = -3 pontban. b) $x = -\frac{1}{3}$ (lok. min. hely)

17.3.26. a) p = -15.5, és minimum van az x = 6 pontban. b) x = -5/6 (lok. max.hely).

17.3.27. 20 db esetén lesz az önköltség minimális, melynek értéke 80.6 Ft.

17.3.28. 250 db esetén lesz az önköltség minimális, melynek értéke 621.669 Ft.

17.3.29. 35 Ft-os egységár esetén lesz az árbevétel maximális, ennek értéke 4900 Ft. Ehhez 140 kg kereslet tartozik.

17.3.30. 42 Ft-os egységár esetén lesz az árbevétel maximális, ennek értéke 8820 Ft. Ehhez 210 kg kereslet tartozik.

17.3.31. x=80

17.3.32. x=25

17.3.33. Kilométerenkénti költség: $k(x)=0.00003v^2+\frac{480}{v}$. Így v=200 km/h óra esetén lesz a kilométerenkénti költség a legkisebb.

17.3.34. x=50 km/h

17.3.35. 199 utas esetén lesz 45.501 euró a bevétel, ez a maximális.

17.3.36. 30 utas esetén lesz 360.000 Ft a bevétel, ez a maximális.

17.4. Integrálás, és alkalmazásai

17.4.1. a) $\int f(x)\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{x}+\frac{x^2}{2}-x+C$ b) $\int f(x)\,dx=\frac{x^6}{6}+\frac{1}{3x^3}-\frac{3x^2}{2}+5x+C$

c) $\int f(x)\,dx=\frac{5x^8}{8}+\frac{3}{5x^5}-2\pi x+C$

17.4.2. a) $\int f(x)\,dx=\frac{x^3}{3}+2x^2+16x+C$ b) $\int f(x)\,dx=\frac{x^2}{2}+5x+C$

17.4.3. a) $\int f(x)\,dx=2\sin x+3\ln|x|-3ex+C$ b) $\int f(x)\,dx=2e^x+5\ln|x|+4\pi x+C$

17.4.4. a) $\int f(x)\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+2x^2+8x+C$

b) $\int f(x)\,dx=\frac{2x^6}{3}+\frac{45x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}-18x^2+24x+C$

17.4.5. a) $\int_0^1\left(4x^2-3x\right)dx=\left[\frac{4x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_0^1=\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\right)-0=-\frac{1}{6}$ b) 0 c) 90.8

17.4.6. a) $\pi+2$ b) -4 c) $-\pi$

17.4.7. a) $5-3e$ b) $5e-4$ c) $5-2e^{e^2}+2e^{e}$

17.4.8. a) p = 3 b) p = 2, -2 c) p = 3, -2.5

17.4.9. a) m = π b) m = $\frac{2\pi}{3}$

17.4.10. a) $c_1 = 2\pi$, $c_2 = \frac{\pi}{2}$ b) $c_1 = 2k\pi$, $c_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$

17.4.11. a) p = e b) p = 2

17.4.12. a) t = $\frac{1}{6}$ b) t = $\frac{32}{3}$ c) $\frac{125}{3}$

17.4.13. a) $\frac{28}{3}$ b) $\frac{37}{12}$

17.4.14. a) 28.5 b) $\frac{16}{15}$

17.4.15. a) 71 b) 172,8

17.4.16. a) 4 b) $8-\sqrt{2}-\sqrt{3} \approx 4{,}85$

17.4.17. a) ≈1.79 b) ≈3,64

17.4.18. a) 4,5 b) $\frac{4}{3}$

17.4.19. a) $\frac{2}{3}$ b) 4,5

17.4.20. a) 9 b) 8

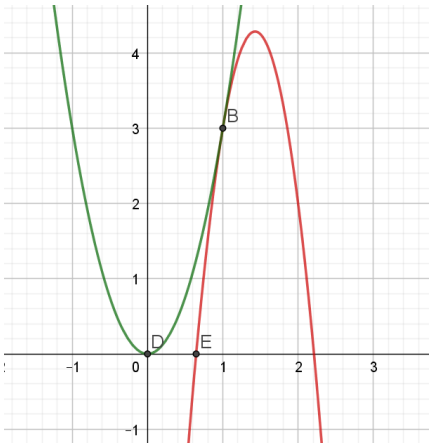
17.4.21. a) $\sqrt{2}$ b) 4

17.4.22. a) ≈2,3094 b) ≈9,16516

17.4.23. 2

17.4.24. $\pm\sqrt{3}$

17.4.25. 2



17.4.26. a=-7, b=20, c=-10. A g(x) függvény alatti terület a [0,1] intervallumon 1. Az f(x) függvény szükséges zérushelye (E): $\frac{10-\sqrt{30}}{7}$ ≈0,6461. Az f(x) függvény alatti terület a [0.6461, 1] intervallumon 0,5825. Így a keresett terület ezek különbsége: T≈0,42.

17.4.27. a=-1, b=8, c=-8. T≈0,915

18. Bizonyítási módszerek

18.1. Direkt bizonyítás

18.1.1. Az $A \setminus B \subseteq A$, ezért $|A \setminus (A \setminus B)| = |A| - |A \setminus B|$. Továbbá $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Tehát igaz az állítás.

18.1.2. Az egyenlőség bal oldalára teljesül az alábbi összefüggés:

$$|(AxB) \setminus (BxA)| = |AxB| - |(AxB) \cap (BxA)|$$

Az egyenlőség jobb oldalára teljesül az alábbi összefüggés:

$$|(BxA) \setminus (AxB)| = |BxA| - |(BxA) \cap (AxB)|$$

A kapott két érték megegyezik, mert:

$$|AxB| = |BxA|$$

Továbbá a metszetképzés kommutatív művelet. Tehát igaz az állítás.

18.1.3. A bizonyítást a logikai értéktáblázat alapján végezzük el.

A	B	$A \to B$	$\neg A \to \neg B$	$(A \to B) és (\neg A \to \neg B)$	$A \leftrightarrow B$
I	I	I	I	I	I
I	H	H	I	H	H
H	I	I	H	H	H
H	H	I	I	I	I

Tehát igaz az állítás.

18.1.4. A bizonyítást a logikai értéktáblázat alapján végezzük el.

A	B	$A \to B$	$B \to A$	(Baloldal)
I	I	I	I	H
I	H	H	I	I
H	I	I	H	I
H	H	I	I	H

A	B	$\neg(AvB)$	$AésB$	(jobb oldal)
I	I	H	I	H
I	H	H	H	I
H	I	H	H	I
H	H	I	H	H

Tehát igaz az állítás.

18.1.5. Legyen *n* egy páratlan szám. Ekkor $n = 2k + 1$, ahol *k* egész szám. Négyzetre emelve és rendezve:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4 \cdot (k^2 + k) + 1$$

Az első tag osztható 4-gyel, tehát az n^2 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

18.1.6. Legyen a három egymást követő szám: $n-1, n, n+1$. Ekkor köbeik összege:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 =$$

$$= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

A hárommal való oszthatóság szempontjából az *n* háromféle alakú lehet:

$$n = 3k, n = 3k - 1, n = 3k + 1$$

Az első esetben a kifejezés az alábbi módon írható fel:

$$3n(n^2+2) = 3 \cdot 3k(9k^2+2) = 9k(9k^2+2)$$

Ez pedig osztható 9-cel.

A második esetben a kifejezés az alábbi módon írható fel:

$$3n(n^2+2) = 3(3k-1)(9k^2-6k+1+2) = 9(3k-1)(3k^2-2k+1)$$

Ez pedig osztható 9-cel.

A második esetben a kifejezés az alábbi módon írható fel:

$$3(3k+1)(9k^2+6k+1+2) = 9(3k+1)(3k^2+2k+1)$$

Ez pedig osztható 9-cel. Tehát igaz az állítás.

18.1.7. Mivel $(a+b)(b+c) = 0$, azaz $ab + ac + bc = -b^2, illetve\ ac = -b^2 - ab - bc$.

Ezt felhasználva:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{bc+ac+ab}{abc} = \frac{-b^2}{abc} = \frac{-b}{ac} = \frac{-b}{-b^2-ab-bc} = \frac{1}{a+b+c}$$

Tehát igaz az állítás.

18.1.8. Mivel $a + b + c = 0$, azaz $c = -(a+b)$.

Ezt felhasználva:

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 + \big(-(a+b)\big)^3 = 3abc = 0$$

Ha $a = b = c = 0$, akkor $a^n + b^n + c^n = 0$. Az *a, b, c* betűk szimmetriája miatt bármelyikre hasonló a bizonyítás. Ha például $c = 0$, akkor $a = -b$ *és* $a^n + b^n + c^n = -b^n + b^n = 0$, mert az *n* páratlan. Tehát igaz az állítás.

18.1.9. Vezessük be a következő jelölést:

$$\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} = p$$

Ekkor az alábbi egyenletet kapjuk:

$$(p-2)x^2 + 2(2p-3)x + 5p - 6 = 0$$

Az egyenlet gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{3 - 2p \pm \sqrt{(3-2p)^2 - (p-2)(5p-6)}}{p-2}\,, ahol\ p \neq 2$$

Akkor van megoldása a valós számok halmazán, ha a diszkrimináns nem negatív. Vagyis:

$$(3-2p)^2 - (p-2)(5p-6) \geq 0\,, azaz\ p^2 - 4p + 3 \leq 0$$

Ez $1 \leq p \leq 3$ esetén pedig teljesül. Nem kell kizárni a $p = 2$ értéket sem, mert $x = -2$ esetén:

$$\frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5} = 2$$

Tehát igaz az állítás.

18.1.10. Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = p^2\,, ahol\ p > 2\ egész\ szám$$

Ha *p* páratlan, akkor: $x - y = 1\,, x + y = p^2$

Ebből:

$$x = \frac{p^2+1}{2}\,, y = \frac{p^2-1}{2}\ pozitív\ egész, ha\ p > 1$$

Ha *p* páros, akkor:

$$p^2 = 2 \cdot \frac{p^2}{2}, ezért\ x - y = 2\,, x + y = \frac{p^2}{2}$$

Ebből:

$$x = \frac{p^2+4}{4}\,, y = \frac{p^2-4}{4}$$

Mivel $p > 2$ egész szám és páros, ezért a 4 osztója p^2-nek, ha *x* és *y* pozitív egész. Tehát igaz az állítás.

18.1.11. Vezessük be a $\log_2 7 = a$ jelölést! Ekkor az állítás a következő:

$$12 < a^2 + \frac{36}{a^2} < 13$$

Az egyenlőtlenséget két részre bontjuk. A egyik irányban:

$$a^4 - 12a^2 + 36 > 0\,, azaz\ (a^2 - 6)^2 > 0$$

Ez minden *a* esetén igaz. Az alábbi egyenlőtlenséget kell még belátni:

$$(\log_2 7)^2 \neq 6\,, azaz\ 2^{\sqrt{6}} \neq 7$$

Ez viszont teljesül, mert:

$$2^{\sqrt{6}} < 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{32} < 7$$

A másik irányban: $a^4 - 13a^2 + 36 < 0$

Ebből:

$$4 < a^2 < 9\,, azaz\ 2 < a < 3$$

Mivel $2 < \log_2 7 < 3$, ezért ez is igaz. Tehát igaz az állítás.

18.1.12. Mivel x^2 együtthatója pozitív, az egyenlőtlenség csak akkor igaz minden valós *x*-re, ha a bal oldali kifejezés diszkriminánsa negatív. Vagyis:

$$\left(2\log_a \frac{2}{b}\right)^2 - 4\log_a 4b \log_a \left(\frac{b}{2}\right)^2 < 0$$

Használjuk fel, hogy $\log_a \frac{2}{b} = -\log_a \frac{b}{2}$, továbbá $4b = 8 \cdot \frac{b}{2}$, és osszunk 4-gyel:

$$\left(\log_a \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\log_a 8 + \log_a \frac{b}{2}\right) 2\log_a \frac{b}{2} < 0$$

Végezzük el a műveleteket és vonjunk össze:

$$-\left(\log_a \frac{b}{2}\right)^2 - (\log_a 8) 2\log_a \frac{b}{2} < 0$$

Ez pedig igaz, mert $\log_a 8 > 0$ *és* $b > 2$ *és* $a > 1$ *miatt* $\log_a \frac{b}{2} > 0$ is igaz.

Ez ekvivalens a diszkriminánsra tett feltétellel, tehát igaz az állítás.

18.1.13. Alakítsuk át a bal oldalt az alábbiak szerint:

$$\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2}=\frac{\sin 2\alpha+1}{\cos 2\alpha}=\tan 2\alpha+\frac{1}{\cos 2\alpha}$$

Tehát igaz az állítás.

18.1.14. Alakítsuk át a bal oldalt az addíciós tételeket felhasználva:

$$2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)=(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=$$

$$(\cos\alpha)^2-2\sin\alpha\cos\alpha+(\sin\alpha)^2=1-\sin 2\alpha$$

Tehát igaz az állítás.

18.1.15. Legyenek a háromszög oldalai: *a*, *b*, *c*. Tegyük fel a háromszög oldalaira a következő összefüggést: $a\le b\le c$. Ebből:

$$a\le\frac{b+b}{2}\le\frac{b+c}{2}$$

Tehát igaz az állítás.

18.1.16. Az *n* oldalú sokszög belső szögeinek összege: $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=(n-2)\cdot 180°$. A konvex sokszög külső szögei a belső szögek mellékszögei, ezért ezek összege:

$$(180°-\alpha_1)+(180°-\alpha_2)+\cdots+(180°-\alpha_n)=n\cdot 180°-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)=$$

$=n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°=360°$. Tehát igaz az állítás.

18.1.17. A megadott arányok alapján az élek hossza: 2*x*, 5*x*, 14*x*. A testátlóra igaz a következő:

$$f^2=(2x)^2+(5x)^2+(14x)^2=225x^2\,,azaz\ f=15x$$

A keresett arányok: $\frac{15}{2}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{15}{14}$. Ezek pedig racionális számok. Tehát igaz az állítás.

18.1.18. Metsszük el az oldalélek egyeneseit egy rájuk merőleges síkkal! Ez a hasáb oldallapjaiból, (vagy a meghosszabbításaiból) egy olyan *n*-szöget metsz ki, amelynek szögei az oldallapok lapszögeivel egyenlők. Mivel ezek összege $(n-2)\cdot 180°$, ezért ugyanez érvényes a lapszögekre is. Tehát igaz az állítás.

18.1.19. Alakítsuk át a bal oldalt az alábbi módon:

$$\binom{n+2}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}+\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=$$

$$=\binom{n}{k-1}+2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

Tehát igaz az állítás.

18.1.20. Alakítsuk át a bal oldalt az alábbi módon:

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k+1}=$$

$$=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k+1}{k+1}=$$

$$=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k}+\binom{n-2}{k}+\cdots+\binom{k+1}{k}+\binom{k}{k}$$

Tehát igaz az állítás.

18.2. Indirekt bizonyítás

18.2.1. Bizonyítás: Indirekt módon.

1. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ egy racionális szám, tehát léteznek *p* és *q* egészek, hogy $\frac{p}{q}=\sqrt{2}$.

2. Akkor lehet felírni $\sqrt{2}$ -t tovább nem egyszerűsíthető törtként, ha $(a, b)=1$**,** valamint

$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$.

3. Ebből következik, hogy és $p^2=2q^2$.

4. Tehát, p^2 páros, mert egyenlő 2 q^2-tel.

5. Ebből következik, hogy p is páros, mert csak a páros számoknak páros a négyzetük.

6. Mivel p páros, létezik k egész szám, ami teljesíti, hogy $p = 2k$.

7. Behelyettesítve $2k$-t a (6). lépésből a (3). lépés egyenlőségébe: $2q^2 = (2k)^2$, ami megegyezik $2b^2 = 4k^2$, ami megegyezik $b^2 = 2k^2$.

8. Mivel $2k^2$ osztható 2-vel, és $2k^2 = q^2$, ezért q^2 szintén osztható 2-vel, tehát q is.

9. Az (5). és (8). lépésből tudjuk, hogy p és q is párosak, ami ellentmond annak, hogy relatív prímek, ahogy azt megállapítottuk a (2). lépésben.

18.2.2. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{3}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve a $3q^2 = p^2$ összefüggést kapjuk. A jobb oldalon p^2egy négyzetszám, így prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. A baloldalon q^2 is négyzetszám, így az 3 kitevője ebben is páros. Egy egyenlet két oldalán nem lehet különböző paritású 3 kitevője, tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.3. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{5}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve a $5q^2 = p^2$ összefüggést kapjuk. A jobb oldalon p^2egy négyzetszám, így prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. A baloldalon q^2 is négyzetszám, így az 5 kitevője ebben is páros. Egy egyenlet két oldalán nem lehet különböző paritású 5 kitevője, tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.4. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{6}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{6} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve a $6q^2 = p^2$ összefüggést kapjuk. A jobb oldalon p^2egy négyzetszám, így prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel, például a 2 is. A baloldalon q^2 is négyzetszám, így a 2 kitevője ebben is páros (akár 0 is lehet, ha q^2 páratlan), viszont $6 = 2 \cdot 3$ miatt ekkor a baloldalon összességében páratlan lesz a 2 kitevője. Egy egyenlet két oldalán nem lehet különböző paritású 2 kitevője, tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt, tehát a bizonyítandó állítás igaz.

18.2.5. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{17}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol *p* és *q* pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{17} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve a $17q^2 = p^2$ összefüggést kapjuk. A jobb oldalon p^2egy négyzetszám, így prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. A baloldalon q^2 is négyzetszám, így az 17 kitevője ebben is páros. Egy egyenlet két oldalán nem lehet különböző paritású 17 kitevője, tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.6. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol *p* és *q* pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{5} + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$7 + 2\sqrt{10} = \frac{p^2}{q^2}$$

Elég belátni, hogy $\sqrt{10}$ irracionális szám. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{10}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{m}{n}$ alakban, ahol *m* és *n* pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{10} = \frac{m}{n}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve:

$$10n^2 = m^2$$

A jobb oldalon m^2egy négyzetszám, így prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. A baloldalon n^2 is négyzetszám, így az 5 kitevője ebben is páros. Egy egyenlet két oldalán nem lehet különböző paritású 5 kitevője, tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.7. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt{a}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol *p* és *q* pozitív egész számok. Ekkor a $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát négyzetre emelve, majd rendezve a $aq^2 = p^2$ összefüggést kapjuk. A jobb oldalon p^2egy négyzetszám, így prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. A baloldalon q^2 is négyzetszám, így a prímtényezős felbontásában minden prímtényező szintén páros kitevőn szerepel. A feltétel szerint $a > 0$ egész és nem négyzetszám, tehát van olyan prímtényezője, melynek nem páros a kitevője. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős

felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.8. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt[3]{72}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor $\sqrt[3]{72} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát 3-dik hatványra emelve, majd rendezve a $72q^3 = p^3$ összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalán p minden prímtényezőjének a kitevője osztható 3-mal. A baloldalon q prímtényezői szintén 3-mal osztható hatványon fordulnak elő. Azonban a 72-nek van olyan prímtényezője, amelynek kitevője nem osztható 3-mal. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.9. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt[6]{2}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor $\sqrt[6]{2} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát 6-dik hatványra emelve, majd rendezve az $2q^6 = p^6$ összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalán p minden prímtényezőjének a kitevője osztható 6-tal. A baloldalon q prímtényezői szintén 6-tal osztható hatványon fordulnak elő. Azonban a 2-nek a kitevője nem osztható 6-tal. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.10. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt[5]{4}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor $\sqrt[5]{4} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát 5-dik hatványra emelve, majd rendezve az $4q^5 = p^5$ összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalán p minden prímtényezőjének a kitevője osztható 5-tel. A baloldalon q prímtényezői szintén 5-tel osztható hatványon fordulnak elő. Azonban a 4-nek van olyan prímtényezője, amelynek kitevője nem osztható 5-tel. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.11. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt[10]{10}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor $\sqrt[10]{10} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát 10-edik hatványra emelve, majd rendezve az $10q^{10} = p^{10}$ összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalán p minden prímtényezőjének a kitevője osztható 10-zel. A baloldalon q prímtényezői szintén 10-

zel osztható hatványon fordulnak elő. Azonban a 10-nek van olyan prímtényezője, amelynek kitevője nem osztható 10-zel. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.12. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt[7]{200}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor $\sqrt[7]{200} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát 7-dik hatványra emelve, majd rendezve a $200q^7 = p^7$ összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalán p minden prímtényezőjének a kitevője osztható 7-tel. A baloldalon q prímtényezői szintén 7-tel osztható hatványon fordulnak elő. Azonban a 200-nek van olyan prímtényezője, amelynek kitevője nem osztható 7-tel. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.13. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy a $\sqrt[k]{a}$ nem irracionális, ekkor felírható $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q pozitív egész számok. Ekkor $\sqrt[k]{a} = \frac{p}{q}$ mindkét oldalát k-adik hatványra emelve, majd rendezve a $aq^k = p^k$ összefüggést kapjuk. Az egyenlet jobb oldalán p minden prímtényezőjének a kitevője osztható k-val. A baloldalon q prímtényezői szintén k-val osztható hatványon fordulnak elő. Azonban az a-nak biztosan van olyan prímtényezője, amelynek kitevője nem osztható k-val, mert különben a akkor k-adik hatványa lenne egy természetes számnak. Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.14. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy $\log_2 5 = \frac{p}{q}$, *ahol p és q egész szám.*

Ebből Következik:

$$2^p = 5^q$$

Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.15. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy $\log_5 10 = \frac{p}{q}$, $ahol\ p\ és\ q\ egész\ szám.$

Ebből Következik:

$$5^p = 10^q$$

Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.16.

Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy $\log_{10} 15 = \frac{p}{q}$, $ahol\ p\ és\ q\ egész\ szám.$

Ebből Következik:

$$10^p = 15^q$$

Az egyenlőség két oldalán tehát két különböző prímtényezős felbontást kapnánk. Ez a számelmélet alaptétele értelmében nem lehetséges. Tehát ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltevés hamis volt.

18.2.17.

Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy $\log(2^m \cdot 5^n) = \frac{p}{q}$, $ahol\ p\ és\ q\ egész, m$ és n különböző nem negatív egész számok.

Ebből következik:

$$2^m \cdot 5^n = 10^{\frac{p}{q}}, vagyis\ 2^{mq} \cdot 5^{nq} = 2^p \cdot 5^p$$

Ez csak akkor lenne igaz, ha $mq = p\ és\ nq = p, vagyis\ m = \frac{p}{q} = n$. Ez ellentmondás, mert feltettük, hogy $m \neq n$.

Bizonyítsuk be az alábbi számokról, hogy irracionálisak!

18.2.18. Bizonyítás: Indirekt módon. A $\tan(2x)$-re vonatkozó összefüggés alapján az indirekt feltevés szerint: $\tan 10°$ $és$ $\tan 20°$ racionális. Az addíciós tétel szerint: $\tan(10° + 20°) = \tan 30°$ is racionális szám. A $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ez viszont irracionális szám, tehát ellentmondásra jutottunk.

18.2.19. Bizonyítás: Indirekt módon. A $\sin 3x = 3\sin x - 4(\sin x)^3$ miatt az indirekt feltevés szerint $\sin 15°$ racionális. Azonban $\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right)$. Ez viszont irracionális szám, tehát ellentmondásra jutottunk.

18.2.20.

Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy $\log_n(n+1) = \frac{p}{q}, ahol\ p\ és\ q\ egész\ szám.$ Ebből következik: $n^p = (n+1)^q$

Ez viszont ellentmondás, mert az egyik oldalon páros szám áll, a másikon viszont páratlan szám.

18.2.21. Bizonyítás: Indirekt módon. Tegyük fel, hogy mindkettő racionális, azaz felírható az alábbi módon:

$$\log n = \frac{p}{q} \ és\ \log(n+1) = \frac{r}{s}$$

Ezeket átírva:

$$10 = (n)^{\frac{q}{p}} \ és\ 10 = (n+1)^{\frac{s}{r}}$$

Ebből következik:

$$(n)^{qr} = (n+1)^{ps}$$

Ez viszont ellentmondás, mert az egyik oldalon páros szám áll, a másikon viszont páratlan szám.

18.2.22. Bizonyítás: Indirekt módon. Ha az állítás hamis, akkor a vizsgált irracionális szám tizedes tört alakjában mind a 10 számjegy csak véges sokszor szerepelne, így összesen csak véges sok számjegyből állna a szám, de ekkor racionális lenne, ami ellentmondás.

Az erősebb állítás is igaz: minden irracionális szám tizedes tört alakjában legalább két számjegy végtelen sokszor szerepel. Ha ugyanis pontosan egy számjegy szerepelne csak végtelen sokszor, akkor egy bizonyos tizedes jegytől kezdődően már csak ez a számjegy szerepelne a számban, így egy véges rész után periodikus lenne a tizedes tört alak, vagyis a szám racionális lenne, ami ellentmondás.

18.2.23. Bizonyítás: Indirekt módon. Ezt a legrégebbi bizonyítást *Euklidész Elemek* című munkájából ismerjük. A matematika történet első és talán a legszebb indirekt bizonyítása.

Tegyük fel, hogy csak véges sok prímszám létezik. Legyenek ezek: $p_1, p_2, \cdots, p_r$. Képezzük az alábbi számot:

$$A = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_r + 1$$

Az A szám nyilván a $p_1, p_2, \cdots, p_r$ prímszámok egyikével sem osztható. Azonban minden 1-nél nagyobb számnak létezik prímosztója. Ez viszont különbözik a $p_1, p_2, \cdots, p_r$ prímektől, ami ellentmond az indirekt feltevésnek.

A bizonyításból az is látható, hogy $p_n < 2^{2^n}, ahol\ p_n\ az\ n-edik$ prímszámot jelöli.

18.3. Teljes indukciós bizonyítás

18.3.1. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $\mathrm{n} = 1, \text{akkor } 1^3 + 2 \cdot 1 = 3, \text{valóban 3 osztója } 3 - \text{nak.}$

2. $\text{Tegyük fel, hogy n} = \text{k esetén igaz, vagyis 3 osztója az } \mathrm{k}^3 + 2\mathrm{k} \text{ kifejezésnek.}$

$\text{Bizonyítandó, hogy n} = \mathrm{k} + 1 \text{ esetén is igaz:}$

$$\text{A 3 osztója a } (\mathrm{k}+1)^3 + 2(\mathrm{k}+1) \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$\mathrm{k}^3 + 3\mathrm{k}^2 + 3\mathrm{k} + 1 + 2\mathrm{k} + 2 = \mathrm{k}^3 + 3\mathrm{k}^2 + 5\mathrm{k} + 3 = \mathrm{k}^3 + 2\mathrm{k} + 3 \cdot (\mathrm{k}^2 + \mathrm{k} + 1)$$

Az első két tag összege a feltétel szerint osztható 3-mal, illetve a harmadik tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.2. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $1^4 - 2 \cdot 1^3 + 1^2 = 0$, valóban 4 osztója 0 − nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 4 osztója a $k^4 - 2k^3 + k^2$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 4 osztója a } (k+1)^4 - 2(k+1)^3 + (k+1)^2 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - 2k^3 - 6k^2 - 6k - 2 + k^2 + 2k + 1 =$$

$$= k^4 + 2k^3 + k^2 = k^4 - 2k^3 + k^2 + 4k^3$$

Az első három tag összege a feltétel szerint osztható4-gyel, illetve a negyedik tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.3. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $2^5 + 3 = 35$, valóban 5 osztója 35 − nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 5 osztója a $2^{4k+1} + 3$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 5 osztója a } 2^{4k+5} + 3 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$16 \cdot 2^{4k+1} + 3 = 15 \cdot 2^{4k+1} + 2^{4k+1} + 3$$

Az első tag osztható 5-tel, illetve a második és harmadik tag összege a feltétel szerint osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.4. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$, valóban 6 osztója $6 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 6 osztója az $k^3 + 5k$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 6 osztója a } (k + 1)^3 + 5(k + 1) \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5 = k^3 + 3k^2 + 8k + 6 = k^3 + 5k + 3k^2 + 3k + 6 =$$

$$= k^3 + 5k + 3k(k + 1) + 6$$

Az első két tag összege a feltétel szerint osztható 6-tal. A harmadik tagban a k, illetve a k+1 két szomszédos szám, vagyis az egyikük páros, így ez a tag is osztható 6-tal. A negyedik tag szintén osztható 6-tal. Tehát igaz az állítás.

18.3.5. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $3^3 + 2^3 = 35$, valóban 7 osztója $35 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 7 osztója a $3^{2k+1} + 2^{k+2}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 7 osztója a } 3^{2k+3} + 2^{k+3} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2} = 9 \cdot \left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right) - 7 \cdot 2^{k+2}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 7-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.6. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $5^1 + 2 \cdot 3^0 + 1 = 8$, valóban 8 osztója $8 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 8 osztója a $5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 8 osztója a } \quad 5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$5 \cdot 5^k + \frac{2}{3} \cdot 3^{k-1} + 1 = 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1 + 4 \cdot 5^k - \frac{4}{3} \cdot 3^{k-1} =$$

$$= 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1 + 4 \cdot \left(5^k - 3^{k-2}\right)$$

Az első három tag összege a feltétel szerint osztható 8-cal. A negyedik tag esetén a zárójelben két páratlan szám különbsége szerepel, ami mindig páros, vagyis ez a tag is osztható 8-cal. Tehát igaz az állítás.

18.3.7. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $7^1 + 3 - 1 = 9$, valóban 9 osztója $9 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 9 osztója a $7^k + 3k - 1$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 9 osztója a } \quad 7^{k+1} + 3(k + 1) - 1 \quad \text{kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$7 \cdot 7^k + 3k + 2 = 7^k + 3k - 1 + 6 \cdot 7^k + 3 = 7^k + 3k - 1 + 3\left(2 \cdot 7^k + 1\right)$$

Az első három tag összege a feltétel szerint osztható 9-cel. A 7 hatványai 3-mal osztva mindig 1 maradékot adnak, tehát a zárójelben lévő kifejezés osztható 3-mal, vagyis a negyedik tag osztható 9-cel. Tehát igaz az állítás.

18.3.8. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $3^4 + 2^7 = 209$, valóban 11 osztója $209-$nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 11 osztója a $3^{2k+2} + 2^{6k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 11 osztója a } 3^{2k+4} + 2^{6k+7} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$9 \cdot 3^{2k+2} + 64 \cdot 2^{6k+1} = 9 \cdot \left(3^{2k+2} + 2^{6k+1}\right) + 55 \cdot 2^{6k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 11-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.9. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $4^3 + 3^3 = 91$, valóban 13 osztója $91-$nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 13 osztója a $4^{2k+1} + 3^{k+2}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 13 osztója a } 4^{2k+3} + 3^{k+3} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$16 \cdot 4^{2k+1} + 3 \cdot 3^{k+2} = 3 \cdot \left(4^{2k+1} + 3^{k+2}\right) + 13 \cdot 4^{2k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 13-mal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.10. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $3^4 + 8 - 9 = 80$, valóban 16 osztója $80-$nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 16 osztója a $3^{2k+2} + 8k - 9$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 16 osztója a } 3^{2k+4} + 8k - 1 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$9 \cdot 3^{2k+2} + 8k - 1 = 9 \cdot \left(3^{2k+2} + 8k - 9\right) - 16 \cdot (4k - 5)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 16-tal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.11. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $7^2 + 2^9 = 561$, valóban 17 osztója $561-$nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 17 osztója a $7^{2k} + 2^{5k+4}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 17 osztója a $7^{2k+2} + 2^{5k+9}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$49 \cdot 7^{2k} + 32 \cdot 2^{5k+4} = 49 \cdot \left(7^{2k} + 2^{5k+4}\right) - 17 \cdot 2^{5k+4}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 17-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.12. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $2^2 + 24 - 10 = 18$, valóban 18 osztója $18-$nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 18 osztója a $2^{2k} + 24k - 10$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 18 osztója a $2^{2k+2} + 24k + 14$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$4 \cdot 2^{2k} + 24k + 14 = 4 \cdot \left(2^{2k} + 24k - 10\right) - 18 \cdot (4k - 3)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 18-cal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.13. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $5 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^1 = 38$, valóban 19 osztója $38 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 19 osztója a $5^{2k-1} \cdot 2^{k+1} + 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 19 osztója a $5^{2k+1} \cdot 2^{k+2} + 3^{k+2} \cdot 2^{2k+1}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$25 \cdot 5^{2k-1} \cdot 2 \cdot 2^{k+1} + 3 \cdot 3^{k+1} \cdot 4 \cdot 2^{2k-1} = 50 \cdot 5^{2k-1} \cdot 2^{k+1} + 12 \cdot 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1} =$$

$$= 12 \cdot \left(5^{2k-1} \cdot 2^{k+1} + 3^{k+1} \cdot 2^{2k-1}\right) + 38 \cdot 5^{2k-1} \cdot 2^{k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 19-cel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.14. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. $n = 1$, akkor $5^3 + 4^3 = 189$, valóban 21 osztója $189 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 21 osztója az $5^{2k+1} + 4^{k+2}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 21 osztója az $5^{2k+3} + 4^{k+3}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$25 \cdot 5^{2k+1} + 4 \cdot 4^{k+2} = 4 \cdot \left(5^{2k+1} + 4^{k+2}\right) + 21 \cdot 5^{2k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 21-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.15. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $2^{10} + 3^3 \cdot 5^5 = 85399$, valóban 23 osztója $85399 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 23 osztója a $2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 23 osztója a $2^{7k+10} + 3^{2k+3} \cdot 5^{4k+5}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$128 \cdot 2^{7k+3} + 5625 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1} = 128 \cdot \left(2^{7k+3} + 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}\right) + 5497 \cdot 3^{2k+1} \cdot 5^{4k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 23-mal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.16. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $10 + 18 - 1 = 27$, valóban 27 osztója $27 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 27 osztója a $10^k + 18k - 1$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 27 osztója a $10^{k+1} + 18k + 17$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$10 \cdot 10^k + 18k + 17 = 10 \cdot \left(10^k + 18k - 1\right) - 162k + 27 =$$

$$= 10 \cdot \left(10^k + 18k - 1\right) - 27 \cdot (6k - 1)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 27-tel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.17. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $7^3 + 7^2 + 7^1 = 399$, valóban 57 osztója $399 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 57 osztója a $7^{k+2} + 7^{k+1} + 7^k$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 57 osztója a } \; 7^{k+3} + 7^{k+2} + 7^{k+1} \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$7 \cdot \; 7^{k+2} + 7 \cdot 7^{k+1} + 7 \cdot 7^k = 7 \cdot \left(7^{k+2} + \; 7^{k+1} + 7^k\right)$$

A zárójelben lévő kifejezés a feltétel szerint osztható 57-tel. Tehát igaz az állítás.

18.3.18. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $3^4 - 8 - 9 = 64$, valóban 64 osztója $64 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 64 osztója a $\; 3^{2k+2} - 8k - 9$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 64 osztója a } \; 3^{2k+4} - 8k - 17 \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$9 \cdot 3^{2k+2} - 8k - 17 = 9 \cdot \left(3^{2k+2} - 8k - 9\right) + 64 \cdot (k + 1)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 64-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.19. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $10 \cdot (9 - 1) + 1 = 81$, valóban 81 osztója $81 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

$$\text{vagyis 81 osztója a } 10^k \cdot (9k - 1) + 1 \;\; \text{kifejezésnek.}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\text{A 81 osztója a } \; 10^{k+1} \cdot (9k + 8) + 1 \; \text{ kifejezésnek.}$$

Átalakítva:

$$10 \cdot 10^k \cdot (9k + 8) + 1 = 10 \cdot 10^k \cdot 9k + 80 \cdot 10^k + 1 =$$

$$= 10 \cdot \left(10^k \cdot 9k - 10^k + 1\right) + 90 \cdot 10^k - 9 = 10 \cdot \left(10^k \cdot 9k - 10^k + 1\right) + 9 \cdot \left(10^{k+1} - 1\right)$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 81-gyel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.20. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $3^4 \cdot 2^4 - 108 = 1188$, valóban 99 osztója $1188 -$ nak.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 99 osztója a $3^{k+3} \cdot 2^{2k+2} - 108$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 99 osztója a $3^{k+4} \cdot 2^{2k+4} - 108$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$3 \cdot 3^{k+3} \cdot 4 \cdot 2^{2k+2} - 108 = 12 \cdot \left(3^{k+3} \cdot 2^{2k+2} - 108\right) + 1188$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 99-cel, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.21. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 - 5 + 4 = 0$, valóban 120 osztója $0 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 120 osztója az $k^5 - 5k^3 + 4k$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 120 osztója az $(k + 1)^5 - 5(k + 1)^3 + 4(k + 1)$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - 5(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 4(k + 1) =$$

$$= k^5 + 5k^4 + 5k^3 - 5k^2 - 6k = k^5 - 5k^3 + 4k + 5k^4 + 10k^3 - 5k^2 - 10k =$$

$$= k^5 - 5k^3 + 4k + 5(k - 1)k(k + 1)(k + 2)$$

Az első három tag a feltétel szerint osztható 120-szal. Az utolsó tagban négy szomszédos szám szerepel. Köztük biztosan van 3-mal osztható és van két páros szám, ezek egyike 2-vel, a másik 4-gyel osztható. Ezért a kifejezés osztható lesz $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120 -$ szal. Tehát igaz az állítás.

18.3.22. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $11^3 + 12^3 = 3059$, valóban 133 osztója $3059 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis 133 osztója a $11^{k+2} + 12^{2k+1}$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 133 osztója a $11^{k+3} + 12^{2k+3}$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = 11 \cdot \left(11^{k+2} + 12^{2k+1}\right) + 133 \cdot 12^{2k+1}$$

Az első tag a feltétel szerint osztható 133-mal, illetve a második tag is osztható. Tehát igaz az állítás.

18.3.23. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $13^2 - 2 \cdot 13 + 1 = 144$, valóban 144 osztója $144 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 144 osztója a $k \cdot 13^{k+1} - (k + 1) \cdot 13^k + 1$ kifejezésnek,

azaz 144 osztója a $12k \cdot 13^k - 13^k + 1$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

A 144 osztója a $(k + 1) \cdot 13^{k+2} - (k + 2) \cdot 13^{k+1} + 1$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$k \cdot 13^{k+2} + 13^{k+2} - k \cdot 13^{k+1} - 2 \cdot 13^{k+1} + 1 =$$

$$= 169k \cdot 13^k + 169 \cdot 13^k - 13k \cdot 13^k - 26 \cdot 13^k + 1 =$$

$$= 156k \cdot 13^k + 143 \cdot 13^k + 1 = 144\left(k \cdot 13^k + 13^k\right) + 12k \cdot 13^k - 13^k + 1$$

Az első tag osztható 144-gyel, illetve az utolsó három tag is osztható a feltétel szerint. Tehát igaz az állítás.

18.3.24. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 + 1 = 2$, valóban 2 osztója $2 -$ nek.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz,

vagyis 2^k osztója az $(k + 1)(k + 2) \cdot \cdots \cdot (2k)$ kifejezésnek.

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

2^{k+1} osztója az $(k + 2)(k + 3) \cdot \cdots \cdot (2k)(2k + 1)(2k + 2)$ kifejezésnek.

Átalakítva:

$$(k + 2)(k + 3) \cdot \cdots \cdot (2k)(2k + 1)2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)(k + 3) \cdot \cdots \cdot (2k)2(2k + 1)$$

Ennek a kifejezésnek pedig a 2^{k+1} osztója. Tehát igaz az állítás.

18.3.25. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k+1}{6} \cdot [k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.26. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4} \cdot [k^2 + 4(k+1)] =$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k+2)^2 = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.27. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

$$1.\,\text{Ha } n = 1, \text{akkor} 1^2 = (-1)^0 \cdot \frac{1(1+1)}{2}, \text{valóban } 1 = 1.$$

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 = (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots + (-1)^{k-1} \cdot k^2 + (-1)^k \cdot (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k \cdot (k+1)^2$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$(-1)^k \cdot \frac{(k+1)}{2}[-k + 2(k+1)] = (-1)^k \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.28. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

$$1.\,\text{Ha } n = 1, \text{akkor} (2 \cdot 1 - 1)^2 = \frac{1(4 \cdot 1^2 - 1)}{3}, \text{valóban } 1 = 1.$$

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(4k^2 - 1)}{3} + (2k+1)^2$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(4k^2-1)+3(2k+1)^2}{3}=\frac{k(2k-1)(2k+1)+3(2k+1)(2k+1)}{3}=$$

$$=\frac{(2k+1)[k(2k-1)+3(2k+1)]}{3}=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=$$

$$=\frac{(k+1)(4k^2+8k+3)}{3}=\frac{(k+1)[4(k+1)^2-1]}{3}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.29. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n=1$, akkor $1\cdot(1+1)=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}$, valóban $2=2$.

2. Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén igaz, vagyis:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k\cdot(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Bizonyítandó, hogy $n=k+1$ esetén is igaz:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k\cdot(k+1)+(k+1)(k+2)=$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.30. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$, valóban $6 = 6$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + k \cdot (k+1) \cdot (k+2) + (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) =$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)}{4} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.31. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot (1+1)^2$, valóban $4 = 4$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + k \cdot (3k+1) = k \cdot (k+1)^2$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + k \cdot (3k+1) + (k+1) \cdot (3k+4) = k \cdot (k+1)^2 + (k+1) \cdot (3k+4)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$(k+1)[k(k+1) + 3k + 4] = (k+1)(k^2 + 4k + 4) = (k+1)(k+2)^2$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.32. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 + 1$, valóban $2 = 2$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{k}\right) = k + 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$(1 + 1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right) = (k + 1)\left(1 + \frac{1}{k + 1}\right)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$k + 1 + 1 = k + 2$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.33. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 - \frac{0}{1!} = \frac{1}{1!}$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \cdots - \frac{k - 1}{k!} = \frac{1}{k!}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \cdots - \frac{k - 1}{k!} - \frac{k}{(k + 1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{k}{(k + 1)!}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k + 1 - k}{(k + 1)!} = \frac{1}{(k + 1)!}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.34. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$(k + 1)^2$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.35. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k \cdot (k + 1)}{2}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{k \cdot (k + 1)}{2} + (k + 1)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k \cdot (k + 1) + 2 \cdot (k + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.36. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{1+1}$, valóban $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.37. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{(2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$, valóban $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.38. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{(3 \cdot 1 - 2) \cdot (3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3 \cdot 1 + 1}$, valóban $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3k - 2)(3k + 1)} = \frac{k}{3k + 1}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3k - 2)(3k + 1)} + \frac{1}{(3k + 1)(3k + 4)} =$$

$$= \frac{k}{3k + 1} + \frac{1}{(3k + 1)(3k + 4)}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(3k + 4) + 1}{(3k + 1)(3k + 4)} = \frac{3k^2 + 4k + 1}{(3k + 1)(3k + 4)} = \frac{k + 1}{3k + 4}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.39. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1 + 1}$, valóban $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2k - 1)2k} = \frac{1}{k + 1} + \frac{1}{k + 2} + \frac{1}{k + 3} + \cdots + \frac{1}{2k}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2k - 1)2k} + \frac{1}{(2k + 1)(2k + 2)} =$$

$$= \frac{1}{k + 1} + \frac{1}{k + 2} + \frac{1}{k + 3} + \cdots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{(2k + 1)(2k + 2)}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{(2k+1)}+\frac{1}{(2k+2)}$$

Ehhez lássuk be a következő összefüggést:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

Alakítsuk át mindkét oldalt:

$$\frac{2(2k+1)+1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{2k+2+2k+1}{(2k+1)(2k+2)}$$

$$\frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{4k+3}{(2k+1)(2k+2)}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.40. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n=1$, akkor $\frac{1}{(a+1-1)\cdot(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}$, valóban igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n=k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}=\frac{k}{a(a+k)}$$

Bizonyítandó, hogy $n=k+1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+k-1)(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=$$

$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{ak+k^2+k+a}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.41. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3}$, valóban $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k(k+1)(2k+3) + 2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.42. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $2^0 = 2^1 - 1$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.43. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $(2+1)(2^2+1) = 2^{2^2} - 1$, valóban $15 = 15$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$(2+1)(2^2+1)\cdots\left(2^{2^k}+1\right) = 2^{2^{k+1}} - 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k+1$ esetén is igaz:

$$(2+1)(2^2+1)\cdots\left(2^{2^k}+1\right)\left(2^{2^{k+1}}+1\right) = \left(2^{2^{k+1}}-1\right)\left(2^{2^{k+1}}+1\right)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\left(2^{2^{k+1}}\right)^2 - 1 = 2^{2\cdot 2^{k+1}} - 1 = 2^{2^{k+2}} - 1$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.44. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1\cdot(1+1)!}{2} = \frac{(1+2)!}{2} - 2$, valóban $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1\cdot 2!}{2} + \frac{2\cdot 3!}{2^2} + \cdots + \frac{k\cdot(k+1)!}{2^k} = \frac{(k+2)!}{2^k} - 2$$

Bizonyítandó, hogy $n = k+1$ esetén is igaz:

$$\frac{1\cdot 2!}{2} + \frac{2\cdot 3!}{2^2} + \cdots + \frac{k\cdot(k+1)!}{2^k} + \frac{(k+1)\cdot(k+2)!}{2^{k+1}} =$$

$$= \frac{(k+2)!}{2^k} - 2 + \frac{(k+1)\cdot(k+2)!}{2^{k+1}}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{2(k+2)! + (k+1)\cdot(k+2)!}{2^{k+1}} - 2 = \frac{(k+3)\cdot(k+2)!}{2^{k+1}} - 2 = \frac{(k+3)!}{2^{k+1}} - 2$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.45. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 2$, akkor $1 - \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4}$, valóban $\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{k+1}{2k} \cdot \frac{(k+1)^2 - 1}{(k+1)^2} = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{(k+1+1)(k+1-1)}{(k+1)^2} = \frac{(k+2)}{2(k+1)}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.46. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 2$, akkor $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} > \frac{1}{2\sqrt{2}}$, valóban igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2k} > \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

Behelyettesítve a feltételt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)}$$

Bizonyítandó:

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} > \frac{1}{2\sqrt{k+1}}$$

Átalakítás után:

$$\frac{2k+1}{2\sqrt{k}(k+1)} > \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\frac{2k+1}{2\sqrt{k}} > \sqrt{k+1}$$

$$2k+1 > 2\sqrt{k(k+1)}$$

$$4k^2 + 4k + 1 > 4k^2 + 4k$$

Ez igaz, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti állítás is igaz.

18.3.47. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 2$, akkor $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{7}}$, valóban igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k+1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Behelyettesítve a feltételt:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)}$$

Bizonyítandó:

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$$

Átalakítás után:

$$(2k+1)\sqrt{3k+4} < 2(k+1)\sqrt{3k+1}$$

$$(4k^2+4k+1)(3k+4) < (4k^2+8k+4)(3k+1)$$

$$12k^3+28k^2+19k+4 < 12k^3+28k^2+20k+4$$

Ez igaz, és mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, az eredeti állítás is igaz.

18.3.48. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > 1$, valóban igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1} > 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k+1$ esetén is igaz:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} > 1$$

Behelyettesítve a feltételt:

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} >$$
$$> 1+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4} > 1$$

Ez igaz, mert 1-hez pozitív számokat adtunk, tehát az eredeti állítás is igaz.

18.3.49. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 2$, akkor $1 < \frac{3}{2} < 2$, valóban igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{k}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} < k$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{k+1}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} < k + 1$$

A bal oldali egyenlőtlenségbe behelyettesítve a feltételt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} >$$
$$> \frac{k}{2} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

Ahol az $\frac{1}{2^k}$ tagból 2^{k-1} darab szerepel.

$$\frac{k}{2} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{k}{2} + \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

Tehát a bal oldali egyenlőtlenség igaz.

A jobb oldali egyenlőtlenségbe behelyettesítve a feltételt:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} < k + \frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} <$$
$$< k + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}$$

Ahol az $\frac{1}{2^{k-1}}$ tagból 2^{k-1} darab szerepel.

$$k + \frac{1}{2^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} = k + \frac{2^{k-1}}{2^{k-1}} = k + 1$$

Tehát a jobb oldali egyenlőtlenség is igaz.

18.3.50. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 5$, akkor $\frac{10!}{(5!)^2} < 4^4$, valóban $252 < 256$ igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$\frac{(2k)!}{(k!)^2} < 4^{k-1}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$\frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2} = \frac{(2k+2)!}{[(k+1)\cdot k!]^2} = \frac{(2k+1)(2k+2)\cdot(2k)!}{(k+1)^2\cdot(k!)^2} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\cdot\frac{2(2k+1)}{k+1}$$

Felhasználjuk, hogy n=k esetén igaz az állítás, és

$$\frac{2k+1}{k+1} < 2.$$

Ekkor:

$$\frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2} < 4^{k-1}\cdot 2\cdot 2 = 4^k$$

Tehát az eredeti állítás is igaz.

18.3.51. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 5$, akkor $2^5 > 5^2$, valóban $32 > 25$ igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$2^k > k^2$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

$$2\cdot 2^k > k^2 + 2k + 1$$

A feltételből következik, hogy:

$$2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2$$

Azt kell igazolni, hogy:

$$2 \cdot k^2 > k^2 + 2k + 1, vagyis\ k^2 > 2k + 1$$

Ha $n > 4$, akkor:

$$k^2 > 4k > 2k + 1$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.52. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 4$, akkor $3^4 > 4^3$, valóban $81 > 64$ igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$3^k > k^3$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$3^{k+1} > (k+1)^3$$

$$3 \cdot 3^k > k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

A feltételt 3-mal szorozva kapjuk, hogy:

$$3 \cdot 3^k > 3 \cdot k^3$$

Azt kell igazolni, hogy:

$$3 \cdot k^3 > k^3 + 3k^2 + 3k + 1, vagyis\ 2 \cdot k^3 > 3k^2 + 3k + 1$$

Azaz:

$$k^3 + k^3 > 3k^2 + 3k + 1$$

Mivel $n > 3$, ezért:

$$k^3 > 3k^2$$

$$k^3 = k^2 \cdot k > 9k > 3k + 1$$

Így:

$$k^3 + k^3 > 3k^2 + 3k + 1$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.53. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $\mathrm{n} = 1$, akkor a síkot 2 részre osztja, tehát igaz a képlet.

$$\frac{1^2 + 1 + 2}{2} = 2$$

2. Tegyük fel, hogy $\mathrm{n} = \mathrm{k}$ esetén igaz, vagyis a részek száma:

$$\frac{k^2 + k + 2}{2}$$

Bizonyítandó, hogy $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$ esetén is igaz, hogy a részek száma legfeljebb:

$$\frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

Ha a $(k + 1)$-edik egyenes az előző k egyenes mindegyikét metszi, akkor k metszéspont és $(k + 1)$ új síkrész keletkezik. Felhasználva a feltételt az alábbiakat kapjuk:

$$\frac{k^2 + k + 2}{2} + k + 1 = \frac{k^2 + k + 2 + 2n + 2}{2} = \frac{(k+1)^2 + (k+1) + 2}{2}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.54. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor a síkot 2 részre osztja, tehát igaz a képlet.

$$1^2 - 1 + 2 = 2$$

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis a részek száma:

$$k^2 - k + 2$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz, hogy a részek száma legfeljebb:

$$(k+1)^2 - (k+1) + 2$$

Ha a $(k+1)$-edik kör az előző *k* kör mindegyikét 2 helyen metszi, akkor *2k* új síkrészt hoz létre. Felhasználva a feltételt az alábbiakat kapjuk:

$$k^2 - k + 2 + 2k = (k+1)^2 - (k+1) + 2$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.55. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

A feltétel szerint $a + b = 2$ *és* $a^2 + b^2 = 4$. Ebből következik, hogy:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 4, 2ab = 0, a = 0 \; vagy \; b = 0.$$

1. Ha $n = 1$ vagy $n = 2$, akkor $a^n + b^n = 2^n$ igaz.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$a^k + b^k = 2^k$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$a^{k+1} + b^{k+1} = 2^{k+1}$$

Átalakítás után:

$$a^{k+1} + b^{k+1} = (a+b)(a^k + b^k) - ab(a^{k-1} + b^{k-1})$$

A második tag $ab = 0\ miatt\ 0$.

Ezért:

$$a^{k+1} + b^{k+1} = (a+b)(a^k + b^k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.56. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1.A feltétel szerint $a + \frac{1}{a}$ egész szám. Ekkor az alábbi kifejezés is egész:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{a} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$$

Tehát ha $\mathrm{n} = 1$ vagy $\mathrm{n} = 2$, akkor igaz.

2. Tegyük fel, hogy $\mathrm{n} = (k-1) - \mathrm{re}$ és $\mathrm{n} = \mathrm{k}$ esetén igaz. Ezek segítségével igazoljuk, hogy $\mathrm{n} = (k+1) - \mathrm{re}$ is igaz!

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) \cdot \left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

A feltételek szerint az első tag mindkét tényezője egész, a második tag is. A különbségük szintén egész. Tehát igaz az állítás.

18.3.57. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $\mathrm{n} = 1$, akkor $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$, ahol $\sin x \neq 0$, $ez\ igaz$.

2. Tegyük fel, hogy $\mathrm{n} = \mathrm{k}$ esetén igaz, vagyis:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cdots \cdot \cos 2^k x = \frac{\sin 2^{k+1} x}{2^{k+1} \cdot \sin x}\ , ahol\ \sin x \neq 0$$

Bizonyítandó, hogy $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$ esetén is igaz:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cdots \cdot \cos 2^{k+1} x = \frac{\sin 2^{k+2} x}{2^{k+2} \cdot \sin x}\ , ahol\ \sin x \neq 0$$

Felhasználva az indukciós feltevést:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^{k+1}x = \frac{\sin 2^{k+1}x}{2^{k+1} \cdot \sin x} \cdot \cos 2^{k+1}x =$$

$$= \frac{2 \cdot \sin 2^{k+1}x \cdot \cos 2^{k+1}x}{2^{k+2} \cdot \sin x} = \frac{\sin 2^{k+2}x}{2^{k+2} \cdot \sin x}$$

Tehát igaz az állítás.

18.3.58. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $1 = 2^1 - 1$, $ez\ igaz$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$a_k = 2^k - 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$$

Használjuk fel az indukciós feltételt és a sorozat rekurzív megadását:

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k + 1 = 2 \cdot (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$$

Tehát az állítás igaz.

18.3.59. Bizonyítás: Teljes indukcióval. Mivel a rekurzió másodrendű, ezért az indukciós feltevést most a megelőző két tagra kell majd használnunk.

1. Ha $n = 1$, és $n = 2$ akkor $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^{1-1}+1}$ és $\frac{1}{3} = \frac{1}{2^{2-1}+1}$, $ez\ igaz$.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$, és $n = k + 1$ esetén igaz, vagyis:

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}+1} \text{ , és } a_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1-1}+1}$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 2$ esetén is igaz:

$$a_{k+2} = \frac{1}{2^{k+2-1}+1} = \frac{1}{2^{k+1}+1}$$

A sorozat rekurzív megadása alapján:

$$a_{k+2} = \frac{a_k \cdot a_{k+1}}{3a_k - 2a_{k+1}}$$

Az indukciós feltevés miatt pedig:

$$a_k = \frac{1}{2^{k-1}+1}\text{ , és } a_{k+1} = \frac{1}{2^{k+1-1}+1}$$

Ezért igaz a következő átalakítás:

$$a_{k+2} = \frac{\frac{1}{2^{k-1}+1} \cdot \frac{1}{2^k+1}}{\frac{3}{2^{k-1}+1} - \frac{2}{2^k+1}} = \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)\cdot(2^k+1)}\right) \div \left(\frac{3\cdot(2^k+1) - 2\cdot(2^{k-1}+1)}{(2^{k-1}+1)\cdot(2^k+1)}\right)$$

Tovább alakítva a következőt kapjuk:

$$a_{k+2} = \frac{1}{3\cdot(2^k+1) - 2\cdot(2^{k-1}+1)} = \frac{1}{3\cdot 2^k + 3 - 2^k - 2} = \frac{1}{2\cdot 2^k + 1} = \frac{1}{2^{k+1}+1}$$

Tehát az állítás igaz.

18.3.60. Bizonyítás: Teljes indukcióval.

1. Ha $n = 1$, akkor $2 = 3^{1-1} + 1$, *ez igaz*.

2. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz, vagyis:

$$a_k = 3^{k-1} + 1$$

Bizonyítandó, hogy $n = k + 1$ esetén is igaz:

$$a_{k+1} = 3^k + 1$$

Használjuk fel az indukciós feltételt és a sorozat rekurzív megadását:

$$a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 2 = 3 \cdot (3^{k-1} + 1) - 2 = 3^k + 1$$

Tehát az állítás igaz.

18.3.61. Az 1-ről a 2-re való átmenet nem működik, a többi már *n*-ről n+1-re helyes lenne.

18.3.62. Az állítás csak 1-nél nagyobb *n*-ekre igaz. Az első lépésnél a baloldalon $n = 2$, a jobb oldalon $n = 1$ esetet tettünk egyenlővé.

18.3.63. Az a hiba, hogy az indukciós lépésben $(n-1) - re$ $és$ $(n-2) - re$ is igaznak vettük az állítást, de csak $(n = 1) - re$ ellenőriztük az állítást.

18.3.64. A bizonyítás biztosan rossz, hiszen az állítás hamis (csak $n = 0$-ra igaz). A hiba ott van, hogy 3^k nem feltétlenül osztható 3-mal, hiszen $k = 0$ esetén $3^0 = 1$. Emiatt $n = 0$-ról $n = 1$-re nem „öröklődik” az állítás, s így a többi 0-nál nagyobb *n*-re sem.